

Competencias sobre modelización matemática que muestran un grupo de docentes en formación al resolver problemas

Mathematical modelling skills shown by a group of teachers in training when solving problems

Adriana Barquero-Ocampo¹, adriana.barquero.ocampo@est.una.ac.cr,
<https://orcid.org/0009-0005-2307-5077>

David Chaves-Montero¹, david.chaves.montero@est.una.ac.cr, <https://orcid.org/0009-0001-0303-3081>

Jesennia Chavarría-Vásquez¹, jesennia.chavarria.vasquez@una.ac.cr,
<https://orcid.org/0000-0002-6112-1231>

Ronny Gamboa-Araya^{1*}, ronny.gamboa.araya@una.ac.cr, <https://orcid.org/0000-0002-9531-0372>

Resumen

[Objetivo] El objetivo de la investigación fue determinar las competencias que muestra un grupo de docentes en formación en Enseñanza de la Matemática, de cuarto año de carrera en la Universidad Nacional, en modelización matemática. **[Metodología]** Para ello se realizó una investigación con un enfoque cualitativo con 20 docentes de matemática en formación, durante el I ciclo 2022, en donde, como parte de un programa de formación en modelización matemática, debieron resolver una serie de problemas. Se muestra lo realizado por las personas participantes para dos problemas específicos. **[Resultados]** El profesorado en formación participante mostró competencias para resolver problemas de modelización matemática si la situación problema posee los datos necesarios y si su solución requiere de un procedimiento específico. En situaciones problema que implican investigar información, datos, realizar supuestos, entre otros, que podría implicar distintas soluciones, las personas participantes presentaron dificultades para su abordaje. **[Conclusiones]** Las personas participantes muestran capacidad para manejar y dar sentido a datos relevantes para la resolución de un problema de modelización matemática. Sin embargo, si deben investigar sobre estos, no logran identificar aquellos que deben ser incluidos en el proceso de resolución. Su capacidad para la búsqueda de información, vincular un modelo matemático con otra situación problema o modelo conocido o validar la solución obtenida a un problema, fue limitada. Los resultados obtenidos podrían ser un indicador que este tipo de actividades deben ser reforzadas en el proceso de formación docente para su uso como una estrategia didáctica en su ejercicio profesional.

Palabra clave: formación docente; matemática; modelización; competencias; resolución de problemas.

Abstract

[Objective] The objective of the research was to determine the competencies demonstrated by a group of pre-service teachers in Mathematics Teaching, in their fourth year of studies at Universidad Nacional, in mathematical modeling. **[Methodology]** For this purpose, a qualitative research was conducted with 20 pre-service mathematics teachers during the first half of 2022, where, as part of a training program in mathematical modeling, they were required to solve a series of problems. The work done by the participants on two specific problems is presented. **[Results]** The participating pre-service teachers demonstrated competencies in solving mathematical modeling problems when the situation presented has the necessary data and if its solution requires a specific procedure. In problem

* Autor para correspondencia

¹ Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica
ESTE DOCUMENTO ES UN PREPRINT (no revisado por pares).

situations that involved researching information, data, making assumptions, among other aspects, which could imply different solutions, the participants showed difficulties in solving them. [Conclusions] The participants demonstrated the ability to handle and make sense of relevant data for solving a mathematical modeling problem. However, when they needed to research data, they were unable to identify which data should be included in the problem-solving process. Their ability to search for information, connect a mathematical model with another problem situation or known model, or validate the solution obtained to a problem, was limited. The results obtained could indicate that these types of activities needed to be reinforced in the teacher training programs for their use as a teaching strategy in their professional practice.

Keywords: teacher training; mathematics; modelling; competencies; problem solving.

Introducción

En el año 2012, con la puesta en ejecución de los Programas de Estudio de Matemática, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) pretendió dar un nuevo enfoque a la enseñanza de la matemática. El currículo tenía como “objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de mayores capacidades cognitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de mayores habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza” (MEP, 2012, p. 13).

Esto implica, de acuerdo con el MEP (2012), que el profesorado debe ser un promotor de experiencias de aprendizaje de calidad, donde el planteamiento y la resolución de problemas se considera una de las principales estrategias para el desarrollo de las capacidades pretendidas. Así, se prioriza en el “trabajo con problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales, o que puedan ser imaginados de esa manera” (MEP, 2012, p. 13). Además, se indica que “Al colocarse en contextos reales, el planteo y resolución de problemas conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos” (MEP, 2012, p. 13).

Para el logro de lo indicado anteriormente, se considera que “La identificación, uso y construcción de modelos matemáticos es parte sustancial del enfoque que se propone trabajar con problemas en contextos reales. Los modelos emergen siempre que se deba acudir a la realidad” (MEP, 2012, p. 31). Así, se pretende que con la resolución problemas y la modelización matemática se desarrollen en el estudiantado capacidades para desempeñarse con éxito ante una situación problema, lo que implica saber analizar y determinar las estrategias y métodos más acordes para su abordaje; así como su pertinencia y posible adecuación con base en los resultados obtenidos (MEP, 2012).

Como puede observarse, se planteaba, desde la génesis de los Programas de Estudio Matemática, todo un reto para el profesorado de la disciplina, que implicaba desarrollar habilidades en el planteamiento de problemas y el uso de la modelización matemática como estrategia de enseñanza.

Sin embargo, de acuerdo con Programa Estado de la Nación [PEM] (2019) existen diferencias entre lo descrito en los Programas de Estudio de Matemática y la realidad, pues al analizar las prácticas de una parte del profesorado de matemáticas se determinó, entre otros aspectos, que

a) La metodología de las lecciones de matemática no se basan en lo estipulado en los Programas de Estudio de Matemática, pues hay un predominio de las clases magistrales con poca participación del estudiantado y uso de la tecnología como un recurso didáctico.

- b) El papel de estudiantado es pasivo; en muchos casos se limita a “recibir” los contenidos, prestar atención, resolver ejercicios matemáticos, trabajar individualmente, tomar apuntes o copiar información de la pizarra.
- c) Las actividades que propone el profesorado al estudiantado no propician la participación de este en el proceso de enseñanza y aprendizaje; además, estas no incentivan el desarrollo de habilidades superiores.
- d) La mayoría de las actividades de clases no fomentan los procesos matemáticos descritos en los Programas de Estudio de Matemática, y no contemplan la resolución de problemas como estrategia metodológica.

Incluso, se señala que “Los profesores observados, independientemente de su grado de conocimiento del programa, no realizan actividades de resolución de problemas: solo un 1,3 % del tiempo se emplea en ese tipo de ejercicios” (PEN, 2019, p. 58).

Lo anterior es una evidencia de que muchas personas docentes, en el ambiente áulico, no trabajan de una manera adecuada la resolución de problemas y los pasos necesarios para crear un modelo matemático presentados en el Programa de Estudios de Matemática del MEP. Aunado a lo anterior, surge una interrogante relacionada con el profesorado y que plantea si este tendrá las competencias necesarias para desarrollar las habilidades del estudiantado en estas áreas.

Con base en los resultados anteriores, y dado que el MEP (2012) incluye la modelización matemática como una estrategia para la resolución de problemas, se podría pensar que esta tampoco está siendo incorporada en las actividades de aula. Lo anterior se ve reforzado en lo indicado por Vega y Ramírez (2022) quienes, al trabajar con docentes de matemática en servicio, señalaron que, aunque se manejan aspectos teóricos de la modelización matemática y se reconoce su importancia como estrategia didáctica, las personas no cuentan con habilidades para la resolución de problemas donde se haga uso de la modelización matemática para el planteamiento de actividades de mediación relacionadas.

La situación descrita coincide con lo expresado por Salett y Hein (2004), quienes apuntan que en la enseñanza de la matemática no es común proponer al estudiantado situaciones problema, lo que evidencia que, aunque se reconozca la importancia de resolución de problemas como estrategia metodológica, existen dificultades para su aplicación.

Rosa et al. (2014) indican que muchos de los países latinoamericanos incorporaron en su currículo de primaria y secundaria, y en el programa de estudios del profesorado en formación, el tema de modelización matemática, ya que diferentes organismos internacionales exigen el desarrollo de ciertas competencias matemáticas en el estudiantado. Por ejemplo, “PISA plantea seis niveles de competencia matemática y es, en los últimos tres, donde se incluye la modelación explícitamente” (Rosa et al., 2014, p. 1138).

En esta prueba, además, se evalúa “un porcentaje creciente de problemas y situaciones encontrados en la vida diaria, incluidos los contextos profesionales; requieren un cierto grado de comprensión de las matemáticas, razonamiento y herramientas matemáticas para poder entenderlos y abordarlos en su totalidad” (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE], 2017, p. 63).

En el informe de la OCDE (2019) se indica que Costa Rica se encuentra por debajo del promedio establecido en cuanto a las pruebas PISA, donde aproximadamente el 40,0 % del estudiantado obtuvo el nivel 2 o superior en matemática, pero el promedio de los países de la OCDE en este nivel corresponde al 76,0 %. Es decir, en Costa Rica el estudiantado

logró resolver en su mayoría situaciones simples. Esto puede ameritar un reforzamiento de las competencias acerca de resolución de problemas y la modelización matemática.

Además, en este contexto, para que los procesos de modelización se lleven a cabo adecuadamente y que el estudiantado comprenda el concepto y su uso, es necesario que el profesorado de matemática, desde su proceso de formación, desarrolle las capacidades y conocimientos necesarios en modelización matemática, con el fin de aplicarlos en el futuro ambiente áulico. En particular, que domine los procesos de modelización matemática y que reflexione con el estudiantado sobre la importancia de estos en la vida cotidiana.

Sin embargo, se dice que una parte del profesorado de matemática no está capacitado para tratar con problemas matemáticos en contextos reales, además de desconocer ejemplos sobre cuáles de estos problemas son los adecuados para aplicarlos con sus discentes, con lo cual se ve la necesidad de una formación complementaria sobre modelización matemática (Borromeo, 2018).

Un factor que contribuye a la situación descrita anteriormente es la poca experiencia que como profesional, o en su proceso de formación, ha tenido el profesorado con respecto a la resolución de problemas y el uso de la modelización matemática. Sobre este punto en particular, Salett y Hein (2004) indican que el principal problema está en la formación del profesorado, pues en este proceso rara vez se da una orientación sobre la modelización matemática y cómo utilizar este procedimiento en la enseñanza formal. “Para los alumnos que tuvieron una vivencia de enseñanza en los moldes tradicionales, la resistencia a la modelación es significativa, ya que este método requiere más empeño en los estudios, la investigación y la interpretación del contexto” (Salett y Hein, 2004, p. 122).

Por ello, se debe volver la mirada hacia la formación del profesorado. En particular, porque la utilización de la modelización matemática en la formación inicial de este ayuda al desarrollo tanto del pensamiento como a la actuación de la persona docente, aparte de la ampliación de los conocimientos didácticos (Mora-Zuluaga y Ortiz-Buitrago, 2015). De esta forma, el profesorado de matemática en formación, una vez que haya concluido sus estudios, contará con las herramientas necesarias para aplicar sus conocimientos y competencias en esta área con sus estudiantes. Por ello, surge la necesidad de indagar si las personas docentes en formación cuentan con los recursos mencionados anteriormente.

En este artículo se reportan los resultados de una investigación realizada para determinar las competencias que muestra el profesorado en formación en Enseñanza de la Matemática, de cuarto año de carrera en la Universidad Nacional (UNA), Costa Rica, en cuanto a modelización matemática. Esto debido a que, en los años previos de estudio, estas y estos profesores en formación han ido desarrollando ciertos conocimientos y competencias relacionadas con esta área. Por ejemplo, el Plan de Estudios Carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM), UNA (2017), contempla entre las competencias matemáticas que desea desarrollar en el futuro profesional, las siguientes: “M2. Ser capaz de formular problemas en lenguaje matemático durante su actividad como estudiante para fortalecer sus estructuras de pensamiento” (UNA, 2017, p. 62), “M4. Construir e interpretar modelos matemáticos a partir de situaciones reales para reconocer la importancia de la matemática en la vida cotidiana” (UNA, 2017, p. 62) y “M5. Aplicar los conocimientos sobre Resolución de Problemas en contextos multidisciplinares para mayor comprensión de su importancia en otras áreas científicas y sociales” (UNA, 2017, p. 62). Esta competencias se contemplan en áreas disciplinares tales como álgebra, análisis, geometría,

teoría de números, métodos numéricos, probabilidad y estadística. Inclusive, a nivel pedagógico, en cursos de currículum, evaluación y didáctica, así como en investigación.

La resolución de problemas de modelización por parte de un grupo de docentes se realizó en el marco de una investigación donde primero se obtuvo información sobre los conceptos y características de modelización matemática que tenían el profesorado en formación. Luego se desarrolló un módulo de formación acerca de modelización matemática que consistió en comprender la variedad de significados y procedimientos que el profesorado en formación presentó al momento de elaborar sus propias tareas, resolver e interpretar problemas, analizar los procesos de modelización y entenderlos como cíclicos, entre otros aspectos.

La necesidad de que el estudiantado de secundaria cuente con conocimientos sólidos en modelización matemática que les permita enfrentar situaciones problema de la vida real a través de la creación de modelos matemáticos, se traduce en una necesidad de formación por parte del profesorado en esta área, por lo que los resultados pretenden generar una reflexión en torno a la formación que están recibiendo la futuras personas docentes de matemática en relación con los procesos de modelización matemática.

Marco teórico

En este apartado se va a contextualizar la modelización matemática. Partiendo primeramente del concepto de lo que es un modelo matemático se va a definir lo que es modelización matemática, el proceso que se lleva a cabo, las competencias de modelización matemática, y las ventajas y obstáculos que puede presentar el llevar a cabo la modelización matemática por parte del profesorado.

Modelización matemática

Antes de abordar la definición de modelización matemática, es importante abordar un concepto relacionado con esta, el de modelo matemático. “Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión” (Salett y Hein, 2004, p. 106). Por su parte, Blomhøj (2008) lo define como “una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática” (p. 21).

Con base en las definiciones anteriores, y de manera general, podemos decir que un modelo matemático es una representación matemática de un fenómeno real, que describe y analiza las relaciones presentes en él, a partir de las características del contexto en el que se presenta, con el propósito de resolver un problema asociado a este, o bien, predecir posibles soluciones.

Como se señaló, aunado al concepto de modelo matemático, existe otro concepto que se ha desarrollado desde la década de los noventa. Este hace alusión a la modelización matemática. En este sentido, se indica que el proceso mediante el cual se construyen modelos matemáticos se ha denominado modelización matemática (Ríos, 1995; Swets y Hartzler, 1991; Villa-Ochoa, 2007).

La modelización matemática pretende resolver situaciones problemas reales, donde algunos admiten varias soluciones, haciendo uso de herramientas matemáticas y según el contexto y condiciones dadas (Ortiz et al., 2010; Ramos-Rodríguez et al., 2014).

Aunque existen varias definiciones para la modelización matemática, la mayoría de estas se relacionan entre sí, pues implican la traducción de problemas o situaciones de contextos reales a un lenguaje matemático, que ayude a explicar o representar de cierta forma el fenómeno en cuestión.

El proceso de modelización matemática corresponde a todo el camino que se debe recorrer, de forma implícita o explícita, para establecer una relación entre un concepto matemático y el contexto real, con el fin de plantear posteriormente el modelo matemático, tomando en cuenta que el proceso se va a efectuar de manera cíclica, realizando las reflexiones y análisis necesarios; de esta forma es posible ejecutar cambios en el modelo, si fueran requeridos (Blomhøj 2008).

A lo largo de los años se han definido distintos procesos de modelización matemática. Estos procesos, como indica Borromeo (2006), son diferentes, y dependen de varias direcciones y las aproximaciones acerca de cómo la modelización es entendida.

La construcción de un modelo implica comprender y analizar la situación dada, según el contexto real, y expresar matemáticamente las relaciones que se observan en él. Según Blum (2015) esto implica un proceso de comprensión del fenómeno, su simplificación o estructuración, matematizar las relaciones entre las variables o cantidades, trabajo matemático con base en conocimientos disciplinares, la interpretación, validación y presentación de los resultados y el análisis de posibles conexiones con otras situaciones o modelos. Este proceso, llamado ciclo de modelización, Blum (2015) lo resume en siete pasos en la siguiente figura (Figura 1).

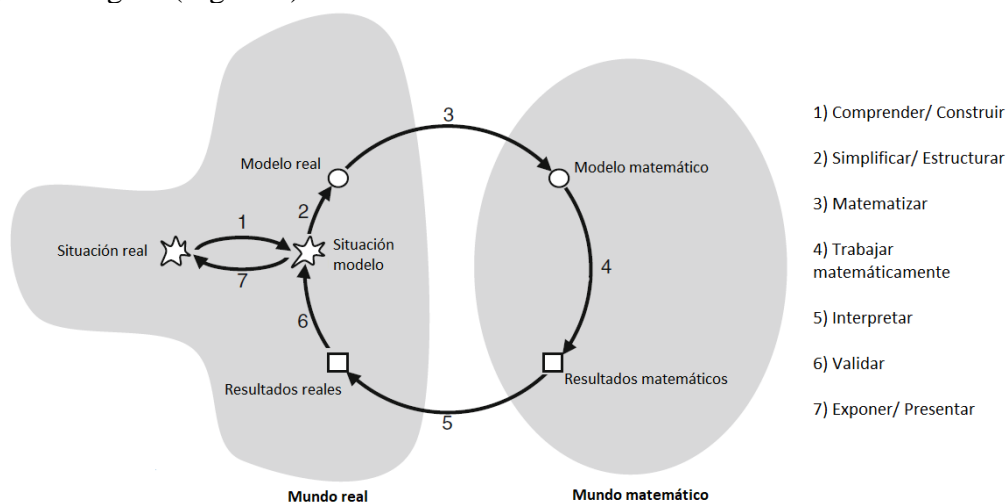


Figura 1. *Siete pasos del ciclo de modelización según Blum (2015).*
Fuente: Blum (2015).

Aymerich y Albarracín (2016) indican que “en este modelo se puede observar la diferenciación entre el dominio matemático y el dominio real, distinguiendo entre los modelos situados en la realidad de la abstracción que se elabora al pasar al dominio matemático” (p. 9). Es decir, la modelización matemática va más allá de únicamente hallar la respuesta a un determinado problema. Se deben ejecutar distintos procesos para obtener una solución adecuada; además, hacer un análisis reflexivo en cada uno de ellos.

Blomhøj (2008) establece que “existe un proceso de modelización detrás de todo modelo matemático” (p. 23), donde se debe determinar, a partir de una idea matemática con una situación real, la utilización de un modelo matemático necesario para la resolución del

problema. Para esto Blomhøj (2008) establece una serie de pasos que se deben llevar a cabo: a) formulación del problema; b) sistematización de la información del problema; c) traducción de los objetos del problema y sus relaciones al lenguaje matemático; d) uso de métodos matemáticos para la obtención de resultados y conclusiones; e) interpretación de los resultados y conclusiones considerando el contexto y las condiciones del problema inicial; f) evaluación de la validez del modelo.

Por lo tanto, la creación de un modelo matemático, a través de la modelización matemática, implica un proceso de traducción de la realidad para establecer relaciones entre las distintas partes u objetos de esta para que, por medio de conocimientos y procedimientos matemáticos, se logre una mejor comprensión de dicha situación o se solucionen problemas asociados a ella.

Desarrollo de competencias en modelización matemática y obstáculos o dificultades que pueden presentarse en dicho proceso

Niss y Blum (2007) definen competencia en modelización matemática como la capacidad o habilidad para identificar las preguntas, las variables, las relaciones o los supuestos relevantes en una situación dada del mundo real, traducirlas en términos matemáticos e interpretar y validar la solución resultante al problema. Además, los autores incluyen como parte de esta competencia la capacidad de analizar o comparar modelos dados investigando las suposiciones realizadas, verificando las propiedades y el alcance de un modelo dado, entre otros aspectos.

Por su parte, Kaiser y Brand (2015) definen la competencia en modelización matemática como el poder de analizar fundamentos y propiedades de modelos existentes, y poder evaluar tanto su alcance como su validez. Donde, por medio de modelos matemáticos existentes, se puede decodificar e interpretar elementos de una determinada situación real a modelar.

Para desarrollar conocimientos y competencias relacionadas con la modelización matemática, es importante que el profesorado en formación inicial, y los ya graduados, continúen mejorando y reflexionando sobre estos procesos. Es así como Zaldívar et al. (2017) indican que “es necesario un trabajo de reflexión sobre la práctica que permita al docente valorar los beneficios de la modelación, reconocer las dificultades de su implementación y modificar sus concepciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas” (p. 89).

Por ello va a existir una necesidad, en la formación del profesorado, de incorporar herramientas para integrar el conocimiento matemático del estudiantado con la realidad y contexto, así como para el desarrollo de competencias sobre la resolución de problemas, el razonamiento matemático y toma de decisiones (Mata y Gallard, 2020). Para lo anterior, además, se debe considerar que existen diferentes estrategias de enseñanza, las cuales dependen del concepto y visión que se desarrolle en la formación inicial (Mora y Ortiz, 2012).

Sin embargo, al desarrollar en los planes de formación docente el tema de modelización, van a existir tanto ventajas como obstáculos. Dentro de las ventajas que van a obtener el futuro profesorado están la “profundización de conocimientos matemáticos, visibilizar su utilidad para la sociedad y para otras ciencias, en la cotidianidad de las personas y en la solución de algunos problemas” (Marín et al., 2015, p. 6). Entre los obstáculos que se pueden presentar, Marín et al. (2015) establecen el desafío causado por las creencias y

concepciones que tiene el profesorado sobre la manera en cómo enseñar y aprender matemática.

Dependiendo de las concepciones que tenga el profesorado sobre la modelización matemática así será su abordaje, por ejemplo, “si considera que las matemáticas deben enseñarse solamente desde su estructura y mediante la deducción es más difícil su apertura hacia otro tipo de experiencias en el aula de clase” (Kaiser, 2006, en Marín et al., 2015, p. 8). Otro obstáculo que establecen Marín et al. (2015), corresponde a que una parte del profesorado tiene la creencia que únicamente hay que ocuparse de las matemáticas, dejando la parte pedagógica de lado. Esto podría influir de manera negativa en el estudiantado, haciéndole creer que la modelización es únicamente un proceso meramente matemático, y para aquellas personas interesadas en aprender algo más allá de los números, se les hará difícil concebir la modelización matemática como una parte esencial en sus procesos de aprendizaje.

Diversos estudios identifican dificultades u obstáculos propiamente en la resolución de problemas de modelización, Hein y Biembengut (2006) identificaron dificultades por la formación docente o la falta de experiencia por parte del estudiante en la resolución de problemas, entre ellas, en la comprensión del problema, la relación entre el fenómeno real, los modelos físicos y el modelo matemático. Plaza, L (2016), en su investigación determinó obstáculos presentes al realizar procesos de modelación donde principalmente obedecen a la formación previa matemática y a la poca experiencia en la resolución de problemas de modelización, provocando dificultades en la clasificación de parámetros, identificación de variables, entre otros.

Metodología

Tipo de investigación. Esta investigación se apoyó en un paradigma de tipo naturalista ya que “postula una realidad dependiente de los significados que los sujetos le atribuyen y construida a partir de esos significados” (Rodríguez, 2003, p. 28). En este sentido, se consideró el enfoque cualitativo, el cual se basa en la acción de los sujetos con respecto a la función práctica, donde el investigador se va a encargar de describir y comprender lo que es único y particular del sujeto en investigación (Rodríguez, 2003).

Fuentes de información. Los sujetos de investigación fueron profesores de matemática en formación inicial del grado de Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática en el plan de estudios BLEM-2017, ya que fueron con quienes se desarrollaron el módulo de modelización matemática.

Los participantes en el estudio debieron cumplir con dos criterios:

- a) Matrícula: Estar matriculados en el I ciclo, en el 2022, en los cursos MAC417 Didáctica de la Estadística y Probabilidad y MAC 418 Didáctica del Álgebra y el Análisis. Debido a que, al estar matriculados en las didácticas, se garantizó que el profesorado en formación ya había aprobado cursos como: Análisis, Geometría, Estadística y Probabilidad, entre otros. La razón de inclusión fue para garantizar que las personas participantes hubieran aprobado diferentes cursos del plan de estudios los cuales incluyen competencias y conocimientos previos acerca de modelización matemática.
- b) Aceptación: El profesorado en formación debió haber completado un formulario de inscripción voluntaria al módulo de formación complementaria respecto a modelización matemática, donde se comprometió a asistir a todas las sesiones del módulo y completar

todos los instrumentos de recolección de información que se les solicitó llenar durante la participación. En total participaron 20 docentes en formación.

Técnicas e instrumentos de recolección. *Encuesta.* Como menciona Bernal (2010) la encuesta se utiliza con el fin de obtener información a través de un cuestionario o un conjunto de preguntas. A partir de cuestionarios que se les aplicó a los participantes de la investigación, se obtuvo información relevante relacionada con los conocimientos y habilidades en modelización que estos presentaban.

Como parte de los cuestionarios, y con base en preguntas abiertas, a las personas docentes en formación se les solicitó resolver problemas de modelización matemática. El análisis de la resolución de dos de estos problemas se presenta en este documento.

Para asegurar la validez de los instrumentos, se tomó en consideración los criterios establecidos por Ñaupas et al. (2014). Se utilizaron dos métodos de validación. Primero el juicio de expertos en la temática de acuerdo con una guía de validación. Segundo, se realizó un plan piloto con docentes en formación de la Escuela de Matemática que se encontraron cursando el nivel de licenciatura, en el año 2022. Ambos instrumentos iniciaron con el consentimiento informado, en el cual se indicó el propósito de la investigación, garantizando los criterios de confidencialidad respectivos.

Análisis documental. Bernal (2010) nos indica que esta técnica se basa en fichas o registros bibliográficos o escritos que tienen como fin principal analizar materiales o documentos escritos teóricos o de producción.

En esta investigación un documento para analizar fueron las resoluciones a los problemas (producción) realizadas por el profesorado formación. Lo que se pretendió determinar, a través de estas actividades realizadas durante la implementación del módulo, fue aquellas competencias que los sujetos de investigación presentaron en cuanto a modelización: conceptos, características, fases, ejemplos, entre otros aspectos.

Proceso de recolección de la información. La recolección de la información fue durante el desarrollo de un módulo de formación sobre modelización matemática. En la sesión 3 del módulo el profesorado en formación trabajó en dos problemas matemáticos con el propósito de realizar un modelo para su solución. Esta actividad se completó fuera de la sesión y la semana siguiente profesorado en formación tuvo que compartir la solución de los problemas.

Categorías de análisis. Se establecieron las siguientes categorías.

Tabla 1

Categorías de análisis para los procesos de solución del profesorado

Categoría de análisis: Conocimiento matemático		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Definiciones y propiedades	Manifiesta conocimiento sobre las definiciones o propiedades de los conceptos matemáticos abordados y refiere estos en la construcción del modelo matemático.	<ol style="list-style-type: none"> 1 No refiere a definiciones o propiedades matemáticas en la resolución del problema. 2 Utiliza algunas definiciones o propiedades matemáticas, pero de forma incorrecta, en la resolución del problema. 3 Utiliza, de forma adecuada, solo algunas de las definiciones o propiedades matemáticas requeridas en la resolución del problema. 4 Refiere, de forma adecuada, a las definiciones o propiedades matemáticas requeridas en la resolución del problema.

Representaciones	Utiliza representaciones, que están construidas por los diversos sistemas, que permiten expresar un determinado concepto matemático (notaciones, reglas y convenios que expresan determinados aspectos y propiedades de un concepto).	<ol style="list-style-type: none"> 1 No refiere a representaciones en la resolución del problema. 2 Utiliza algunas representaciones, pero de forma incorrecta, en la resolución del problema. 3 Utiliza, de forma adecuada, solo algunas de las representaciones requeridas en la resolución del problema. 4 Refiere, de forma adecuada, a las representaciones requeridas en la resolución del problema.
Categoría de análisis: Modelo real		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Datos	Un dato es información objetiva sin proporcionar juicios de valor o interpretaciones, que se extrae del texto del problema, o bien, que el modelizador establece a priori y que puede que se utilice o no, en su solución.	<ol style="list-style-type: none"> 1 Ninguno de los datos del problema es considerado como relevantes. 2 Toma algunos datos del problema como relevantes cuando no lo son. 3 Identifica solo algunos de los datos relevantes del problema. 4 Identifica todos los datos relevantes del problema.
Variables	La variable es un literal que se supone cambia de valor. Es decir, un argumento (conjunto de valores de dominio de una función) o un parámetro (un valor sobre el que dependen otros valores)	<ol style="list-style-type: none"> 1 No enlista variables ni parámetros relevantes para construir el modelo. 2 Enlista variables y parámetros, pero no todos son relevantes para construir el modelo. 3 Todos los parámetros y variables que enlista son relevantes, pero faltan otras que también lo son. 4 Enlista todas las variables y parámetros relevantes para construir el modelo matemático.
Patrones	Tendencias, regularidades, similitudes o afinidades que se establecen entre los datos de un problema.	<ol style="list-style-type: none"> 1 No reconoce ningún patrón en los datos. 2 Reconoce que existen características afines en los datos, pero no identifica el patrón. 3 Identifica parcialmente cuál es la relación de los datos o un cierto patrón. 4 Identifica el patrón en los datos.
Categoría de análisis: Modelo matemático		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Relación entre cantidades y variables	Establece matemáticamente las relaciones entre las cantidades y variables interrelacionadas y las relaciones entre ellas.	<ol style="list-style-type: none"> 1 No expresa matemáticamente la relación entre todas las variables y datos involucrados. 2 La relación establecida entre las variables y datos es incorrecta. 3 Expresa matemáticamente la relación entre algunas variables y datos, pero no considera todas las variables y datos implicados. 4 Expresa matemática la relación entre todas las variables y datos involucrados.
Relaciones/Criterio	Expresa matemáticamente el modelo que describe la situación problema	<ol style="list-style-type: none"> 1 No expresa matemáticamente un modelo. 2 Expresa un modelo, pero presenta errores. 3 Expresa un modelo, pero no incluye todas las variables o datos del problema. 4 Expresa matemática, de forma correcta, el modelo que describe la situación problema.

Categoría de análisis: Coherencia en el proceso de modelización		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Coherencia entre el modelo real y el modelo matemático	Existe coherencia entre el modelo real y el modelo matemático en cuanto a los datos del modelo real y el modelo matemático, las relaciones entre variables, entre otros.	1 No posee coherencia entre el modelo real y el modelo matemático.
		2 El modelo matemático incluyó variables y datos que no fueron considerados en el modelo real.
		3 No todos los datos y variables del modelo real fueron considerados en el modelo matemático, a pesar de ser relevantes.
		4 Posee coherencia entre el modelo real y el modelo matemático.
Categoría de análisis: Establece conexiones con otros problemas		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Conexión con otros modelos o problemas similares	Realiza conexiones con otros modelos o problemas matemáticos.	1 No realiza conexiones con otros modelos o problemas matemáticos.
		2 Establece conexiones con otros tipos de problemas pero que no guardan relación.
		3 Establece únicamente conexiones con problemas similares.
		4 Realiza conexiones con otros modelos o problemas matemáticos.
Categoría de análisis: Interpreta los resultados matemáticos obtenidos con el problema real		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Generalización	Generaliza los resultados obtenidos con la situación problema planteada.	1 No generaliza los datos obtenidos.
		2 El resultado obtenido del modelo propuesto lo contrasta con la situación real.
		3 Identifica restricciones para una posible generalización.
		4 Generaliza los datos obtenidos.
Categoría de análisis: Valida la solución		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Análisis de las soluciones	Revisa si las soluciones concuerdan con la situación del problema real.	1 No revisa las soluciones dadas con la situación real.
		2 Revisa las soluciones dadas con la situación real, pero no toma acciones posteriores.
Inicia nuevamente el proceso de modelado	Vuelve a iniciar de nuevo el proceso de modelado si las soluciones no concuerdan con la situación del problema real	3 Revisa las soluciones dadas con la situación y toma acciones posteriores.
		4 Revisa las soluciones dadas con la situación real y verifica que cumplen todas las condiciones.

Nota: Fuente propia de la investigación.

Técnicas de análisis de la información. La técnica para el análisis de la información a utilizar fue el análisis de contenido, el cual Sánchez et al (2021) indican que “este tipo de análisis es una técnica de interpretación y comprensión de textos escritos, orales, filmados, fotográficos, transcripciones de entrevistas y observaciones, discursos, documentos, es decir, todo tipo de registro teniendo en cuenta el contexto en el que se produce” (p.12). Es decir, todas aquellas respuestas, procedimientos, dudas, opiniones, fueron recolectadas de forma escrita y oral, para posteriormente realizar un análisis de todas estas respuestas obtenidas. Este análisis de contenido se basó en las categorías de análisis establecidas. La información fue organizada y clasificada a través de un análisis cualitativo.

Técnica de validez de la información. Para garantizar la validez de la información se empleó la técnica de triangulación, la cual, según Cisterna (2005), “se puede concebir como la acción de reunión y cruce dialéctico de la información pertinente al objeto de estudio que surge a partir de una investigación y que es obtenida por medio de los instrumentos correspondientes, a partir de la cual se obtienen los resultados del estudio” (p.68). Más aún, se utilizó la triangulación de tipo metodológica, con el fin de realizar un contraste de información obtenida en los distintos instrumentos de recolección de datos.

Análisis y resultados

Con el propósito de caracterizar el nivel de las competencias de docentes en formación en el área en la resolución de problemas de modelización matemática, se plantearon algunos problemas a parte de la población del IV nivel de la carrera de Enseñanza de la Matemática que imparte la Universidad Nacional, Costa Rica. En total participaron 20 docentes de matemática en formación. Es importante aclarar que para los problemas propuestos no todas las personas participantes presentaron abordajes para su solución. En algunos casos porque decidieron no resolverlo y en otros porque no encontraron estrategias sobre cómo abordarlos.

El análisis que se realiza para los problemas planteados fue para aquellos casos en los que se hizo algún tipo de planteamiento. Para registrar la solución, al profesorado se le solicitó indicar los pasos que siguieron para la resolución del problema, los supuestos o condiciones que fueron consideradas, otras preguntas que se podrían plantear a partir de los datos obtenidos, consideraciones adicionales se le podrían hacer al problema y otras situaciones-problema se podrían diseñar a partir del problema dado.

El primer problema planteado a las personas participantes fue el siguiente (adaptado de Stewart (1999))

¿Qué medidas debe tener una lata de refresco de 710 ml para que su fabricación sea lo más barata posible? Compare el resultado con las dimensiones de alguna lata de bebida que se comercie a nivel nacional y que tenga la misma capacidad. Realice hipótesis de las razones por las cuales hay diferencia, en caso de encontrarlas.

El problema propuesto implica el uso de funciones, derivación de funciones y un proceso de optimización, donde los datos están dados en el problema, pero implica un proceso de investigación a partir de los resultados que se obtengan. Además, representa una situación que se vincula con un contexto real.

Del total de docentes en formación participantes, 18 personas intentaron distintas estrategias de solución. En términos generales, el problema era del conocimiento de la mayoría del profesorado, así como las técnicas de solución. Sin embargo, al momento de realizar la resolución del problema, cometieron errores u omitieron aspectos importantes del mismo y, particularmente, solamente una de las personas participantes trató de comparar los resultados obtenidos con el prototipo de lata que circula a nivel nacional, lo cual era parte del problema.

Conocimiento matemático

Con respecto al uso de definiciones, propiedades o representaciones matemáticas en la construcción del modelo matemático, se destaca en cuanto definiciones el uso y mención del cilindro, su altura, área lateral, área basal y volumen de un cilindro, radio y circunferencia. En cuanto a las propiedades, se utilizan propiedades del área y volumen de un cilindro.

Con respecto al nivel alcanzado de conocimientos matemáticos, 2 docentes en formación se ubicaron en un nivel 1, dado que no se refirieron a definiciones o propiedades matemáticas para resolver el problema; 4 personas se ubicaron en un nivel 2, puesto que utilizaron algunas definiciones o propiedades, pero presentaron errores en las mismas. Por ejemplo, una persona participante planteó lo siguiente:

Se indica la fórmula del área lateral de la lata de la forma: $2\pi r + 2h$

Por otro lado, se indica el área del cilindro de la forma: $2\pi r h$

En el nivel 3 se ubicaron 12 participantes, puesto que, aunque hacen referencia a definiciones o propiedades de forma adecuada, no citan la totalidad de definiciones o propiedades requeridas. Por ejemplo, una persona hizo alusión a la necesidad de utilizar la fórmula del área total del cilindro, pero no menciona la necesidad de utilizar el volumen.

Modelo real

Con respecto al modelo real, específicamente al uso de datos, 3 personas se ubicaron en un nivel 1, dado que no se refleja un uso o simplificación de los datos aportados. Por ejemplo, un estudiante indica: “además de considerar el precio, es necesario el costo de fabricación”, pero no identifica los datos relevantes.

En el nivel 2, se ubicó 1 docente en formación, quien realiza una interpretación incorrecta de los datos al momento de plantear la función a optimizar. Concretamente plantea la siguiente igualdad: $2\pi r h + 2\pi r = 710$ (se intenta igualar un área con un volumen); e indica que “se podría derivar y con ello optimizar la fórmula del área total del cilindro en función de la altura y el radio”. No obstante, está utilizando la fórmula del área y la está igualando al volumen dado o requerido.

Al continuar con el análisis del nivel mostrado por las personas participantes en este problema, 1 docente en formación se ubicó en el nivel 3, pues a pesar de que considera “el área de un cilindro circular recto y el volumen del cilindro”, en el análisis y uso de los datos no considera el volumen en la resolución.

En cuanto al nivel 4 en este problema, 13 docentes en formación se ubicaron en él, esto dado que utilizaron el volumen del cilindro, tanto en su fórmula como el dato de los 710 ml, y el perímetro del cilindro. Sin embargo, en el manejo de dichos datos algunos cometieron errores como considerar el perímetro del cilindro bajo la fórmula $P = 2\pi r + 2a$, donde r y a corresponden al radio y la altura del cilindro (Figura 2).

Handwritten mathematical work on a piece of paper. The text includes:

- Volumen = 710 ml. y $Ab = \pi r^2$
- $V = Ab \cdot h = 710 \rightarrow V = \pi r^2 \cdot h = 710$
- Con la fórmula del volumen despejar una de las variables.
- $\pi r^2 \cdot h = 710 \Rightarrow h = \frac{710}{\pi r^2}$ y h.a.
- ~~$P = 2\pi r + 2a$~~
- $P = 2\pi r + 2a$
- $P = 2\pi r + 2\left(\frac{710}{\pi r^2}\right)$
- $P = 2\pi r + \frac{1420}{\pi r^2}$
- $1420 r^{-2}$
- $P' = 2\pi - \frac{2840}{\pi r^3}$
- $P' = 2\pi - \frac{2840}{\pi r^3}$
- $\frac{2\pi r^3 - 2840}{\pi r^3} = 0$
- $2\pi r^3 = 2840$
- $r^3 = 1420$

Figura 2. Relación matemática establecida por una de las personas participantes.

Dentro del modelo real, pero en lo que corresponde a la identificación de variables, 4 personas se ubicaron en un nivel 1, dado que no identificaron variables ni parámetros para la construcción del modelo. Sin embargo, 14 de las personas participantes identificaron todas las variables y parámetros requeridos para el modelo matemático, aunque algunos con errores

matemáticos en su uso. Por ejemplo, una persona identifica la altura y el radio del cilindro y establece la fórmula del volumen y el área, pero establece como área del cilindro la siguiente $2\pi r + 2h$.

Finalmente, en cuanto al reconocimiento de patrones y planteamiento de supuestos, 4 participantes se ubicaron en un nivel 1, puesto que no reconocieron ningún patrón en los datos; 3 personas se ubicaron en un nivel 2, para el cual reconocen que existen ciertas características comunes pero no logran identificar el patrón; 2 docentes en formación identifican parcialmente la relación de los datos; y 9 se ubican en el nivel 4, puesto que identificaron el patrón en los datos, lo que les permitió plantear adecuadamente la función para realizar el proceso de optimización.

Modelo matemático

Al analizar el modelo matemático generado por las personas participantes, respecto al establecimiento de relaciones entre cantidades y variables, 6 docentes en formación no lograron expresar la relación entre variables y datos involucrados (nivel 1); 1 persona establece una relación, pero esta es incorrecta (nivel 2), tal y como se evidencia en la Figura 3.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow 710 = \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow h = \frac{710}{\pi r^2}$$

$$A_T = A_D + A_L$$

$$\Rightarrow 2\pi r + 2\pi r h$$

$$= 2\pi r \left(1 + \frac{710}{\pi r^2}\right)$$

$$= 2\pi r \left(\frac{\pi r^2 + 710}{\pi r^2}\right)$$

$$= \frac{2(\pi r^2 + 710)}{r}$$

Figura 3. Relación matemática establecida por una de las personas participantes.

Adicionalmente, 2 docentes en formación expresaron una relación, pero no consideraron todas las variables o datos implicados (nivel 3). Por ejemplo, en la Figura 4 se muestra como una persona participante, al establecer las relaciones entre las variables y datos del problema, no considera el volumen de la lata.

$$A = 2\pi r$$

$$2\pi r h = 710$$

$$2\pi r h + 2\pi r = 710$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r (h + 1) = 710$$

se podría derivar y con ello optimizar la fórmula del área total del cilindro en función de la altura y el radio, respectivamente.

Figura 4. Relación matemática establecida por una de las personas participantes.

Los restantes 9 docentes en formación participantes lograron expresar matemáticamente y de manera adecuada la relación matemática, estableciendo no solo la relación entre el volumen y el área del cilindro, sino encontrando la función a optimizar (nivel 4).

Coherencia en el proceso de modelización

Dado que 6 de las personas participantes no expresaron matemáticamente la relación entre todas las variables y datos del problema, se ubicaron en el nivel 1 en este aspecto; 4 personas participantes plantearon matemáticamente una relación entre los elementos del problema, pero de manera incompleta (nivel 3).

Por su parte, el modelo propuesto por las 9 personas participantes, guardan coherencia con el proceso de modelización empleado y se adapta a las condiciones del problema.

Conexiones con otros problemas

Ninguna de las personas participantes realizó conexiones de este problema con otros conocidos por ellas o modelos matemáticos que fueran de conocimiento de ellos. Todas las personas participantes se ubicaron en el nivel 1.

Interpretación de los resultados matemáticos y validación de solución

En este problema, 9 personas lograron expresar matemáticamente y de manera adecuada la relación matemática. Sin embargo, solo una persona docente en formación contrastó lo obtenido con el modelo real, realizando hipótesis sobre la no utilización de la forma de la lata que optimiza el material utilizado, tal y como se evidencia en la Figura 5.

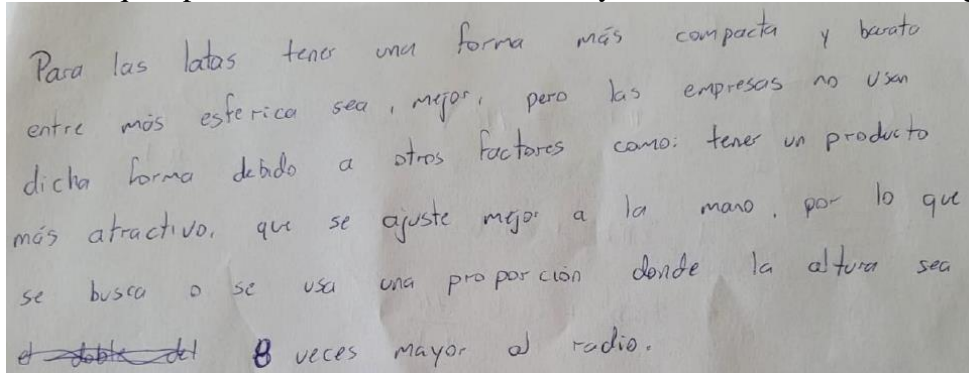


Figura 5. Interpretación de resultados establecida por una las personas participantes.

En la Tabla 2, se muestra un resumen de la ubicación de los estudiantes que participaron en la resolución de este problema, respecto al nivel de competencia en modelización matemática.

Tabla 2

Cantidad de docentes en formación por nivel de competencia en modelización matemática mostrado

Categoría de análisis	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Conocimiento matemático	2	4	12	0
Modelo real: datos	3	1	1	13

Categoría de análisis	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Modelo real: variables	4	0	0	14
Modelo real: patrones	4	3	2	9
Modelo matemático: relaciones	6	1	2	9
Modelo matemático: criterio	6	1	2	9
Coherencia en el proceso de modelización	6	0	4	9
Conexiones con otros problemas	18	0	0	0
Interpretación de resultados	17	0	0	1
Validación de la solución	17	0	0	1

Fuente: Elaboración propia.

Tal como se desprende de la tabla, en este problema las personas participantes mostraron un adecuado nivel de competencia en modelización matemática, reflejado en la ubicación de al menos 9 estudiantes en el nivel 4 en los distintos rubros. Esta situación puede deberse a la naturaleza del problema, siendo un problema cerrado y no abierto. Sin embargo, no evidencian competencias para la interpretación y validación de los resultados obtenidos o conexiones con otros problemas.

Otro de los problemas planteados a las personas participantes fue el siguiente (adaptado de Guerrero (2016))

Los cambios climáticos traen consigo problemas a los países en los que la energía eléctrica se deriva de la energía hidráulica, tal es el caso de Costa Rica, que se ha visto afectado en los últimos tiempos por estos cambios. Podría usted calcular

- a) *¿Cuánta energía eléctrica se consume diariamente en su hogar por artefacto eléctrico?*
- b) *¿Qué artefactos eléctricos tienen un impacto mayor en la factura eléctrica de su hogar? (Podría elaborar una tabla donde, por artefacto eléctrico, se indique cantidad de estos en su hogar, capacidad de en watts por hora, horas de uso diario, consumo total de watts por día, costo por día, entre otros).*
- c) *¿De qué manera puede generar un plan de ahorro de energía para reducir el consumo de energía eléctrica? Determine el impacto de ese plan de ahorro (utilice la información generada en la pregunta anterior)*
- d) *¿Se podrá utilizar este plan en otros hogares?*

El problema propuesto implicaba el uso de funciones y aproximaciones, donde los datos están ausentes del problema, por lo que implica un proceso de investigación previo al proceso de solución y posterior, a partir de los resultados que se obtengan. Además, representa una situación que se vincula con un contexto real, familiar, ambiental y social.

Del total de docentes en formación participantes, solamente 7 personas intentaron alguna estrategia de solución. Las restantes personas participantes no presentaron una solución al problema o se limitaron a realizar ciertas hipótesis, pero sin información al respecto.

Conocimiento matemático

Con respecto al uso de definiciones, propiedades o representaciones matemáticas en la construcción del modelo matemático, se destaca que estas se aplicaron a un nivel muy básico. En todos los procesos de solución se muestra una sistematización de la información

respecto a la cantidad de artefactos eléctricos, horas de uso y consumo de electricidad por día. Además, algunos aplicaron propiedades de aritmética básica.

En cuanto a los niveles determinados para las competencias, 4 personas se ubicaron en el nivel 1 de competencia, es decir, no hicieron referencia a definiciones o propiedades matemáticas. Por otra parte, 3 participantes se ubicaron en el nivel 3, ya que utilizaron algunas propiedades matemáticas en forma adecuada pero no todas las que se requerían para plantear una solución al problema.

Por ejemplo, en la Figura 6 se muestra una tabla donde una persona participante sistematiza la información de su grupo familiar y realiza un cálculo para aproximar el consumo de electricidad por día. Procesos similares fueron realizados por las otras participantes que se ubicaron en este nivel.

a)	Horas por día de uso	Watts por día
Cocina	2h	14000
2 Televisores	8h	1120
Microwaves	1h	1000
Refrigeradora	24h	4860
Parlante	1h	1140
Fiestera	2h	1000
4 Cargar Celulares	4h	240
Centro de lavado	8h	3000
Play Station	5h	550
2 Computadoras	12h	3600
Coffee Maker	1/2h	450
Ducha	1h	8000
10 Bombillos	10h	100
Abanico	15h	1050
Total	100.5h	39.810

Figura 6. Sistematización de información realizada por una persona docente en formación para resolver el problema planteado.

Con respecto al conocimiento matemático, se puede mencionar que la solución del problema requería de otros conocimientos que no fueron empleados por el profesorado. Lo mostrado por las personas participantes se limitó a la aplicación de algunos conocimientos básicos, pero no profundizaron en el proceso de solución.

Modelo real

Con respecto al modelo real, específicamente al uso de datos, todas las personas participantes que sistematizaron información utilizaron datos de su contexto familiar (como se observa en la Figura 6). Sin embargo, en algunos casos estos fueron insuficientes o incompletos, pues, por ejemplo, como se observa en la Figura 7, falta información sobre otros artefactos eléctricos.

	Cantidad	Horas de uso 24	Consumo diario
Refrigeradora	1		28800 wats
Ducha	2	1	8000 wats
Cocina eléctrica	1	10	10000 wats

Figura 7. Sistematización de información realizada por una persona docente en formación para resolver el problema planteado.

Con base en las resoluciones dadas por las personas participantes y el uso de datos, todas ellas (7) se ubicaron en el nivel 3, pues aunque identificaron aspectos relevantes para la resolución del problemas, estos no fueron suficientes.

Un aspecto para considerar es que para resolver el problema se debía tomar en cuenta información como el costo diario del consumo de energía por artefacto eléctrico o investigar si había diferentes tarifas, según franja horaria o compañía que brinda el servicio. Solamente dos docentes en formación hacen referencia a la necesidad de conocer el costo, pero no lo calculan. En la Figura 8 se presenta lo realizado por una persona participante.

Artificio	Cantidad	capacidad Watts hora	horas de uso diario	Costo diario
Refrigerador	1	290	24	
Lavadora	1	385	1	
Olla a presión	1	700	0.5	
Bombillas	5	75	4	

Figura 8. Sistematización de información realizada por un estudiante para resolver el problema planteado.

Con respecto al uso de variables solo 1 participante identifica, simboliza y define posibles variables para la resolución del problema: potencia, tiempo y energía consumida (Figura 9). La persona docente en formación utiliza estas variables en la posterior construcción de una tabla. Sin embargo, fue el único procedimiento que realizó.

$$\text{Potencia del artefacto eléctrico (W)} \times \text{Tiempo que está prendido el artefacto (horas)} = \text{Energía Consumida por el artefacto (KWh)}$$

Tabla:

Artefacto	Cantidad	Potencia Capacidad (w)	horas	Consumo total
Refrigeradora	1	150	24	3,6 KWh
Cocina Eléctrica	1	220	6	1,32 KWh
televisor	1	90	1	0,09 KWh
centro de Secado	1	240	2	0,18 KWh

Figura 9. Variables identificadas por una estudiante para resolver el problema planteado.

Con respecto a la identificación de variables, todas las personas participantes se ubicaron en el nivel 3, dado que reconocen algunas variables relevantes para construir el modelo, pero faltan otras que también lo son.

Por otra parte, solo 1 docente en formación se ubica en el nivel 3 con respecto a la definición de variables; las otras personas participantes se ubicaron en el nivel 1, pues, aunque identifican variables relevantes, no las definen explícitamente según el contexto del problema.

Aunado a lo anterior, como ya se indicó, aunque tres personas participantes identificaron que se debe calcular el costo diario (lo que sería un supuesto para la resolución del problema) no se profundiza en ello y no lo asumen como una variable en el problema, que depende de otros datos que se pueden obtener o recolectar. Solo una persona participante, cuyo proceso inicial de resolución se muestra en la Figura 8, expresa la relación entre las variables que ella identificó y lo enuncia mediante operaciones matemáticas.

En este caso, referente a los supuestos para la resolución del problema, 4 participantes se ubicaron en el nivel 1, pues no identificaron ningún patrón o relación entre las variables, mientras que 3 se ubicaron en el nivel 3, al reconocer parcialmente relaciones entre las variables.

En general, las personas participantes consideran datos relevantes para el problema (aunque incompletos), identifican algunas variables, pero no las definen y aunque reconocen que existe “algún tipo de relación” entre los datos, no la expresan explícitamente como un comportamiento o patrón a considerar.

Modelo matemático

Según el procedimiento realizado por las personas docentes en formación en la resolución de problemas, ninguna de ellas planteó un modelo matemático para determinar, entre otros aspectos, el consumo de energía total, el costo de este y el impacto que un plan de ahorro tendría para el grupo familiar. Es decir, ninguna persona participante logró establecer las relaciones entre las cantidades y variables interrelacionadas, ni las expresó matemáticamente, por lo que todas se ubicaron en el nivel 1 con respecto al planteamiento de un modelo matemático.

Los argumentos expresados por las personas participantes a las preguntas planteadas se basaron en la observación de los datos de una tabla, identificar el artefacto que tenía más consumo de electricidad y sugerir un menor uso (Figura 9).

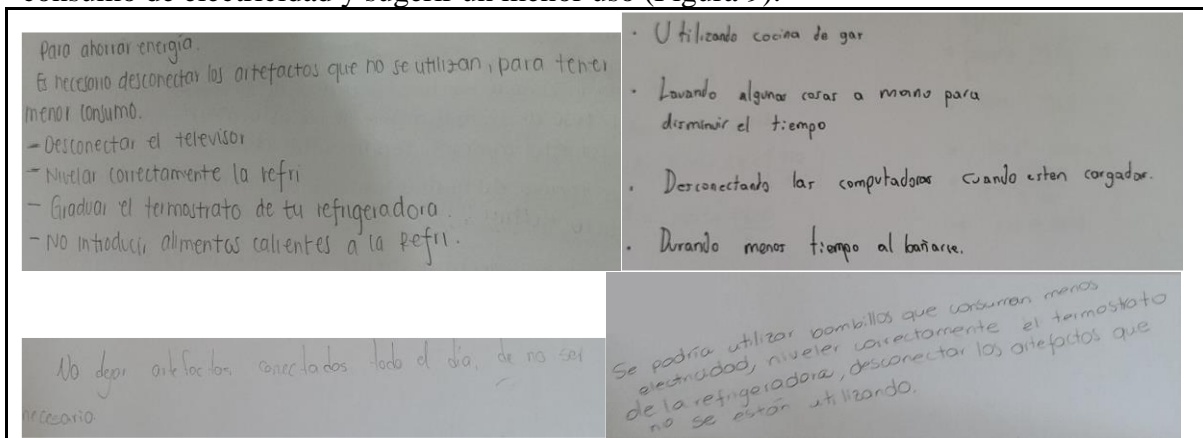


Figura 9. *Respuestas dadas por personas participantes sobre medidas para disminuir el consumo de energía.*

Las respuestas dadas por las personas participantes con respecto a acciones para disminuir el consumo de energía y, por ende, el costo económico de esta para el grupo familiar, se basaron en acciones conocidas por la mayoría de la población pero que no responden directamente a lo solicitado, en el sentido de cuál es más efectiva y el impacto que esto puede tener para el grupo familiar (impacto económico y de ahorro de energía). Lo anterior, podría depender de muchos factores como la cantidad de personas que habitan en la misma casa, característica del grupo familiar, horas de uso de cada artefacto, cantidad de artefactos, entre otros.

Aunque las respuestas son válidas, constituyen acciones comunes cuyo alcance no se analizó con base en el contexto de cada persona ni por medio de un modelo matemático que apoyara sus argumentos. Tampoco se profundizó en cuáles de las acciones mencionadas tenían más impacto para su grupo familiar.

Para este problema el comportamiento de las personas docentes en formación en los distintos rubros estuvo en un nivel 1, en lo que respecta a la generación del modelo matemático. Y en cuanto al conocimiento matemático y modelo real estuvo ubicado en un nivel 3.

Coherencia en el proceso de modelización

Dado que ninguna de las personas participantes realizó un modelo matemático, este aspecto relacionado con la coherencia en el proceso de modelización, no se pudo valorar. Como ya se indicó, aunque en algunos casos se identificaron algunos datos y variables, no se establecieron las relaciones entre estos. Todas las personas participantes se ubicaron en el nivel 1.

Conexiones con otros problemas

Ninguna de las personas participantes realizó conexiones de este problema con otros conocidos por ellas o modelos matemáticos que fueran de conocimiento de ellos. Todas las personas participantes se ubicaron en el nivel 1.

Interpretación de los resultados matemáticos y validación de solución

Debido a la ausencia en el planteamiento de un modelo matemático, la información aportada por las personas participantes no se generaliza, revisa o valida con base en dicho modelo o su contexto. Tampoco se analiza si lo expresado se puede aplicar a otros contextos o grupo familiares y cuáles aspectos se deberían considerar para ello. Todas las personas participantes se ubicaron en el nivel 1.

Incluso, las ideas expresadas con respecto a las posibles acciones para disminuir el consumo de energía carecen de análisis con respecto a su contexto familiar particular. En este sentido, no se observa la interpretación de los resultados o revisión de lo planteado con base en la formulación de la situación planteada.

En la Tabla 3, se muestra un resumen del nivel del profesorado en formación, respecto al nivel de competencia en modelización matemática.

Tabla 3

Cantidad de docentes en formación por nivel de competencia en modelización matemática mostrado

Categoría de análisis	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Conocimiento matemático	4	0	3	0
Modelo real: datos	0	0	7	0
Modelo real: variables	6	0	1	0
Modelo real: patrones	4	0	3	0
Modelo matemático: relaciones	7	0	0	0
Modelo matemático: criterio	7	0	0	0
Coherencia en el proceso de modelización	7	0	0	0
Conexiones con otros problemas	7	0	0	0
Interpretación de resultados	7	0	0	0
Validación de la solución	7	0	0	0

Nota: Fuente propia de la investigación.

Conclusiones

Con base en los procesos de solución mostrados por las personas participantes se puede señalar que estas poseen los conocimientos matemáticos requeridos para resolver los problemas propuestos. Sin embargo, no los aplicaron en forma adecuada, pues se limitaron a un uso básico, sin profundizar en definiciones o propiedades, especialmente en problemas abiertos, donde no se brindaban datos específicos.

Las personas participantes muestran capacidad para manejar y dar sentido a datos relevantes para la resolución del problema. Sin embargo, no en todos los casos consideran todos aquellos que deben ser incluidos en el proceso de resolución. Aunado a lo anterior, su capacidad para la búsqueda de información fue limitada, pues no profundizaron en datos requeridos que implicaban indagación, en coherencia con lo planteado en la investigación de Hein y Biembengut (2006) y Plaza, L (2016),

La capacidad para la determinación y definición de variables y parámetros que describen las relaciones a partir de los datos generados según un problema fue limitada en los procesos de resolución, e incluso las personas participantes, en su mayoría, incluían variables sin definir las previamente. Aunque reconocen que existen patrones en los datos, estos no se hacen explícitos ni se representan matemáticamente; cuyo resultado es similar al obtenido por Plaza, L (2016). En este sentido, tampoco se hace una diferenciación entre la información que se utilizará en la solución del problema, la pertinente, y aquella que se podría exceptuar. Lo anterior podría deberse al poco desarrollo de competencias en la formalización y sistematización de la información, y no por falta de conocimiento matemático.

Se presentaron dificultades para configurar un modelo matemático que representa un sistema y relacione las variables significativas, esto en problemas abiertos, puesto que en el problema cerrado las personas participantes sí lograron determinar la relación matemática y, por tanto, un modelo matemático. No obstante, hubo una ausencia por parte de los docentes en formación de la interpretación de los resultados en el contraste con el modelo real o situación real planteada.

Los docentes en formación presentaron ausencia de un proceso de validación resultados y del establecimiento de conexiones con otros problemas o modelos matemáticos. Situaciones problemas abiertas, donde los datos no están dados, al parecer, no son familiares

en el proceso de formación docente y, por ende, las personas participantes no poseen desarrolladas capacidades para enfrentarse a ellas.

Lo mostrado por las personas docentes en formación podría ser un indicador de que en su formación profesional no se incluyen suficientes actividades orientadas al planteamiento y resolución de actividades de modelización matemática, tampoco en el uso de esta como un recurso para la enseñanza de la disciplina a nivel de la educación secundaria.

Financiamiento

Universidad Nacional, Costa Rica. SIA 052-20.

Consentimiento informado

Los autores declaran que las personas participantes en este estudio fueron informados sobre el tratamiento de la información.

Conflicto de intereses

Las personas autoras declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

El porcentaje total de contribuciones a la conceptualización, elaboración y corrección de este artículo fue el siguiente: A. B. O. 25%, D. C. M. 25%, J. C. V. 25% y R. G. A. 25%.

Declaración de disponibilidad de los datos

El autor correspondiente [R. G. A.] proporcionará los datos que respaldan los resultados de este estudio si se lo solicita razonablemente.

Preprint

Una versión Preprint de este artículo fue depositada en el repositorio de la Universidad Nacional.

Referencias

- Aymerich, A. y Albarracín, L. (2016). Complejidad en el proceso de modelización de una tarea estadística. *Modelling in Science Education and Learning*, 9(2), 6-23. <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/69660/4121-15761-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Bernal, C. (2010). *Metodología de la investigación* (Tercera edición). Pearson Educación.
- Blomhøj, M. (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *Revista De Educación Matemática*, 23(2). <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10419>
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). Springer.
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02655883>
- Borromeo, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-68072-9>

- Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria* 14(1), 61-71. <https://www.redalyc.org/pdf/299/29900107.pdf>
- Guerrero, F. (2016). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelización matemática. Caso: Estudiantes del primer año de educación media. *Revista Ciencias de la Educación*, 26, 47, 93-1136. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/47/art06.pdf>
- Hein, N. y Biembengut, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. *Memorias del V Festival Internacional de Matemática*, 1-25. <https://d9.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf>
- Kaiser, G. y Brand, S. (2015). Modelling Competencies: Past Development and Further Perspectives. En Stillman, G., Blum, W. y Biembengud, M. (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 129-150). Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-18272-8>
- Marín, A., Villa-Ochoa, J. y Mesa, Y. (2015). *La modelación matemática en la formación inicial de profesores de matemáticas: visiones de algunos formadores* [Informe Técnico de Investigación, Universidad Antioquia]. Repositorio institucional Universidad de Antioquia https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/26109/1/CorreaMaria_2015_ModelacionMatematicaFormacion.pdf
- Mata, P. y Gallart, C. (2020). Formación del profesorado en modelización: primeros pasos de una profesora novel. *Modelling in Science Education and Learning*, 13(2), 43-56. <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/13945>
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programa de Estudio de Estudio de Matemática I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. San José, Costa Rica. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf>
- Mora, A. y Ortiz, J. (2012). Formación de profesores de matemáticas y la modelización en ambientes tecnológicos. *Revista ciencia de la educación*, 22(39), 183-206. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n39/art09.pdf>
- Mora-Zuluaga, A. y Ortiz-Buitrago, J. (2015). Capacidades didácticas en el diseño de tareas con modelación matemática en la formación inicial de profesores. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores*, 54(1), 110-130. <https://www.redalyc.org/pdf/3333/333333042008.pdf>
- Niss, M. y Blum, M. (2007). *Introducción. Modelling and Applications in Mathematics Education*. Springer. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17710>
- Ñaupas, H.; Mejía, Elías.; Novoa, E. y Villagómez, A. (2014). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis* (4ta ed.). Ediciones de la U. <https://edicionesdelau.com/producto/metodologia-de-la-investigacion-cuantitativa-cualitativa-y-redaccion-de-la-tesis-5a-edicion/>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*. OCDE.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019). *Programme for international students assessment (PISA). Results from PISA 2018*. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_CRI.pdf

- Ortiz, J., Rico, L. y Castro, M. (2010). Realidad y perspectiva didáctica de futuros profesores de matemáticas a partir de una situación problema. *Zona próxima*, (13), 80-91. <https://www.redalyc.org/pdf/853/85317326006.pdf>
- Plaza-Galvez, L. F. (2016). Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. *Revista científica*, 25(2), 176-187. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=504373194003>
- Programa Estado de la Nación. (2019). *Resumen del Séptimo Estado de la Educación*. PEN. <https://estadonacion.or.cr/wp-content/uploads/2019/08/Estado-Educacio%CC%81n-RESUMEN-2019-WEB.pdf>
- Ramos-Rodríguez, E., Flores, P. y Ponte, J. P. (2014). Análisis didáctico para estudiar la reflexión de profesores sobre modelización en álgebra. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compañía, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 135-143). Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM. <https://core.ac.uk/download/pdf/33251965.pdf>
- Ríos, S. (1995). *Modelización*. Alianza Editorial.
- Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Investigación Educativa*, 7(12), 23-40. <https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/8177>
- Rosa, M., Rodríguez, R., Mendible, A., Arrieta, J. y Villa, J. (2014). Algunas reflexiones acerca de la modelación y la formación matemática en el nivel superior. En Flores, R. (Ed.). *Acta 139 Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1133 -1141). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. <https://core.ac.uk/download/pdf/83544028.pdf>
- Salett, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40516206.pdf>
- Sánchez, J., Fernández, M. y Díaz, J. (2021). Técnicas e instrumentos de recolección de información: análisis y procesamiento realizado por el investigador cualitativo. *Uisrael*, 8(1), 1-16. <https://doi.org/10.35290/rcui.v8n1.2021.400>
- Stewart, J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos*. International Thomson Editores.
- Swetz, F. y Hartzler, J. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum. A resource guide of classroom exercises*. NCTM.
- Universidad Nacional. (2017). *Plan de estudios de la Carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática*. Heredia, Costa Rica. <https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/plan-blem-2017-cc>
- Vega, M. y Ramírez, D. (2022). *Concepciones sobre modelización matemática que manifiesta un grupo de docentes de educación secundaria del circuito 07 de la Dirección Regional de Educación de Heredia, Costa Rica* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional]. Repositorio Escuela de Matemática, Universidad Nacional. <https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/2022>
- Villa-Ochoa, J. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *TecnoLógicas*, (19),63-85. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=344234312004>

Zaldívar, J., Quiroz, S. y Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 8(15), 87-110. <http://www.scielo.org.mx/pdf/ierediech/v8n15/2448-8550-ierediech-8-15-87.pdf>