Interpretar características del razonamiento proporcional para tomar decisiones que ayuden a los estudiantes a progresar en su aprendizaje

Jonathan **Espinoza** González
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
jonathan.espinoza.gonzalez@una.cr
Àngela **Buforn** Lloret
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
angela.buforn@ua.es
Salvador **Llinares** Ciscar
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen

Se investiga cómo estudiantes para profesores de matemáticas de educación secundaria interpretan características del razonamiento proporcional en estudiantes de educación secundaria como paso previo a decidir cómo continuar la enseñanza. Catorce estudiantes para profesores participaron en una intervención formativa dirigida a desarrollar competencias docentes a partir de la interpretación de las respuestas de tres estudiantes de educación secundaria a cinco problemas, reflejando diferentes características del desarrollo del razonamiento proporcional. Los resultados muestran que los estudiantes para profesor que consideraban globalmente las características del razonamiento proporcional de cada estudiante evidenciado en las respuestas a los diferentes problemas, sugieren acciones de enseñanza coherentes con estas interpretaciones. Sin embargo, decidir cómo continuar la enseñanza resulta difícil para los estudiantes para profesores que no interpretan de manera global las características del razonamiento proporcional de los estudiantes.

Palabras clave: didáctica de la matemática; Educación superior; Enseñanza; Aprendizaje; Formación docente inicial; Investigación cualitativa; Proporcionalidad; Competencia docente “mirar profesionalmente”.

Introducción

Mirar profesionalmente una situación de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas consiste en identificar aspectos relevantes para el aprendizaje e interpretarlos para justificar propuestas de acción (Llinares et al., 2019; Mason, 2002). Promover esta competencia en el profesorado es importante porque genera formas de actuar de manera consciente y fundamentada, a partir del significado dado a las situaciones de enseñanza. Se asume que esta competencia no es innata, pero puede apoyarse su desarrollo desde la formación inicial pero que es necesario vincularlo a contenidos matemáticos específicos (Llinares, 2013). Un dominio matemático relevante en educación secundaria es el razonamiento proporcional, por lo que es necesario que los estudiantes para profesor de matemáticas desarrollen la competencia docente vinculada al apoyo de este razonamiento. Sin embargo, investigaciones previas muestran las dificultades que tienen los estudiantes para profesor (EPPs) para desarrollar esta competencia docente (Buforn et al., 2022; Fernández et al., 2011; Glassmeyer et al., 2021; Hines et al., 2005). Como consecuencia, es necesario aportar información sobre cómo apoyar el desarrollo de esta competencia en los programas de formación. El objetivo de la investigación presentada aquí es aportar información en esta línea, con especial atención a la forma en que EPPs toman decisiones para continuar con la enseñanza a partir del reconocimiento de características del razonamiento proporcional de estudiantes.

Transiciones en el razonamiento proporcional y desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el razonamiento proporcional de los estudiantes

El razonamiento proporcional es la manera de reconocer y usar las relaciones multiplicativas entre dos cantidades que covarían multiplicativamente (situaciones proporcionales) y la capacidad de reconocer situaciones proporcionales de las no proporcionales (Lamon, 1993). Las investigaciones previas han identificado transiciones en el razonamiento proporcional de los estudiantes de educación secundaria que los profesores deben tener en cuenta al pensar en la enseñanza de los conceptos de razón y proporción (Lobato et al., 2010) (Tabla 1). Reconocer las transiciones del razonamiento proporcional que la enseñanza debería apoyar se vincula a la capacidad de los profesores de identificar rasgos del razonamiento proporcional en un estudiante. Para ello, los EPPs deben aprender a identificar e interpretar cómo los estudiantes usan las relaciones multiplicativas entre las cantidades, considerando diferentes tipos de problemas, para identificar objetivos de aprendizaje que deben ser considerados al diseñar la enseñanza.

Tabla 1
Transiciones entre los niveles del razonamiento proporcional

Transición	Descripción
1	*Del pensamiento absoluto al pensamiento relativo*. En esta transición el estudiante pasa de enfocarse en una sola cantidad a prestar atención a la relación entre dos cantidades. El estudiante inicia la construcción de la idea de razón como una relación multiplicativa entre dos cantidades de igual o distinta magnitud. Sin embargo, puede relacionar aditivamente las cantidades cuando la situación es proporcional o multiplicativamente cuando es no proporcional.

2	*De considerar una razón a formar múltiples razones*. En esta transición los estudiantes van de identificar relaciones multiplicativas entre cantidades de igual magnitud y trasladarlas a la otra magnitud, hasta reconocer y usar la razón funcional como una estrategia más eficiente. En esta transición el estudiante inicialmente identifica, construye y usa razones escalares que evidencian la invarianza de las razones escalares e inicia la comprensión de la constancia de las razones funcionales, pero tiene dificultades en representar las razón funcional.
3	*De usar razones funcionales a representarlas*. Implica usar la razón funcional y la constancia de las razones funcionales (constante de proporcionalidad) y representarla en diferentes representaciones (tabular, verbal o algebraicamente).

Fuente: Elaboración propia

Metodología

Participantes y contexto

Los participantes fueron 14 EPPs de Matemática de Educación Secundaria en el tercer año de su formación inicial, matriculados en un programa de formación docente de la Universidad Nacional (Costa Rica). El estudio forma parte de una investigación más amplia en el que se diseñó una intervención formativa de 17 sesiones de duración (una sesión por semana de 150 minutos) con el objetivo de empezar a desarrollar la competencia docente “mirar profesionalmente” situaciones de enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional en educación secundaria. En esta comunicación presentaremos los resultados iniciales relativos al desarrollo de la manera en la que los EPPs reconocían características del razonamiento proporcional en estudiantes de educación secundaria como paso previo a decidir cómo ayudarles a realizar las transiciones para llegar a ser mejores razonadores proporcionales. Para ello, durante dos sesiones, los estudiantes para profesor resolvieron una serie de problemas de razón y proporción, y discutieron sobre las características de los problemas (elementos matemáticos), y sobre las estrategias empleadas por ellos mismos (correctas e incorrectas). A los estudiantes para profesor se les proporcionó un documento con información teórica sobre estos aspectos para apoyar sus argumentos y ayudarles a hablar sobre las características del desarrollo del razonamiento proporcional.

Instrumento y Procedimiento

Posteriormente, los EPPs resolvieron una práctica formada por tres cuestiones vinculadas a las tres destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes: identificar, interpretar y tomar decisiones de acción (Jacobs et al, 2010) (Figura 1). La práctica presentaba las respuestas hipotéticas de tres estudiantes de secundaria a cinco problemas idénticos o con pequeñas modificaciones a los que los EPPs habían resuelto previamente

A continuación, se muestran respuestas de tres estudiantes a cinco problemas de las prácticas 1 y 2, con algunas modificaciones leves. Ahora realiza lo siguiente: 1. Analiza el pensamiento matemático de cada estudiante con base en los siguientes criterios. a) IDENTIFICAR. Describe la estrategia utilizada sin importar si es correcta o no. En caso de ser incorrecta explica qué es lo que el estudiante no comprende. b) INTERPRETAR el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional. A partir de las respuestas dadas por un mismo estudiante a todas las tareas, identifica las transiciones que ha logrado alcanzar y aquellas que aún debe superar en su pensamiento para desarrollar su razonamiento proporcional. Con base en lo anterior, indica el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional alcanzado por cada estudiante. Justifica tu respuesta. 2. DECISIONES DE ACCIÓN ¿Qué cuestiones o qué otras tareas propondrías para promover las transiciones en el pensamiento del estudiante que apoyan el desarrollo de su razonamiento proporcional?

Figura 1. Consigna dada a los EPP.

Cada problema (Figura 2) responde a un propósito y tiene diferentes características (tipo de problema, tipo de razón, contexto y formas de expresar la relación funcional). El problema 1 pretendía que el estudiante completara una tabla de proporcionalidad y expresara la relación funcional de forma algebraica (con una razón funcional no entera y dos razones escalares, una entera y otra no entera). El propósito del problema 2 era que el estudiante reconociera la situación no proporcional. El problema 3 es un problema de comparación numérica en un contexto de mezcla mostrando en una tabla dos razones funcionales no enteras y dos escalares no enteras. El problema 4 es un problema de comparación cualitativa, y el problema 5 requería que los estudiantes identificaran la representación tabular, verbal y algebraica de una relación funcional.

Por otra parte, las respuestas de los estudiantes a estos problemas reflejaban diferentes características en el desarrollo del razonamiento proporcional. El estudiante 1 reconoce y usa relaciones multiplicativas entre cantidades de la misma magnitud y las traslada a relaciones entre cantidades correspondientes de la otra magnitud, distingue situaciones proporcionales de las no proporcionales, pero tiene dificultades en representar la relación funcional (características de la transición 2) (Figura 2). El estudiante 2 usa de manera incorrecta relaciones aditivas (cuando deben ser multiplicativas) y multiplicativas (cuando deben ser aditivas) (características de la transición 1) y el estudiante 3 distingue las situaciones aditivas de las proporcionales y usa y representa la razón funcional (características de la transición 3).

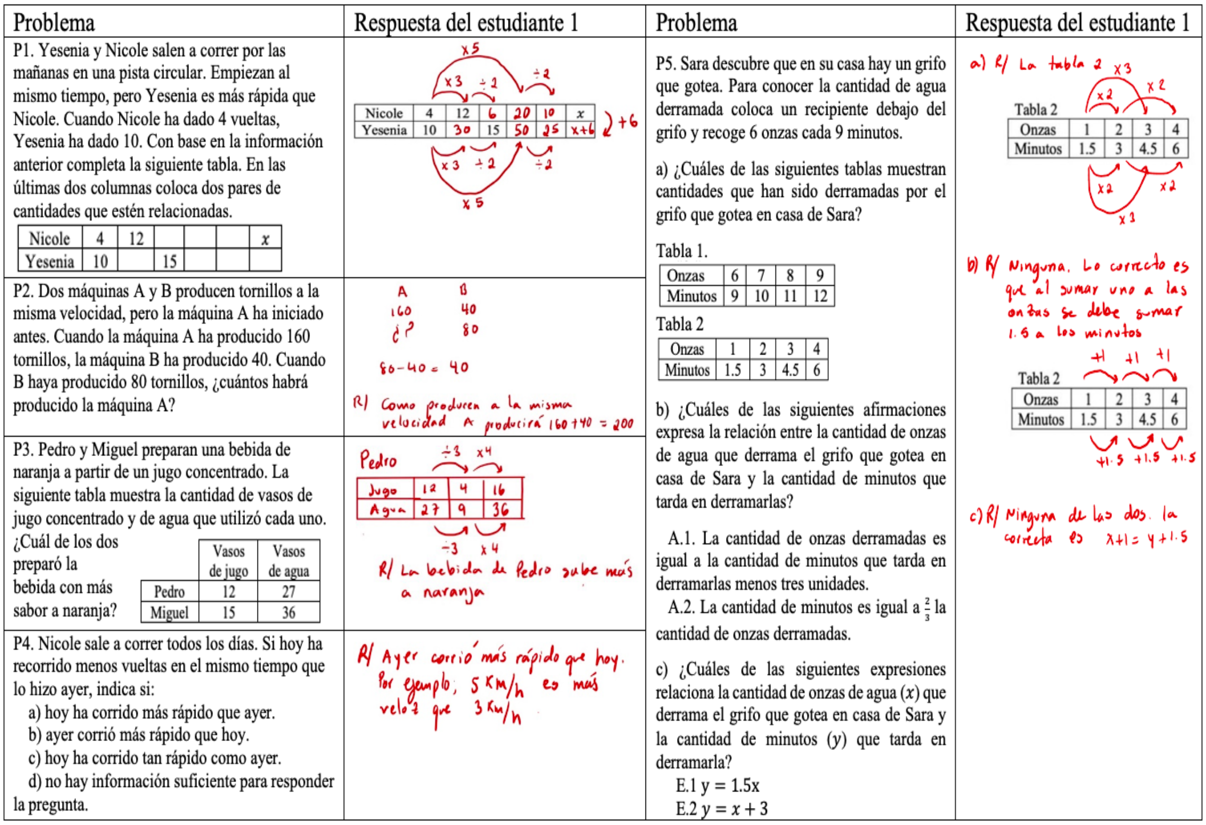

Figura 2. Los cinco problemas y las respuestas del estudiante 1.

Análisis

Los datos son las respuestas dadas por 14 EPPs a las tres cuestiones planteadas (Figura 1) organizados en siete grupos, cinco de dos integrantes (grupos 1, 2, 3, 4 y 5), uno de tres (grupo 6) y uno de un integrante (grupo 7). En una primera fase se elaboraron comentarios preanalíticos sobre las características del razonamiento proporcional identificadas por los participantes para cada estudiante en cada problema (cuestión 1), el vínculo entre la interpretación global realizada por los EPPs para cada estudiante (que debió tomar en cuenta las respuestas del estudiante a todos los problemas) y las características identificadas (cuestión 2) y la relación entre la interpretación global y las decisiones de enseñanza propuestas por los participantes para ayudar a los estudiantes a desarrollar el razonamiento proporcional (cuestión 3). Posteriormente, siguiendo un procedimiento inductivo, identificamos tres categorías que caracterizan rasgos de la competencia mirar profesionalmente el razonamiento proporcional de los EPPs. Estas consideran la capacidad de los EPPs de distinguir situaciones proporcionales de no proporcionales, las características de los problemas y de las respuestas incluidas en el instrumento, la interpretación realizada por los EPPs en función de las características (transiciones) del razonamiento proporcional y las decisiones de cómo continuar con la enseñanza a partir de la transición del razonamiento proporcional en la que se ubica el estudiante.

Resultados

La Tabla 2 describe las características de las categorías generadas y la clasificación de los siete grupos. En lo que sigue describimos diferencias en cómo los EPPs proponían acciones de enseñanza teniendo en cuenta cómo reconocían la comprensión del estudiante 1 usando protocolos desde los grupos 1, 3 y 6. Estos ejemplos intentan mostrar que la especificidad de las propuestas de acción en relación con la interpretación de los niveles de razonamiento proporcional depende de considerar globalmente las características de la comprensión del estudiante (grupo 3), de la comprensión de la idea de razón y proporción de los EPPs (grupo 1), y del reconocimiento global de las características del nivel de razonamiento del estudiante (grupo 6).

Tabla 2
Categorías y grupos

Categoría	Descripción	Grupo
1	Miran globalmente a los estudiantes como razonadores proporcionales enlazando las características de las respuestas y de los problemas y a partir de esto, en algunos casos proponen decisiones de acción coherentes con la comprensión del estudiante.	6
2	Consiguen mirar globalmente las respuestas de cada estudiante justificando la asignación de niveles y generando posibles transiciones. Sin embargo, sugieren acciones no específicas al razonamiento proporcional o no coherentes con la comprensión del estudiante.	2, 4, 5 y 7
3	Reconocen algunas características del razonamiento proporcional de los estudiantes, pero no logran mirar de forma global a los estudiantes como razonadores proporcionales. Describen propuestas de enseñanza de manera genérica y sin un foco específico con la comprensión del estudiante.	1, 3

Fuente: elaboración propia

Por ejemplo, el grupo 3 interpreta la comprensión del estudiante 1 para cada problema, pero tiene dificultades en considerar globalmente su comprensión por lo que no identifica la transición que deben apoyar generando una explicación ambigua. El grupo 3 indica en relación a la resolución del estudiante 1 al problema 1 "(el estudiante 1) *tiene nivel 3 porque logra comparar dos cantidades de manera multiplicativa y dividiendo y la transición que utiliza es 3 porque logra resolver problemas proporcionales algebraicamente*". Como consecuencia, realizan una propuesta de enseñanza genérica no vinculada a los rasgos específicos del nivel de razonamiento proporcional del estudiante: "Nosotros *le haríamos ver sus errores y le ayudaríamos a corregirlos con tareas y con trabajos grupales donde puedan dialogar juntos y llegar a dar una respuesta más clara y correcta"*

Por su parte, el grupo 1 no diferencia entre situaciones aditivas y proporcionales lo que le lleva a interpretar erróneamente las resoluciones de los estudiantes y cómo consecuencia sugieren propuesta de enseñanza usando un discurso retorico de los términos introducidos en el documento de teoría a veces sin sentido. Así, indican en relación al estudiante 1 "*ayudarle mediante la implementación de una tabla de valor perdido que represente una proporción, en la que podamos hacerle preguntas que lo impulsen a transicionar al pensamiento de estrategias constructivas y que así avance de las estrategias aditivas que utiliza a estrategias constructivas que le permitan construir más razones"*.

Por último, el grupo 6 propone una decisión de acción para el estudiante 1 coherente con las características del razonamiento proporcional que han inferido. En particular, sugiere "*pedirle que calcule valores muy grandes o decimales para que deje atrás la adición seguido de una serie de ejercicios donde deba hallar la razón de la proporcionalidad"* (para referirse a representar algebraicamente la razón funcional). El uso de números grandes o decimales y emplear la constante de proporcionalidad para ayudarle al estudiante a representar la relación funcional, son sugerencias para hacer conscientes a los estudiantes de la limitada eficiencia en algunos casos de usar procedimientos constructivos.

Conclusiones y discusión

Este estudio se ha centrado en generar indicadores de la competencia mirar profesionalmente el razonamiento proporcional. Esto para generar propuestas de enseñanza dirigidas a apoyar las transiciones en el razonamiento proporcional de los estudiantes de educación secundaria. Nuestros resultados señalan como un indicador de la competencia que los EPPs interpreten *de manera articulada* las características de los estudiantes como resolutores proporcionales. Es decir, ser capaz de justificar el nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes apoyándose en la forma en la que resuelven problemas con características diferentes. Ser capaz de mirar de manera articulada las respuestas de los estudiantes a diferentes tipos de problemas parece que está vinculada a ser capaces de proponer sugerencias de enseñanza especificas teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes. Este resultado complementa resultados de investigaciones previas centradas en la capacidad de los EPPs de decidir de manera coherente sobre la enseñanza teniendo en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes (Buforn et al., 2022; Hines et al., 2005). Sin embargo, nuestros resultados también indican que hay EPPs que aún tienen espacio para seguir desarrollando esta competencia.

Reconocimiento

La participación de À. Buforn y S. Llinares en este estudio forma parte del proyecto Referencia: PID2020-116514GB-I00, Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias y bibliografía

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A., & Brown, L. (2022): Preservice teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(2), 425-443.

Jacobs, V.R, Lamb. L.C, y Philip, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,41*(2), 169-202.

Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2011). Development of prospective mathematics teaches' professional noticing in a specific domain: Proportional reasoning. En B. Ubuz (ed.) *Proceeedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol2,* pp. 329-336. Ankara, Turkey: PME.

Glassmeyer, D., Amador, J., & Brakoniecki, A. (2021). Identifying and supporting teachers' robust understanding of proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 62*, 100873. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100873

Hines, E., & McMahon, M. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations for preservice teachers. *School Science and Mathematics, 105*(2), 88-105. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2005.tb18041.x

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teachers' professional practice. *Sisyphus, 1*(3), 76-93.

Llinares, S.; Ivars, P.; Buforn, A. & Groenwald, Cl. (2019). "Mirar Profesionalmente" las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo et al (eds.) *Investigaicón sobre el profesor de Matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp.177-192). Ediciones Universidad de Salamanca: España

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: children's cognitive and metacognitive processes. En T. Carpenter et al (eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research,* pp.131-156. LAE, Publishers; Hillsdale, NJ.

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I. & Zbiek, R. M. (2010). Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2002). Researching your own practice: The discipline of noticing. London: Routledge Falmer.