

Los errores frecuentes que cometen un grupo de estudiantes al utilizar y comprender el significado de las letras en álgebra. Universidad Nacional de Costa Rica.

Helen Rocío Bolaños- González
hellen.bolanos.gonzalez@una.cr
Universidad Nacional
Costa Rica

Resumen

Este trabajo tuvo como objetivo general caracterizar los errores algebraicos de acuerdo a los distintos usos y significados de las letras, haciendo un análisis de los errores al resolver ejercicios algebraicos, para ello se trabajó con una muestra de 38 estudiantes de diversas carreras. El presente estudio constituye una réplica de investigación desde la perspectiva metodológica. Como resultado del análisis se ha detectado que los errores más frecuentes en las respuestas de los ítems responden al uso de la letra como incógnita de valor específico, letra como número generalizado o en el manejo de la letra como variable. Este es un producto de investigación del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Palabras clave: Errores; dificultades; álgebra; estudiantes universitarios.

Abstract

This research had as general objective characterize the algebraic errors according to the different uses and meanings of letters by analyzing at the moment of solving algebraic exercises; for this, it was worked on a sample of 38 students from a variety of majors. The current research constitutes a replication of the research from the methodological perspective. As a result of this analysis it has been detected that the most frequent errors in the answers of the items respond to the use of the letters as unknown specific value, letter as generalized number, or in the use of the letter as variable. This is the product of the Masters in Didactics of the Mathematics from the Universidad of Granada.

Keywords: Errors; difficulties; algebra; university students.

Tema: Educación científica, matemática y tecnológica.

Principal área: Matemáticas

Bolaños-González, H. R. (2019). Los errores frecuentes que cometen un grupo de estudiantes al utilizar y comprender el significado de las letras en álgebra. Universidad Nacional de Costa Rica. En Y. Morales-López (Ed.), *Memorias del I Congreso Internacional de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional, Costa Rica, 2019* (e58, pp. 1-9). Heredia: Universidad Nacional. doi <http://dx.doi.org/10.15359/cicen.1.7>
ISBN: 978-9968-9661-6-0.

Introducción

El presente estudio se centra en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra a nivel universitario. Específicamente se realiza un análisis como un primer acercamiento en el abordaje del álgebra, tomando como base la aplicación del instrumento The Concepts in Secondary Mathematics and Science Project (CSMS), el cual fue diseñado por Küchemann para caracterizar la forma de interpretación de los símbolos literales en el tema de álgebra (Küchemann, 1980) y fue concretado y aplicado por García (2016).

El problema de investigación que abordaremos tiene como objetivo general caracterizar los errores algebraicos de acuerdo a los distintos usos y significados de las letras, haciendo un análisis de los errores al resolver ejercicios algebraicos.

De este, se desprenden los siguientes objetivos específicos, que guiaron el proceso investigativo.

1. Adaptar el cuestionario empleado por García (2016), a partir del diseño de Küchemann (1980), para que permita explorar y profundizar en los errores en los que incurren los estudiantes cuando se enfrentan a ejercicios algebraicos en el contexto costarricense.
2. Identificar, organizar y caracterizar los errores que presenta un grupo de estudiantes del curso Matemática General, según diferentes niveles de entendimiento en el manejo de las letras.
3. Analizar la dificultad de los ítems del cuestionario considerando los niveles de entendimiento en el manejo de las letras..

Como antecedente a este trabajo de investigación se cuenta con una tesis doctoral realizada en la Universidad de Granada, la cual tenía por objetivo estudiar, analizar y caracterizar los errores en los que incurren los estudiantes al resolver tareas (o ejercicios) algebraicas (García, 2016). Este trabajo se considera una réplica de dicha tesis doctoral, en el contexto de una universidad costarricense.

Marco teórico

El estudio del álgebra comprende un pensamiento algebraico que permite poder desarrollar un razonamiento en el ser humano necesario para desenvolverse en la matemática. En esta disciplina, el álgebra es una herramienta para la resolución de problemas y modelización de situaciones, desde plantear una ecuación hasta comprender funciones. Por lo cual es importante retomar el sentido propio de donde surge la necesidad de desarrollar dicho razonamiento en la educación formal.

El álgebra es un lenguaje para comunicar ideas de la matemática, expresar generalizaciones por medio de los símbolos, y además es una herramienta para resolver problemas y diseñar modelos matemáticos (Serres, 2011).

Vergel (2015) define el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar matemáticamente; desde las consideraciones filosóficas se considera el pensamiento algebraico como un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente.



De acuerdo con Godino y Font (2003), el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades donde el uso de símbolos y expresiones literales permite progresar en un uso adecuado del lenguaje y el simbolismo necesario para comunicar el pensamiento algebraico.

Aunado a lo anterior Ursini y Trigueros (2006), agregan que se debe ayudar al estudiante a desarrollar el pensamiento algebraico, pero hay que darles oportunidades para reflexionar en los distintos tipos de problemas, de manera que se logre profundizar en la comprensión de las variables hasta llegar a utilizarlas de manera autónoma.

Küchemann (1980) identifica seis formas de interpretar los símbolos literales. La letra evaluada, se entiende como la letra se le asigna un valor numérico. La letra ignorada, es la letra no utilizada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado. La letra como objeto, se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí. La letra como incógnita específica, representando un número particular pero desconocido y los estudiantes son capaces de operar directamente sobre ella. La letra como número generalizado, la letra puede asumir distintos valores. Finalmente, la letra como variable, representa un rango de valores no especificados, mediante una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

En este estudio, Küchemann (op. cit.) logra identificar estos usos de letras y los caracteriza en cuatro niveles de entendimiento de los estudiantes en relación con el significado y uso de las mismas.

- Nivel 1: En el primer nivel se resuelven ejercicios numéricos o que tiene una estructura algebraica simple, por ejemplo sustituciones numéricas directas en expresiones algebraicas en donde las letras no tiene coeficiente, multiplicación de datos numéricos, simplificación de términos semejantes que involucran una sola letra como incógnita. Los estudiantes en este nivel deben ser capaces de resolver el ítem mediante el uso de letra como objeto o sin hacer uso de la letra.
- Nivel 2: Este nivel es muy similar al anterior la diferencia es que son ejercicios un poco más complejos, con una estructura aritmética mayor. En este nivel existe una mayor disposición para aceptar respuestas incompletas o ambiguas. Los estudiantes podrían resolver los ejercicios mediante el uso de las letras como letra evaluada, letra como objeto y letra ignorada.
- Nivel 3: En este nivel los ejercicios presentan una estructura algebraica simple. El estudiante debe ser capaz de resolver ejercicios mediante la interpretación de las letras como incógnitas de valor específico, números generalizados y variables.
- Nivel 4: Los ejercicios de este nivel son más abstractos y tienen una estructura compleja. Los estudiantes requieren como mínimo que las letras sean consideradas como incógnitas específicas, pero donde hay una tendencia a tratar las letras como objetos. El estudiante debe ser capaz de distinguir que las letras no son etiquetas de las características propias de los objetos y argumentar que la expresión formulada puede representar distintos valores. Además, debe poder expresar y justificar la respuesta de manera generalizada y no limitarse a la evaluación de sólo algunos valores numéricos que satisfagan la expresión.



Para el logro de los objetivos de la presente investigación, nos dirigimos al trabajo de García (2016) quien basado en el trabajo de Küchemann (1980) aplica un cuestionario que nos permite valorar el uso y significado de las letras en álgebra. Para ello se consideró lo mencionado por Booth (1984), respecto a las interpretaciones de las letras como fuentes de error: letra evaluada, letra ignorada, letra como objeto, letra como incógnita específica, letra como número generalizado y letra como variable.

Mulhern (1989) menciona algunos aspectos y características comunes de los errores en los que se debe reflexionar, con el propósito de trabajar con el error como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje. Esto se aborda desde dos visiones, en primera instancia la del docente, este no siempre se espera determinados errores, por lo que algunas veces pasan desapercibidos. Por otro lado, desde la visión del alumno, en muchas ocasiones este desarrolla cierta resistencia al dejar de cometer el error: es decir, la corrección de los errores implica en ocasiones corregir un conocimiento aprendido erróneamente. Los errores pueden generarse por una comprensión equivocada, que el estudiante considera correcto o errores al azar, estos reflejan falta de cuidado y además cuando algo no es significativo para el estudiante, carece de sentido para él y se evidencia en los errores que presenta.

Socas (1997) menciona que los errores en el aprendizaje de las matemáticas tienen origen en tres ejes; en su obstáculo, en una ausencia de significado y en actitudes afectivas y emocionales. Asimismo señala, que algunos errores son producto de la experiencia previa y del desarrollo interno de esas experiencias del estudiante.

Según Rach, Ufer y Heinze (2013), los errores pueden considerarse como oportunidades de aprendizaje, aunque no está claro qué aspectos de la instrucción matemática son relevantes para convertir esto en algo beneficioso, pero si resalta este como un factor importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje que los docentes deben considerar en el planeamiento de la clase.

Lo descrito anteriormente, nos permite fundamentar el trabajo de investigación y orientar el análisis de los resultados.

Metodología

El presente trabajo de investigación es una réplica, esta práctica investigativa se concibe cómo:

Un mecanismo de verificación de experiencias empíricas y de exploración de conocimiento nuevo para enriquecer los abordajes de una problemática particular. Así, la realización de réplicas no es solo un proceso de sustitución a partir de un examen conceptual y metodológico que adapta o reorganiza diseños originales a un contexto particular, sino que también un espacio de aprendizaje y formación científica para anclar al estudiante al proceso investigativo. (Ordoñez, 2014, p. 10)

El presente estudio constituye una réplica de investigación desde la perspectiva metodológica. El trabajo de García (2016) nos permite realizar dicho estudio en el contexto costarricense, llevando a cabo la aplicación del instrumento propuesto originalmente por



Küchemann (1980) y aplicado por García para la categorización de los distintos usos de las letras.

La investigación se abordó desde el enfoque cuantitativo, lo cual permite recoger los datos a partir del instrumento de evaluación para conocer el rendimiento algebraico en un grupo de estudiantes universitarios con el propósito de detectar el tipo de error que se comete al poner en evidencia el conocimiento algebraico que estos estudiantes poseen.

El estudio será de naturaleza diagnóstico-descriptivo y se ubica en la línea de análisis de errores, en tanto se pretendió analizar y categorizar los errores cometidos por los alumnos que cursan la asignatura de MAT001 Matemática General, al resolver ejercicios correspondientes a contenidos matemáticos abordados en el ciclo diversificado de secundaria en el programa de educación costarricense.

Muestra

La selección de la muestra es a conveniencia del investigador, ya que este trabaja en dicha institución e impartía en ese momento el curso. Se trabajó con 38 estudiantes que cursan varias carreras como Licenciatura en Economía, Licenciatura en Administración, Ingeniería en Agronomía, Biología, Diplomado en Ciencias Geográficas, Diplomado en Cartografía Digital, Comercio y Negocios Internacionales e Ingeniería en Gestión Ambiental de la Universidad Nacional de Costa Rica, durante el año académico 2018, mientras cursaba Matemática General el cual es un curso de primer nivel de dichas carreras.

Instrumento

El instrumento utilizado es tomado del proyecto *The Concepts in Secondary Mathematics and Science Project (CSMS)*, que se basa en la categorización de los distintos usos de las letras propuestos por Küchemann (1980).

Fue diseñado por Küchemann, Brown y Blaskley (Küchemann, 1980, p.16), el cual está conformado por 22 ejercicios y 53 ítems que tratan contenidos algebraicos como: sustitución formal, simplificación, generalización y formulación, interpretación y solución de ecuaciones.

Análisis

La información recolectada en el instrumento se codificó y se organizó de manera sistemática en una base de datos en Excel; para resaltar algunos criterios de interés se utilizaron fórmulas condicionales para contabilizar algunos ítems de acuerdo a las variables del estudio.

Los resultados principales de dicha investigación se describen a partir de las dificultades de los ítems, agrupado por los niveles de entendimiento. La dificultad es medida según el porcentaje de aciertos y errores. Además, se analiza el rendimiento de los estudiantes por el nivel de entendimiento.

Los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario se analizan de acuerdo con los niveles de entendimiento propuestos por Küchemann y considerados por García (2016).



Tabla 1
Cantidad de estudiantes por nivel de entendimiento.

	Estudiantes	
	Cantidad	Porcentaje
Nivel I	6	15,79
Nivel II	11	28,95
Nivel III	20	52,63
Nivel IV	1	2,63
Total	38	100,00

Se puede evidenciar que los estudiantes participantes, en su mayoría se ubican en el III nivel de entendimiento. Es importante aclarar que los temas que se abordaron en el instrumento eran conocimiento de secundaria, lo cual podría suponer que la población participante debería lograr resolver los ítems planteados en el instrumento sin ningún problema. Sin embargo, solo el 2.63% logran ubicarse en el nivel más alto de entendimiento. Esto quiere decir que solo 1 estudiante demuestra un adecuado dominio en la comprensión y manejo del uso y significado de las letras.

En la revisión de ítems se han evidenciado errores en ejercicios donde se presentan letras distintas en la expresión, lo que evidencia un mal manejo de las letras algebraicas por parte del estudiante. En general el estudiante no logra justificar o expresar de manera generalizada su respuesta y esto ha representado una dificultad significativa para la población participante.

Los ítems del instrumento aplicado que presentaron mayor dificultad para los estudiantes corresponden a los ejercicios de los niveles de entendimiento más altos. Estos son los que están relacionados con el manejo de las letras como números generalizados y como variable, donde requiere como mínimo tratar las letras como objeto.

En el siguiente ejemplo se muestra el ítem de mayor porcentaje de errores, lo cual indica que la mayoría de la población participante no fue capaz de resolver correctamente dicho ejercicio. En los instrumentos recolectados se muestran varios intentos de resolver la ecuación cometiendo errores algebraicos, como el que se muestra en la figura 1. En este caso se aplica incorrectamente la fórmula del cubo de una suma.



21.

Si esta ecuación \rightarrow $(x + 1)^3 + x = 349$
 es verdadera cuando $x = 6$,

Entonces

¿Qué valor de x

hará esta ecuación \rightarrow $(5x + 1)^3 + 5x = 349$
 verdadera?

$x = \frac{87}{20} \dots$

$75x + 1 + 5x = 349$
 $80x + 1 = 349 \rightarrow x = \frac{348}{80}$
 $x = \frac{87}{20}$

Figura 1. Ejemplo de error por uso de la letra como incógnita de valor desconocido

Circunstancias similares se encontraron en el estudio realizado por García (2016); este ítem obtiene un 4.1% de respuestas correctas, lo que equivale 8 aciertos.

En el presente estudio este ítem obtiene el número más alto de respuestas en blanco, Esto puede significar que en general el estudiante no tiene el conocimiento suficiente para realizar operaciones algebraicas ni para trabajar con números racionales, ni sabe cómo aplicar las reglas algebraicas lo que le dificulta mucho resolver este tipo de ecuaciones.

Otro ejemplo de error frecuente, es el ítem 3 este evalúa las competencias en el manejo de las letras como números generalizados, en donde se ha obtenido un 78.95% de respuestas incorrectas. La mayoría de estudiantes logran indicar que la expresión que representa el más grande es $2n$; sin embargo, no es capaz de justificar apropiadamente su respuesta, tal y como muestra la figura 2.

3. ¿Cuál es el más grande $2n$ o $n + 2$? ...2.7...

Explique: ...Más... grande... la... multiplicación.....

Figura 2. Ejemplo de error por uso de la letra como objeto

El estudiante tiende a analizar mentalmente sin razonar si el procedimiento o el resultado son correctos, propiciando el error.

Al analizar los 38 instrumentos aplicados a los estudiantes con 53 ítems, se obtiene que el ítem de mayor número de aciertos obtuvo un 100% de respuestas correctas, mientras que el ítem de menor número de aciertos fue de 10.53% lo que equivale a 4 respuestas correctas. Además, el promedio de respuestas correcta por ítem fue de 25 aciertos.

Conclusiones

Como resultado de la aplicación del instrumento se identificó una mayor dificultad en los ítems que se relacionan con el manejo de rango de valores para hacer válidas las ecuaciones algebraicas, generalizaciones de resultados, planteamiento de ecuaciones a partir de la contextualización de problemas, en la manipulación de rango de valores desconocidos, análisis de relación entre cantidades, así como en el manejo de operaciones con estructuras algebraicas abstractas.

Los errores más frecuentes encontrados en las respuestas de los ítems dadas por los estudiantes responden al uso de la letra como incógnita de valor específico, letra como número generalizado o en el manejo de la letra como variable. Estos usos requieren un mayor nivel cognitivo y este resultado también ha sido evidente en la investigación de García (2016).

A continuación se describen algunas de las situaciones que han conllevado al error algebraico, a partir del análisis de las respuestas del cuestionario aplicado a los estudiantes.

Se refleja un notable desempeño en una matemática memorística, mediante la cual se recuerdan fórmulas, pero se tiene visibles dificultades para aplicarlas. Esto se ha presentado, por ejemplo, en los ítems donde se pide calcular el área o el perímetro donde el estudiante no logra identificar correctamente datos necesarios para aplicar determinadas fórmulas.

Por otro lado, cuando el estudiante se enfrenta a ejercicios matemáticos recurre a los conocimientos aritméticos que sí domina, pero no logra expresar en términos algebraicos lo que se le pide en el ejercicio. También se evidencia con frecuencia que el estudiante aplica operaciones aritméticas incorrectas o da respuestas incompletas.

Además, se ha comprobado que el estudiante no es capaz de reflexionar su respuesta, evidenciando carencia de habilidades propias del pensamiento matemático. Esto se deriva del análisis de los ítems donde el estudiante comete errores por descuido o simplemente no es capaz de sacar conclusiones a partir de las hipótesis.

Finalmente se concluye que la falta de comprensión de lectura en los enunciados conlleva a determinados errores. Se observó que el estudiante tiende a relacionar los enunciados de los problemas con las letras iniciales de los objetos, pero el uso de las letras como etiqueta suele conducir a errores debido a una mala interpretación algebraica de la situación dada.

Referencias

- García, J. (2016) *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalized arithmetic (algebra) by secondary school children*. Doctoral dissertation, Chelsea College, University of London.
- Mulhern, G. (1989). Between the ears: making inferences about internal processes. En B. Greer y G. Mulhern (Eds.) *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.
- Ordoñez, O. (2014). Replicar para comprender: prácticas investigativas para promover el razonamiento científico en estudiantes de psicología. *Pensamiento Psicológico*, 12(2), 7-24.



- Rach, S., Ufer, S., & Heinze, A. (2013). Learning from errors: effects of teachers training on students' attitudes towards and their individual use of errors.
- Serres Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 12(1), 122-142.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En: L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38.
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional.

