El uso de los errores matemáticos en la atención de dificultades y el reforzamiento del aprendizaje del tema ecuaciones de primer grado con una incógnita en undécimo año de educación secundaria en Costa Rica

Anteproyecto sometido a consideración de la Comisión de Trabajos Finales de Graduación de la Escuela de Matemática como requisito parcial para la presentación de Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática en la modalidad de ***tesis***

Estudiante: Dennis Sequeira Lizano

Comité Asesor: M.Sc. Karen Porras Lizano, Tutora
M.Sc. Jeremías Ramírez Jiménez, Asesor
M.Sc. Helen Bolaños González, Asesora

Campus Omar Dengo

Heredia, Costa Rica

2024

Este trabajo final de graduación ha sido aprobado, por el Tribunal Evaluador designado para tal fin por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional, como requisito parcial para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática.

M.Sc. Jesennia Chavarría Vásquez

Representante del Decano de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales ____________________

Dr. José Romilio Loría Fernández

Representante de Dirección de la Escuela de Matemática Romi L.F. ____________________

M.Sc. Karen Porras Lizano

Tutora ____________________

M.Sc. Jeremías Ramírez Jiménez

Asesor Jeremía Ramírez J. ____________________

M.Sc. Helen Bolaños González

Asesora ____________________

Dennis Josue Sequeira Lizano

Estudiante ____________________

Agradecimientos

En primer lugar, mi más profundo agradecimiento a Dios, quien me ha dado la fortaleza para poder culminar este significativo proceso.

Agradezco el apoyo incondicional de mi esposa y mi hijo, quienes son la fuente de mi mayor motivación.

Extiendo mi gratitud a todos los docentes que han fueron parte esencial de mi formación a lo largo de este camino. En particular, agradezco a Ronny Gamboa por su dedicación y contribución y apoyo en este proceso de investigación.

Un agradecimiento especial a mi comité asesor por su apoyo en este proceso, en especial a mi tutora, Karen Porras Lizano, cuya guía indispensable y paciencia han sido pilares fundamentales en mi camino académico. Sin su apoyo, este trabajo no habría sido posible.

Índice de contenidos

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo I. Planteamiento de la Investigación

En este capítulo se contextualiza la investigación en distintos aspectos y se presenta el planteamiento del problema, la justificación, distintos trabajos relacionados con los errores matemáticos y los objetivos de la investigación.

1.1 Planteamiento del problema

Ante una sociedad globalizada y el avance constante de la tecnología, la educación debe asumir el reto de dotar a las generaciones actuales de una excelente preparación académica. Para eso, la matemática juega un papel decisivo y de gran importancia, pues permite fomentar habilidades como el razonamiento lógico y la criticidad, ambas necesarias para el diario vivir del ser humano. Sin embargo, en el contexto social, la matemática es conocida como una materia difícil dentro del currículo (Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012), especialmente en los niveles de educación secundaria, donde las dificultades que presentan los estudiantes están asociadas con los niveles de abstracción, generalización, comprensión de conceptos, lenguaje simbólico y la resolución de algoritmos (Fernández, 2013).

En particular, algunas investigaciones reportan que los estudiantes de distintos niveles educativos presentan dificultades vinculadas con el aprendizaje algebraico, expresadas a través de los errores cometidos en sus producciones escritas (Kayani e Ilyas, 2014; Morales, 2017). Estas dificultades incluyen la falta de comprensión de símbolos y letras en expresiones numéricas y algebraicas (Egodawatte y Stoilescu, 2015), además del uso incorrecto del lenguaje matemático y la manipulación errónea de términos algebraicos (Morales, 2017).

Por ejemplo, en la educación secundaria, algunos estudiantes exhiben dificultades en conocimientos previos que afectan su capacidad para resolver problemas algebraicos (Chavarría, 2014). En ocasiones, estos errores se derivan de una base insuficiente en aritmética y se hacen evidentes cuando los alumnos enfrentan nuevos contenidos algebraicos.

Además, las investigaciones realizadas por García (2010) y Chávez (2018) señalan que los conocimientos algebraicos básicos adquiridos en secundaria son necesarios y fundamentales en niveles de educación superior. No obstante, en la actualidad los estudiantes universitarios de primer ingreso presentan dificultades para aprobar los cursos de primer nivel, que incluyen temas de algebra como ecuaciones, factorización y funciones (Bolaños y Lupiáñez, 2021; Chávez, 2018; Gamboa et al., 2019; García, 2010), siendo el bajo rendimiento académico un reflejo de esta situación. Las dificultades pueden deberse a un vacío conceptual y procedimental en el conocimiento matemático que el estudiante debió adquirir previamente a su formación universitaria (García, 2015).

Sumado a esto, el Programa Estado Nación (PEN, 2017) en su Sexto Informe Estado de la Educación menciona que cerca de 56% del tiempo lectivo anual de las clases de matemática de secundaria se pierden en actividades ajenas al aprendizaje. En relación con esto, en el Séptimo Informe de la Educación se indica que los docentes utilizan la exposición magistral de contenidos como método de enseñanza y dejan de lado la corrección y realimentación a partir de los errores (PEN, 2019). Por lo anterior, es necesario optimizar la administración del tiempo y los métodos de enseñanza, en función de brindar más y mejores oportunidades de aprendizaje a los estudiantes (PEN, 2019).

Asimismo, se considera que no efectuar un abordaje y tratamiento adecuado de las dificultades y los errores en el momento que aparecen ocasiona su permanencia y persistencia a lo largo del proceso educativo. Por lo tanto, afecta la construcción de una nueva base conceptual, porque en matemáticas los contenidos de un nivel son dependientes de lo aprendido en niveles educativos inferiores (Godino et al., 2004). Es decir, puede suceder que un estudiante, a pesar de encontrarse en un nivel educativo adecuado a su edad, posea un conocimiento previo deficiente que le impide avanzar en su aprendizaje matemático posterior (Godino et al., 2004).

Debido a la problemática expuesta, la relevancia de esta investigación radicó en elaborar una propuesta didáctica para la atención de dificultades y promoción del aprendizaje del tema de ecuaciones lineales, en donde los errores matemáticos se incorporaron como un medio para reforzar el conocimiento de estudiantes de undécimo año y, a su vez, intentar corregir y solventar las dificultades que los provocan.

La propuesta didáctica brinda una forma diferente para construir el aprendizaje algebraico y, al mismo tiempo, toma en cuenta las dificultades que el estudiante presenta, con el fin de obtener un mejor entendimiento conceptual y procedimental del contexto matemático utilizado en la investigación.

Por su parte, el objeto matemático de interés son las ecuaciones de primer grado con una incógnita, entendiéndolas como expresiones representadas en simbolismo algebraico como $Ax + B = C$, donde A, B, C constituyen valores conocidos de algún conjunto definido previamente, con $A \neq 0$ y x la incógnita o valor desconocido que se desea determinar (Moreno y Castellanos, 1997; Wilhelmi et al., 2014).

Es importante mencionar que el tema se desarrolla en octavo año, por lo que se espera que el estudiante tenga un manejo adecuado de este en undécimo año, pues se considera como un conocimiento previo según el Programa de Estudios de Matemática (MEP, 2012), el cual sirve como herramienta para lograr las habilidades del nivel de undécimo y las requeridas para iniciar una formación universitaria.

1.1.1 Problema de investigación

Con la finalidad de resaltar la importancia de los errores matemáticos como medios de expresión de las dificultades de los estudiantes en su aprendizaje y en busca de una solución parcial a la problemática planteada en la sección anterior, se propone la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué incidencia tiene la incorporación de errores matemáticos, manifestados por estudiantes de undécimo año cuando resuelven tareas, en una propuesta de enseñanza didáctica como un medio para la atención de dificultades y el reforzamiento del aprendizaje en el tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita?

1.2 Justificación

La matemática es un pilar fundamental en el desarrollo científico y tecnológico (MEP, 2012; Mulero et al., 2013). Además, es de gran utilidad, en las ciencias exactas y naturales, ciencias sociales y tecnología, entre otras, las cuales se basan en modelos matemáticos para dar solución a diversos problemas del mundo real (Mulero et al., 2013; Porras y Castro-Rodríguez, 2021; Socas, 2011). En este contexto, el álgebra se considera una herramienta necesaria y de gran utilidad, pues se concibe como un medio eficaz de expresión de los pensamientos matemáticos a través de las ecuaciones, donde se establecen relaciones entre variables, patrones y estructuras algebraicas, entre otros (Socas, 2011).

En el entorno del sistema educativo costarricense, el Programa de Estudios de Educación Preescolar (MEP, 2014) especifica que esta etapa inicia con la construcción de las bases del conocimiento algebraico en forma intuitiva, por ejemplo, con las nociones de seriación, organización y ordenamiento de diversos objetos cotidianos a partir de ciertas características. Además, permite describir verbalmente regularidades en patrones recursivos.

Posteriormente, en la educación primaria, según el Programa de Matemática de Educación Primaria (MEP, 2012), se introduce al estudiante a través de nociones intuitivas en el estudio de relaciones y álgebra, por ejemplo, al trabajar sucesiones con números naturales, también en el reconocimiento de patrones numéricos y el manejo de expresiones simbólicas numéricas.

A la vez, se presenta el uso de los signos matemáticos y su significado, como signo de igualdad y los signos de operaciones aritméticas, entre otros. Con esto se logra desarrollar intuitivamente el pensamiento algebraico y funcional, principalmente al resolver problemas de contextos de la vida real, como establece el currículo de Costa Rica (MEP, 2012; Poveda, 2019).

A nivel de secundaria, se continúa con la formalización y la generalización de los conocimientos algebraicos construidos en forma intuitiva en educación primaria y se espera obtener un dominio adecuado en el tratamiento de símbolos algebraicos y sus relaciones con otras ramas de la matemática, como la geometría, funciones y estadística, entre otras. Al mismo tiempo, se estimula en el estudiante las habilidades de analizar, comprender y resolver los problemas matemáticos desde lo concreto hasta lo abstracto, preparándolo para la educación superior universitaria (MEP, 2012).

Por último, en la educación formal superior se profundiza y amplía la base conceptual algebraica construida en los niveles inferiores y se introduce a los estudiantes en cursos iniciales relacionados con contenidos matemáticos, cuya finalidad es que los puedan utilizar a lo largo de su carrera y les permitan desarrollar habilidades necesarias para un desempeño profesional exitoso (Escuela de Matemática, 2020).

De esa manera, se observa que la presencia del álgebra en la formación matemática de los estudiantes es bastante amplia. Sin embargo, en la actualidad ciertas investigaciones reportan que existen dificultades en este tema cuando los estudiantes ingresan al nivel superior, manifestadas a través de los errores que cometen en las actividades algebraicas que realizan (Gamboa et al., 2019; García, 2015; Olivar et al., 2018).

En estos estudios utilizan la definición brindada por Godino et al. (2004), los cuales definen el error como una acción o producción realizada por el estudiante, que no es válida desde el punto de vista institucional educativo donde, para lograr un aprendizaje adecuado, las respuestas incorrectas se consideran como dificultades e –incluso– fracasos.

Los estudios de Ramírez et al. (2010) y Gamboa et al. (2019), hechos con estudiantes de primer ingreso a las universidades públicas, expresan en sus resultados que los alumnos muestran dificultades algebraicas, evidenciadas a través de errores presentes al resolver preguntas de un examen diagnóstico. Por eso, es importante realizar investigaciones que estudien diversos aspectos del conocimiento algebraico, como los errores que cometen los estudiantes de educación secundaria, puesto que son de suma importancia en niveles posteriores (García et al., 2011; Kayani e Ilyas, 2014; Pianda, 2018).

Por otra parte, Rico (1995) señala que es común para el ser humano cometer equivocaciones, por lo que los errores pueden presentarse en cualquier momento del proceso de aprendizaje de un estudiante y estos constituyen parte relevante de su formación matemática. Debido a esto, el estudio de errores es un tema de interés permanente en la educación matemática (Rico, 1995), ya que son una posibilidad para la adquisición y afianzamiento del conocimiento, lo cual es claro al observar las diferentes disciplinas estudiadas por el hombre, donde se lograron múltiples avances gracias a conocimientos que se tomaron por verdaderos y que en la actualidad se sabe son erróneos (Rico, 1997).

Pese a lo anterior, en la sociedad actual y en particular en la educación matemática, los errores son considerados como elementos perjudiciales que no cuentan con una atención adecuada (Mancera y Basurto, 2015). En contraposición a esto, en la presente investigación se propone utilizar los errores como oportunidad de aprendizaje, que pueden ser de beneficio para los estudiantes, ya que al incluirlos en el aula de matemática pueden brindar información sobre medidas para su superación (García, 2015).

En la misma línea, el trabajo de Socas et al. (1996) subraya que analizar los errores puede contribuir a un doble propósito en la labor docente. En primer lugar, ayuda a organizar estrategias para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con énfasis en los aspectos que generan más conflicto y, en segundo lugar, favorece la preparación de estrategias para su corrección, necesarias para un buen desarrollo del conocimiento.

Por último, Rodríguez et al. (2012) mencionan que existen múltiples investigaciones centradas en conocer cuáles son las dificultades y errores que tienen los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y además, las causas que los originan. Sin embargo, los mismos autores señalan que en pocas ocasiones se hace referencia a cómo hacerlos útiles para conseguir un mejor entendimiento de los contenidos.

Por lo tanto, con esta investigación se pretende realizar un aporte a la educación costarricense, al realizar una propuesta de enseñanza para la atención de dificultades y promoción del aprendizaje del tema de ecuaciones, la cual utiliza los errores como recurso principal en el diseño de actividades para el aprendizaje de conceptos y algoritmos utilizados para resolver ecuaciones lineales con una incógnita. Esto se debe a que en el tema de ecuaciones lineales se inicia con la adquisición de ciertos algoritmos de solución de ecuaciones que son de utilidad en otros temas, como las funciones, geometría y estadística entre otros.

Mediante dicha propuesta se esperaba mejorar el aprendizaje de los estudiantes que presentaban dificultades en el último nivel de educación secundaria con la intención de brindar una mejor preparación del tema de ecuaciones, lo que les ayudará a enfrentar con éxito los distintos procesos algebraicos a los que pueden someterse en la educación superior (Parra, 2021).

1.3 Antecedentes

El propósito de esta sección es presentar investigaciones previas, relacionadas con el estudio propuesto. Se distribuyen en tres categorías: estudios donde se realiza una clasificación e interpretación de los errores algebraicos en las producciones realizadas por estudiantes, el papel del docente en la detección y tratamiento de los errores y, por último, la incorporación de los errores como parte de la metodología de enseñanza con el propósito de fomentar el aprendizaje en el aula de matemática.

Cabe destacar que la mayoría de los estudios que sirven de antecedentes para esta investigación son de carácter internacional, con excepción de Bolaños y Lupiáñez (2021) y Parra (2021), ya que este tema no ha tenido gran auge en la investigación en Costa Rica. Esto se fundamenta con búsquedas de investigaciones, realizadas en los repositorios de todas las universidades públicas del país, donde solo se han encontrado esas dos investigaciones.

Al realizar una revisión bibliográfica para la primera categoría, se analizan estudios que realizan clasificaciones de errores algebraicos de estudiantes. Tal es el caso del trabajo de Pérez et al. (2019), cuyo objetivo principal fue hacer una clasificación descriptiva de errores cometidos por 266 estudiantes de educación secundaria al resolver ecuaciones lineales y sus causas. Entre los resultados se destaca que existen dos categorías en las que se puede clasificar el error: relacionados con operaciones aritméticas (números enteros, fracciones y propiedad distributiva) y errores propios de las ecuaciones (concepto y procedimiento). Además, se atribuyó a sus causas dificultades en la asimilación de nociones aritméticas, manipulación de lenguaje algebraico y aplicación inapropiada de fórmulas o reglas de procedimiento.

De igual forma, los estudios de Ruiz (2018), Morales (2017) y Ruano et al. (2008) realizan un análisis de los errores algebraicos cometidos por estudiantes de educación secundaria. El primer estudio trabaja en la solución de inecuaciones lineales y encuentra que los errores más frecuentes están asociados con la comprensión y traducción de expresiones matemáticas, el desconocimiento teórico y el dominio de fórmulas y propiedades, errores en operaciones con fracciones algebraicas y dificultades en conocimientos previos.

El segundo estudio trabajó con estudiantes de undécimo y detectó errores en el uso del lenguaje algebraico al resolver problemas relacionados con procesos algebraicos, como sustitución, productos notables, operaciones algebraicas básicas y la solución de ecuaciones. En este estudio se resumen los errores encontrados en tres categorías principales asociadas con los usos de las letras, el signo de igualdad y errores en la aritmética.

Por último, el tercer estudio halló errores en tres procesos específicos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización. También, se encontró que los errores se presentan independientemente del tema trabajado en el aula y que pueden deberse a tres orígenes distintos: los obstáculos (epistemológicos, didácticos, cognitivos), ausencia de conocimiento en distintos sistemas de representación (errores con origen en la aritmética, de procedimiento y propios del lenguaje algebraico) y actitudes afectivas y emocionales (por ejemplo, falta de concentración, excesiva confianza y olvidos, entre otros).

En las conclusiones de los tres estudios se brindan recomendaciones similares para la labor docente, que son útiles para la investigación propuesta. Por ejemplo, el docente debe prestar mucha atención a la construcción de los conocimientos de sus estudiantes, con el fin de identificar los errores y sus orígenes, así como construir actividades y estrategias que sirvan para prevenir y abordar los errores para un proceso de superación y sanación de las dificultades presentadas (Morales, 2017; Ruano et al., 2008; Ruiz, 2018). Una muestra de estrategia de tratamiento de errores es incentivar la participación para generar un conflicto en la mente de los estudiantes y ayudarlos a sustituir conceptos erróneos por los adecuados.

Por su parte, los trabajos de Bolaños y Lupiáñez (2021), García (2015) y Parra (2021) clasifican e interpretan los errores en los que incurren estudiantes en los primeros cursos de matemática a nivel universitario en la resolución de tareas algebraicas. Los primeros dos estudios se centran en la comprensión del uso de las letras en las diferentes tareas algebraicas. Se encontró que los estudiantes manifiestan errores en diversos conceptos algebraicos, los cuales revelan ausencia de conocimiento tanto en la comprensión como el uso de las letras en el álgebra, lo que indica que existen vacíos conceptuales y procedimentales.

En concordancia, se considera importante conocer las fuentes comunes de los errores y, además, proponer estrategias que favorezcan su disminución en las que el docente planee e instruya utilizando las dificultades y que, al mismo tiempo, se asuma el reto de solventarlas, incluso con la ausencia de conocimientos previos (Bolaños y Lupiáñez, 2021; García, 2015).

En el tercer estudio, Parra (2021) realiza un análisis de los errores manifestados por estudiantes de Matemática Fundamental, que es el primer curso de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Se resolvieron tareas que abordaban la simplificación de expresiones algebraicas, mediante un seguimiento de las producciones en las pruebas escritas de dicho curso. De esa manera, el profesor puede establecer indicadores de consistencia en los errores manifestados por los estudiantes en sus producciones a través de presencia, regularidad, permanencia y estabilidad que estos presenten.

Como resultado se logró evidenciar que, al iniciar el curso, los errores encontrados están ligados al conocimiento que no fue desarrollado por los estudiantes en niveles preuniversitarios, por ejemplo, al efectuar sumas y restas de polinomios y operaciones propias de las ecuaciones, entre otros. El autor menciona que es importante que el docente pueda percibir y detectar los errores y dificultades, ser consciente de que estos afectan el aprendizaje de sus estudiantes y debe ser capaz de desarrollar dinámicas de clase utilizando los errores en el tratamiento curricular, es decir, para la corrección y reforzamiento del aprendizaje deficiente (Parra, 2021).

Por otra parte, en la segunda categoría de los antecedentes de esta investigación –el papel del docente en la detección y tratamiento de los errores– se destaca el trabajo de Ahumada (2015), que estudia el papel del docente en el proceso de tratamiento de los errores en el aula de matemáticas. En particular, la autora analiza, por medio de un estudio de caso, a profesores de secundaria, con el fin de conocer cómo ellos enfrentan y evidencian los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

Para esto lleva a cabo un análisis de los errores desde dos perspectivas: en primer lugar, un análisis del error, en el que se consideran errores de entrada, organización y ejecución. En segundo lugar, las fases de tratamiento: detección, identificación y rectificación del error. En sus resultados se encontró que los docentes mencionan que el error es una forma de aprender. Sin embargo, durante las lecciones esto no se evidencia. Más bien, se evita y su tratamiento se enfoca en la corrección y no en el proceso de reflexión de estos. Por consiguiente, se recomienda que los errores deben ser tratados en forma positiva, de modo que los estudiantes puedan identificarlos y tomar conciencia de su utilidad. De lo contrario, se impide la construcción de un aprendizaje significativo.

Por último, en la tercera categoría de investigaciones previas a este estudio –el uso de los errores como parte de la metodología de enseñanza– está la investigación de González et al. (2015), que identifica y describe los usos de los errores por docentes de matemática en educación secundaria. En el estudio participaron 26 docentes de secundaria de matemáticas y como parte de los resultados se obtuvo que existe una variedad de usos metodológicos del error que se pueden organizar en tres propósitos, que consisten en la superación del error, la evaluación del estado cognitivo de los estudiantes y la producción de información útil en aspectos de planificación. Asimismo, se destaca la importancia de que el docente conozca los errores que cometen sus estudiantes, ya que estos pueden ser utilizados para generar conflictos cognitivos y superar las dificultades presentadas.

A su vez, otras investigaciones como las de Escudero (2007), Barbarán y Fernández (2014) y Barbieri y Booth (2020) tienen como propósito principal utilizar el error como una herramienta para el aprendizaje significativo de los estudiantes, lo cual es innovador en el aula de matemática, aunque los errores no sean un tema nuevo (Barbarán y Fernández, 2014). Además, Torre (2004) señala que los errores son usados en la enseñanza de distintas materias, en especial los idiomas, lo que no ocurre en las ciencias exactas y naturales. Entonces, por la naturaleza de sus objetivos, estos estudios son de gran interés para la presente investigación. A continuación, se explica cada uno.

En primer lugar, el trabajo de Escudero (2007) tiene como objetivo general analizar el aprendizaje de los estudiantes al utilizar los errores como fuente de conocimiento en el tema de racionalización algebraica. Para eso se realizó una prueba de conocimiento previo a 400 estudiantes de primer ciclo de universidad. Luego, se dividieron en dos grupos, uno experimental y uno de control. Una vez obtenidos los resultados e identificados los errores cometidos por los alumnos, se procedió a aplicar en el grupo experimental la metodología de enseñanza a partir de los errores encontrados. En el grupo de control, se dieron las clases en forma tradicional. Por último, se hizo una comparación de los resultados obtenidos por ambos grupos.

En segundo lugar, el estudio de Barbarán y Fernández (2014) analiza las consecuencias de utilizar una metodología basada en análisis de errores en dos grupos del curso Cálculo Numérico de la Universidad de Granada. Para dicho análisis se confeccionó un cuaderno de trabajo con ejercicios de ecuaciones diferenciales ordinarias con distintos tipos de errores. Se utilizó en un grupo de control con una metodología de análisis de errores, mientras que en el otro grupo se trabajó con una metodología tradicional. Ambos grupos fueron evaluados antes y después de la aplicación de la metodología, con la intención de comparar sus resultados y dar un juicio de la metodología implementada.

En tercer lugar, el estudio realizado por Barbieri y Booth (2020) evalúa los efectos de incorporar ejemplos centrados en conceptos y procedimientos erróneos comunes en la matemática, específicamente en la resolución de ecuaciones cuadráticas. Dicho trabajo fue llevado a cabo con 11 grupos de octavo año de secundaria; de los cuales, algunos trabajaron la exposición de los errores a los estudiantes y otros siguieron la metodología tradicional. Así, se logró evidenciar que existe una mejora en la resolución de ecuaciones cuadráticas cuando el estudiante ya ha analizado y corregido algunos errores comunes, a diferencia de cuando se ponen en práctica las formas tradicionales.

Una conclusión común de los tres estudios es que, al utilizar los errores en los procesos metodológicos de enseñanza, se obtienen resultados positivos en el aprendizaje de los contenidos en los estudiantes (Escudero, 2007). Además, al estudiar y explicar los errores comunes que se presentan como ejemplos en los trabajos de aula, mejoran las habilidades de los estudiantes en la resolución de ecuaciones algebraicas (Barbieri y Booth, 2020). Al mismo tiempo, en comparación con la metodología tradicional, trabajar en el aula el uso de los errores dentro de los ambientes de aprendizaje mejora el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes (Barbarán y Fernández, 2014).

Finalmente, el conjunto de investigaciones presentadas evidencia la importancia de realizar la investigación propuesta, donde el conocimiento de los errores de los estudiantes, tanto en su clasificación como sus causas, sea utilizado como elementos trascendentales en ambientes pedagógicos, con la finalidad de lograr un aprendizaje matemático significativo del estudiantado.

1.4 Objetivos de investigación

1.4.1 Objetivo general

Elaborar una propuesta de enseñanza para la atención de dificultades y promoción del aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita tomando como base los errores matemáticos manifestados por un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria en Costa Rica.

1.4.2 Objetivos específicos

1. Describir los lineamientos y las recomendaciones presentes en los Programas de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública (2012) de educación secundaria, con respecto al uso de los errores matemáticos que cometen los estudiantes.
2. Clasificar los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria al resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.
3. Diseñar actividades de aprendizaje como propuesta de enseñanza que, con el uso de los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria, permita atender dificultades y reforzar el aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
4. Determinar el impacto de las actividades diseñadas en el aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita con base en los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria.

Capítulo II. Marco Teórico

En este capítulo se desarrolla una síntesis de principios y teorías adoptadas como respaldo fundamental que sirvió de referencia en la ejecución de las etapas posteriores de esta investigación. En primer lugar, se expone la teoría referente a las ecuaciones de primer grado con una incógnita según el criterio de varios autores y lo establecido en los Programas de Estudio de Matemática (PEM).

Además, se brinda una conceptualización del tema de errores y dificultades en educación matemática, seguida de algunos aspectos relacionados con los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita y cómo estos se pueden incluir en el trabajo de aula. Conjuntamente, se presentan clasificaciones de errores matemáticos, específicamente en ecuaciones de primer grado con una incógnita. Por último, se expone la pedagogía del error de Torre (2004), como propuesta metodológica para el tratamiento y rectificación de los errores presentados por los estudiantes que participaron.

2.1 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

El álgebra se ha ido complementando durante el transcurrir del tiempo con múltiples avances para mejorar el entendimiento de sus propiedades y su aplicación en diversos fenómenos de la vida cotidiana. En la actualidad, se ha ampliado a diferentes ramas del conocimiento y la ciencia a través de sus distintos enfoques (García, 2015), como la generalización, modelización y resolución de problemas (Socas, 2007). Sin embargo, para Godino et al. (2012) el álgebra trasciende más allá del uso como lenguaje simbólico o instrumento de modelización, ya que constituye una manera de pensar y actuar en las matemáticas y promueve nuevos niveles de creatividad y razonamiento en distintas áreas de conocimiento (Godino et al., 2012).

Comprendiendo el avance y la evolución que ha tenido el álgebra en el tiempo y sus distintas formas de ser expresada, para definir una ecuación se debe comenzar por definir el concepto de expresión algebraica, entendiéndola como la unión de cantidades numéricas y literales, relacionadas entre sí mediante diferentes operaciones, como la adición, el producto, la potenciación y las respectivas operaciones inversas de cada una. Por tanto, una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas (Madrid et al., 2019).

En esta investigación el interés se centra en las ecuaciones de primer grado con una incógnita. De acuerdo con Moreno y Castellanos (1997), esta corresponde a una expresión en lenguaje simbólico representada de la forma algebraica $Ax + B = C$, donde A, B, C constituyen valores conocidos de algún conjunto definido previamente con $A \neq 0$. Por otro lado, la incógnita corresponde al elemento representado por la letra "x", es decir, un valor fijo, pero a la vez desconocido que se necesita determinar (Wilhelmi et al., 2014).

Aunado a esto, para darle solución a la ecuación, es decir, encontrar el valor desconocido, es necesario desarrollar habilidades cognitivas que establezcan la relación entre las cantidades numéricas, la incógnita y el significado de la igualdad. Asimismo, se debe estimular la comprensión del procedimiento a través del razonamiento lógico y operacional (Moreno y Castellanos, 1997).

En ese sentido, en el contexto educativo costarricense, según el MEP (2012) el tema de ecuaciones lineales se desarrolla en el nivel de octavo año. En este punto es en el que se adquieren habilidades, como identificar la diferencia entre una expresión algebraica y una ecuación, comprobar si un número dado es o no solución de una ecuación, reducir una ecuación a otra que es equivalente a ella, plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita, resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita y ecuaciones algebraicas fraccionarias que se reducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita. Estas habilidades son las que se deben utilizar para resolver ecuaciones, con expresiones bien definidas de la siguiente forma:

- $ax = c,\ ax + b = c$
- $ax + b = cx + d$
- $ax \pm (cx \pm b) = d$
- $a(bx \pm c) = d(ex \pm f)$
- $ax \pm (bx \pm c) = dx \pm (ex \pm f)$
- $\frac{x}{c} \pm a = \frac{b}{d}$
- $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$

Además, estas destrezas desarrolladas son de utilidad en temas de niveles posteriores, como funciones, geometría y estadística, donde –en algunas ocasiones– se necesita determinar un valor desconocido a partir de cierta fórmula y para eso se requiere el uso de estas habilidades previamente adquiridas.

No obstante, en las indicaciones puntuales del PEM únicamente se muestra las habilidades y el tipo de ecuaciones que se deben desarrollar, mas no se indica ningún método específico a seguir al momento de explicarles a los estudiantes cómo resolver las ecuaciones ni cómo este tipo de procedimientos se puede generalizar para los demás tipos de ecuaciones abordadas en secundaria.

2.2 Errores y dificultades en la educación matemática

A lo largo de la historia, los errores han sido motores de cambios significativos en diferentes ramas del conocimiento científico (Livio, 2013; Lucchini et al., 2006). Por ejemplo, Sócrates mencionaba que es común equivocarse y cometer errores. Sin embargo, la idea de un error está en dar con la verdad, por lo cual se debe buscarla examinando frecuentemente los errores mediante la crítica racional y la autocrítica (Rico, 1997).

Para este estudio, se asume el término de error como una muestra de un conocimiento parcialmente desarrollado en el que se tienen percepciones inadecuadas de ciertos objetos matemáticos mediante el uso de procedimientos equivocados desde un punto de vista matemático (Olmedo et al., 2015; Rico, 1997).

En ese sentido, Rico (1997) señala que en el aula de matemáticas los errores tienden a crear una línea divisoria entre dos tipos de profesores de matemáticas: el que mantiene una posición tradicional y el que propone y se adapta a posiciones modernas con respecto a la enseñanza. El primer tipo de profesor considera el error como una muestra de desconocimiento en el estudiante o el grupo como tal y esto debe ser corregido o –en el debido caso– sancionado.

El segundo tipo de profesor lo asume como un elemento de un conocimiento construido parcialmente que –para su tratamiento– el docente debe contribuir para evitar que se ocasionen bloqueos, rechazos o sanciones. Asimismo, brinda la oportunidad de generar conflictos en el conocimiento de los estudiantes con la intención de potenciar un aprendizaje significativo en ellos.

Por otra parte, Parra (2021) indica que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden concebirse como “una carencia, conocimiento deficiente, incompleto o contrariedad, que es causa de uno o varios errores matemáticos” (p. 22), las cuales se deben a diversas situaciones que se entrelazan y pueden comprender desde una planificación deficiente hasta la propia naturaleza de la matemática (Herrera, 2010).

Asimismo, Abrate et al. (2006) mencionan que, al tener en cuenta los diversos procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, existen múltiples dificultades que pueden generar errores en las producciones de los estudiantes, las cuales se pueden agrupar de la siguiente manera:

- **Dificultades asociadas con la complejidad de los objetos matemáticos:** Se relacionan con la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, como la interpretación de los signos matemáticos y el uso de lenguaje ordinario dentro de los contextos matemáticos.
- **Dificultades asociadas con los procesos de pensamiento matemático:** Se vinculan con los procesos de pensamiento matemático, donde influye directamente la naturaleza lógica de las matemáticas.
- **Dificultades asociadas con los procesos de enseñanza:** Se encuentran ligadas con la institución escolar, el currículo de matemática y los métodos de enseñanza, como la metodología y la secuencia de trabajo en clase, además de los recursos disponibles.
- **Dificultades asociadas con el desarrollo cognitivo de los alumnos:** Se deben a las incongruencias entre las estrategias y recursos planteados con las características y capacidades de los estudiantes.
- **Dificultades asociadas con las actitudes afectivas y emocionales:** Son propias de la percepción de cada estudiante y se pueden relacionar con las actitudes y creencias hacia la matemática. Por ejemplo, muchos estudiantes sienten ansiedad y miedo hacia esta, lo que genera bloqueos en el conocimiento del alumno.

Tomando en cuenta lo anterior, en el campo de la educación matemática, el estudio e investigación relacionada con los errores y dificultades han sido de gran interés (López et al., 2019; Socas, 2011; Vasco y Climent, 2020), por ejemplo, al explorar su potencialidad en los procesos de enseñanza y contribuir a su eliminación (Vizcarra y Gómez, 2016). Con respecto a esto, Rico (1995) realiza una propuesta de cuatro líneas de investigación, en las que se enmarcan algunos estudios de errores según los siguientes objetivos:

- **Analizar errores y las causas que los producen:** Este tipo de estudios busca explicar, por medio de una teoría psicológica o psicopedagógica, clasificaciones de errores detectados previamente, es decir, proporcionar un marco explicativo en el análisis de estos y ofrecer una metodología adecuada para aumentar el conocimiento correcto de los estudiantes. También aquí se involucran investigaciones que utilizan una aproximación teórica desde un planteamiento epistemológico o estrictamente matemático, por ejemplo, los estudios que tratan de establecer causas estructurales para los errores debidos a la propia naturaleza del conocimiento matemático.
- **Realizar un tratamiento curricular de los errores en el aprendizaje matemático:** Son trabajos que se organizan en la didáctica de la matemática, como los estudios de enseñanza diagnóstica de los errores, que tratan de prevenir, detectar y proponer estrategias para su corrección. Otros ejemplos de esta línea de investigación son las indagaciones que contemplan los errores como plataformas para incentivar la investigación de los contenidos matemáticos. Igualmente, en esta línea se incluyen los trabajos sobre evaluación y el papel que desempeñan los errores en las valoraciones que se deben realizar sobre las producciones de los estudiantes.
- **Estudiar los errores en la formación de los docentes:** Son estudios dedicados a determinar qué es conveniente que aprendan los docentes en relación con los errores que cometen los estudiantes.
- **Caracterizar técnicamente cómo se implementa y sostiene una determinada clase de análisis sobre errores:** Aquí se ubican estudios de orientación psicométrica, trabajos con técnicas de análisis para contrastar hipótesis alternativas que justifican el origen o causa de un determinado error.

En relación con lo anterior, la presente investigación se enmarcó en las dos primeras líneas propuestas por Rico (1995). Más precisamente, a partir de la clasificación de errores cometidos por un grupo de estudiantes de undécimo año, este estudio logró construir y aplicar una propuesta que favoreció la disminución de las dificultades presentadas en el tema de ecuaciones lineales de una incógnita. Al mismo tiempo, la propuesta coincide con Torre

(2004), en el sentido de exponer la necesidad de conocer y aprender de los errores, por ejemplo, al usarlos didácticamente, y estimular el aprendizaje a través de las equivocaciones, con el fin de "proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la naturaleza de las Matemáticas" (Socas, 2007, p. 23).

2.3 Errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita

De acuerdo con Pérez et al. (2019), las ecuaciones lineales con una incógnita representan uno de los contenidos más relevantes en el ámbito algebraico. Al mismo tiempo, Hall (2002) indica que los algoritmos que se aprenden al resolver ecuaciones lineales son de utilidad en diferentes áreas, como física, geometría, estadística y otras, a lo largo de la educación secundaria. Esto resalta la importancia de profundizar en la enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático, en particular al estudiar los errores que cometen los estudiantes al aprenderlo.

No obstante, Pérez et al. (2019) afirman que el estudio de los errores y dificultades específicamente en el tema de ecuaciones lineales es escaso y la literatura investigativa existente del tema se encuentra desactualizada, pues se realizó hace más de cuatro décadas en los años 80 y la mayoría de los trabajos son clasificaciones de errores en la resolución de ecuaciones y las causas que los producen.

Investigaciones más recientes se han centrado en trabajar los errores desde una perspectiva más general, las cuales "tratan de captar las dificultades de los estudiantes en todos los aspectos que conlleva el aprendizaje del lenguaje algebraico" (Pérez et al., 2019, p. 85), por ejemplo, al conceptualizar, simbolizar, generalizar o razonar algebraicamente (Pérez et al., 2019). Algunas muestras de aportes en esta línea son los trabajos de Bolaños y Lupiáñez (2021) y Parra (2021).

Teniendo en cuenta lo anterior, al ser un campo de investigación muy amplio, se dificulta observar a profundidad los errores y dificultades de un tema específico (Pérez et al., 2019), como las ecuaciones lineales. Por tanto, se hace necesario realizar estudios centrados en los errores y dificultades propiamente del objeto matemático en cuestión (Pérez et al., 2019; Hall, 2002), como se propuso en este trabajo, con la finalidad de promover estrategias de corrección y solventar las dificultades que los estudiantes presentan en forma específica.

Por otra parte, Hall (2002) indica que –independientemente de cualquier proceso de aprendizaje– resulta imposible saber con certeza si un alumno sabe o entiende un tema por completo, lo que hace recomendable que el profesor realice una aproximación por medio de errores que cometen los estudiantes en sus procedimientos matemáticos.

En ese sentido, es necesario realizar un aporte a la investigación al enriquecer las categorías de errores específicas del tema de ecuaciones lineales con una incógnita y, además, presentar una propuesta que haga inclusión de estos en los ambientes de aprendizaje, con la intención de reforzar los conocimientos de los estudiantes en ese contenido matemático.

2.4 Categorías de errores algebraicos

Entre las clasificaciones más relevantes en el análisis de errores se encuentra la categorización general brindada por Movshovitz-Hadar et al. (1987), quienes indican que los errores en educación matemática y su mayoría en álgebra se pueden agrupar en seis categorías:

1. **Datos mal utilizados:** Producto de alguna discordancia entre los datos y el tratamiento que le da el estudiante. Es decir, dichos errores surgen al juntar los datos o bien, al procesarlos, por ejemplo, olvidar un dato importante para la solución de un problema, así como también errores en la transcripción de los ejercicios.

2. **Interpretación incorrecta del lenguaje:** Son aquellos errores matemáticos que tratan con una traducción incorrecta de hechos matemáticos de un lenguaje a otro, por ejemplo, al traducir de lenguaje verbal escrito a lenguaje simbólico algebraico.

3. **Inferencias no válidas lógicamente:** Son errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben a un contenido en particular, por ejemplo, al realizar una deducción inválida de información presentada previamente.

4. **Teoremas o definiciones deformados:** Se trata de errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición matemática.

5. **Falta de verificación en la solución:** Estos errores se presentan cuando cada paso de la realización de una tarea es correcto y el resultado final no corresponde a una solución plausible. En otras palabras, la posible solución no cumple con una o varias hipótesis

requeridas. También, puede darse al omitir condiciones necesarias al resolver una ecuación. Por ejemplo, todo denominador de una fracción debe ser diferente de cero.

6. **Errores técnicos:** Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo al tomar datos erróneamente de una tabla, la manipulación incorrecta de símbolos algebraicos, como el uso de paréntesis y otros derivados de la ejecución de algoritmos incorrectos que corresponden a conocimientos del nivel de primaria y secundaria.

De la misma manera, en una de las clasificaciones presentadas por Rodríguez (2015), los errores se dividen en dos grupos:

1. **Errores del álgebra con origen en la aritmética:** Aquí se ubican los errores debidos a dificultades que no se resolvieron en el aprendizaje de la aritmética y repercuten en el conocimiento algebraico, por ejemplo, errores en la confusión con las operaciones con fracciones, el signo "$-$" delante de un paréntesis, el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento, entre otros. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente por suponer que un operador es lineal, cuando no lo es. Entre estos errores se distinguen: a) errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, b) errores relativos al uso de recíprocos y c) errores de cancelación.

2. **Errores de álgebra debidos a las características propias del simbolismo algebraico:** Son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética. Algunos ejemplos son el sentido del signo "$=$" en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal (Rodríguez, 2015, p. 53).

Al mismo tiempo, para tener un acercamiento más preciso en el tema tratado en esta investigación, se presenta la clasificación propuesta por Kieran (1992), citado por Rosas (2013), que describe algunos errores y preconcepciones matemáticas que se presentan con regularidad en los estudiantes al resolver problemas ligados a ecuaciones algebraicas lineales de una incógnita:

a) Traducción de un lenguaje semántico a expresiones algebraicas con números, operaciones y variables.

b) Consideración de las letras, incógnitas, como etiquetas y no como una relación de equivalencia entre variables y números.

c) Pérdida del significado de las variables que satisfacen una ecuación algebraica.

d) Uso del signo igual (=) como una relación simétrica de equivalencias en ambos lados.

e) Convenciones de notación. Mientras que en la aritmética se utilizan ciertos símbolos para las operaciones fundamentales, como la multiplicación, en el álgebra pasa de representarse con una equis "×" a representarse con un punto " · " y el uso de la *x* para la representación de variables.

f) Dificultad en el intercambio de sumandos, es decir, la incapacidad de comprender la transposición de términos, como *cambiar de lado-cambiar de signo.*

Posteriormente, en el caso específico de las ecuaciones lineales con una incógnita, Hall (2002) presenta una categorización donde se mencionan aspectos importantes para la comprensión y el análisis de los errores que presentan los estudiantes al trabajar las ecuaciones de primer grado con una incógnita, las cuales se encuentran asociadas con reglas de procedimiento de resolución e interpretaciones que les dan sentido. Las categorías son las siguientes:

a. Errores por la estructura algebraica en la ecuación

Durante la educación primaria y parte de la educación secundaria del estudiante, los métodos de solución de algunos ejercicios se enfocan en realizar operaciones aritméticas, es decir, trabajar con números cuyo resultado final también es un número. Sin embargo, al iniciar el tema de las ecuaciones lineales con una incógnita, las operaciones se vuelven más estructuradas, dependientes de los conocimientos y procedimientos algebraicos, cuya estructura no es tan evidente para los estudiantes, lo que les generando confusión. Por ejemplo, en la expresión $0 = 7x - 4 \implies 0 = 3$, se encuentra un error que sucede al operar con términos algebraicos no semejantes, excluir la variable x de la parte derecha de la ecuación y brindar más importancia a la operación numérica $7 - 4$ y a su resultado.

b. Errores al aplicar operaciones inversas

Estos errores se producen debido a que no se comprende el concepto y objetivo de cada una de las operaciones algebraicas y su operación inversa, al resolver ecuaciones lineales con una incógnita. Dicho de otra forma, no se entiende que la operación inversa de la suma es la resta y viceversa, y la operación inversa de la multiplicación es la división y viceversa.

Por ejemplo, en la ecuación $4x = 1$ el estudiante puede cometer el error $x = 1 - 4$, al no analizar y comprender que entre el valor de 4 y la variable x se sobreentiende que se encuentra la operación multiplicación, por lo que se debe aplicar la operación inversa de la multiplicación con el valor de 4. Es decir, se tiene que dividir entre 4. Se comete un error al observar este número como una cantidad positiva y cambiarlo a restar al otro lado del igual, con lo que se incurre en un error de aplicación de la operación inversa.

c. Errores de transposición y orden de las operaciones

Este tipo de error surge cuando no se reconoce el orden de prioridad de las operaciones y se realizan inconsistencias al trasponer términos de un lado a otro del igual. Por ejemplo, en la expresión $\frac{x}{2} + 3 = 5 \implies x + 3 = 2 \cdot 5 \implies x + 3 = 10$, se observa que el denominador 2 se ha transpuesto en la parte derecha de la ecuación antes del valor de 3, se multiplica dicho valor por 5 y se obtiene como resultado 10, por lo que se incurre en un error en el orden prioritario de las operaciones involucradas en la ecuación.

d. Errores debidos a la falta de compresión de los algoritmos

En ocasiones puede que, al plantear una ecuación a un estudiante, este no escriba el procedimiento matemático para resolverla, lo que genera posibles conjeturas sobre el porqué de esta acción. Por ejemplo, esta situación se puede deber a la falta de comprensión de los algoritmos. En otras palabras, los estudiantes no comprenden que, para solucionar una ecuación lineal, uno de los métodos es la repetición de dos procesos, deducción y reducción.

El primer proceso (deducción) consiste en aplicar la misma operación algebraica a ambos lados de la ecuación para mantener la igualdad y el segundo (reducción) implica reemplazar una ecuación algebraica por otra equivalente, al realizar las operaciones necesarias con términos semejantes en ambos extremos de la ecuación. Esto se ejemplifica a continuación:

$$3x + 7 = 2x$$

$$3x + 7 - 2x = 2x - 2x\ (deducción)$$

$$x + 7 = 0\ (reducción)$$

Los estudiantes se pueden confundir sin saber en qué paso se encuentran y lo que están trabajando. De hecho, es probable que ni siquiera hayan notado que el algoritmo que se utiliza para resolver ecuaciones cuenta solamente con dos pasos que se repiten cierta cantidad de veces.

De acuerdo con Hall (2002), esto puede deberse a que se enseña algoritmos demasiado pronto y se asume que –una vez explicados– los estudiantes los recordarán y es claro que eso no ocurre. Por consiguiente, debe existir un constante reforzamiento de los métodos algebraicos que se utilizan para resolver ecuaciones lineales, ya que los estudiantes suelen dejar de lado el razonamiento al trabajar el objeto matemático en estudio.

Complementariamente, se considera relevante el aporte realizado por Pérez et al. (2019), quienes realizan una clasificación descriptiva de los errores desde el objeto matemático a partir de diversas investigaciones, entre ellas Hall (2002). Asimismo, señalan que, en el caso específico de las ecuaciones lineales de una incógnita, se debe considerar el conocimiento matemático previo, que es imprescindible para resolver una ecuación, tales como las reglas de procedimiento de resolución y las interpretaciones que les brindan sentido. De esa manera, logran distinguir tres categorías de errores, los cuales se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. *Clasificación de errores en ecuaciones lineales*

Tipo de error	Descripción	Ejemplo
Errores aritméticos	Errores al efectuar operaciones básicas con números enteros.	$3x = -5 + 3 \Rightarrow 3x = -8$
	Errores al efectuar operaciones básicas con números racionales.	$\frac{5x}{2} + \frac{x}{3} = 2 \Rightarrow \frac{6x}{5} = 2$
	Errores en la propiedad distributiva, por ejemplo, al realizar esta propiedad en forma incompleta.	$3(x + 5) = 2 \Rightarrow 3x + 5 = 2$

Tabla 1. *Clasificación de errores en ecuaciones lineales*

Errores algebraicos propios de las ecuaciones "Errores de concepto"	Confundir el término con la incógnita y término independiente. Es decir, el estudiante suma el término con incógnita con uno que no lo tiene, lo que representa una simplificación de términos no semejantes.	$5(2x+1)=7 \Rightarrow 5(3x)=7$
	Error en el coeficiente: Consiste en que los estudiantes transponen al otro miembro el coeficiente de la incógnita como si estuviese sumando, en lugar de multiplicando.	$6\text{x}=5 \Rightarrow x=5-6$
Errores algebraicos propios de las ecuaciones "Errores de procedimiento"	Se pueden producir al usar el método de balanza, es decir, aplicar la misma operación a ambos lados de la igualdad. No obstante, los estudiantes lo realizan solo en uno de estos.	$7\text{x}-8=3 \Rightarrow 7\text{x}-8+8=3$
	Si para obtener la solución de una ecuación, se utilizan las operaciones inversas en forma incorrecta.	$-3\text{x}=-1 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$
Errores mixtos aritméticos algebraicos	Error en la jerarquía de las operaciones: Estos se producen cuando se realizan transposiciones en el orden incorrecto.	$\frac{3x}{2}+6=4 \Rightarrow 3\text{x}+6=8$

Fuente: Pérez et al. (2019).

En ese sentido, las clasificaciones presentadas por Hall (2002) y Pérez et al. (2019) serán de mucha utilidad en el momento de clasificar los errores de los estudiantes que se considerarán en la elaboración de la propuesta central de este estudio porque, al conocer los errores de los estudiantes y cómo se clasifican, se podrá hacer énfasis en aquellos conocimientos de los estudiantes que presentan más dificultades y así llevar a cabo el diseño de la propuesta para atender dificultades y reforzar el aprendizaje que se persigue en esta investigación.

2.5 Propuesta de enseñanza

Toda actividad de enseñanza donde se requiera que el estudiante sea capaz de almacenar, tratar, asimilar, integrar y transferir información es dependiente de las estrategias didácticas que se utilicen para lograr ese objetivo. De esa forma, una propuesta de enseñanza está compuesta por distintas actividades de aprendizaje, con el fin de promover el desarrollo del conocimiento en los estudiantes (Meneses, 2007).

En ese sentido, Fernández et al. (2018) definen las actividades de aprendizaje como un constructo de elementos organizados para la enseñanza, como objetivos, contenidos, estrategias, actividades de enseñanza y aprendizaje, actividades de evaluación y la solución de estas, donde el estudiante puede valorar el resultado de su trabajo. Dichos elementos son definidos de la siguiente manera:

- **Objetivos:** Son las propuestas o metas que se desea que logren los estudiantes.
- **Contenidos:** Corresponden a los conocimientos precisos que se ajustan a la formulación de los objetivos, ya que estos son propios del área de estudio.
- **Actividades de enseñanza y aprendizaje:** Son tareas para ejercitar, guiar, repasar, asimilar nuevas ideas y afianzar los conocimientos.
- **Actividades de evaluación:** Permiten comprobar si el estudiante domina o no los conocimientos.
- **Soluciones de las actividades de evaluación:** Son las respuestas comentadas, con el fin de insertar claves que permitan comprobar los aciertos y errores del estudiante (Fernández et al., 2018, p. 45).

En esta investigación, la propuesta a diseñar tiene como propósito fortalecer los conocimientos y habilidades de los estudiantes al resolver ecuaciones lineales, mediante una metodología que incorpore el uso de los errores de los mismos alumnos en los ambientes de aprendizaje.

2.6 Pedagogía del error: una propuesta de enseñanza para el tratamiento y rectificación de los errores

En investigaciones relacionadas con el pensamiento algebraico, se ha destacado la importancia de los errores dentro del aula de matemáticas como medio para identificar y diagnosticar dificultades en los estudiantes, así como elemento vital para potenciar el desarrollo del conocimiento algebraico (Socas, 2011). Por otro lado, lejos de considerar el álgebra como difícil, este estudio parte de la idea de que puede aprenderse de una forma divertida y significativa bajo una idea constructivista (Méndez et al., 2018), utilizando los errores matemáticos para esto.

Con respecto a la idea principal del constructivismo, Lira y Pérez (2011) indican: “aprender y enseñar, lejos de ser meros procesos de repetición y acumulación de conocimientos, implican transformar la mente de quien aprende, que debe reconstruir a nivel personal los productos y procesos culturales con el fin de apropiarse de ellos" (p. 6). Por tanto, en este trabajo se considera que todo proceso de enseñanza-aprendizaje debe basarse en la actividad creadora del estudiante, ya que este es el principal responsable de su propio aprendizaje, por lo que debe hacer conciencia sobre cuáles son sus limitaciones y errores, y cómo debe resolverlos (Lila y Pérez, 2011).

Además, de acuerdo con Astolfi (1999), en el modelo constructivista los errores no se visualizan como una falta a castigar o un fallo a lamentar. Por el contrario, son características interesantes de las dificultades que manifiestan los estudiantes. Por eso, el mismo autor señala que el docente debe interesarse por ellos, dado que los errores son indicadores del progreso y comprensión conceptual de los estudiantes.

De esa forma, al entender el proceso de enseñanza como una secuencia de acciones de actuación pedagógica que influyen en el aprendizaje del estudiante (Calzado, 2004) y el error como un componente inseparable de la vida y el proceso de aprendizaje, se pueden generar estrategias de enseñanza y hacer que estos sean útiles, en el sentido de que permiten mejorar el aprendizaje (Torre, 2004).

Bajo las consignas anteriores, surge la pedagogía del error, encargada de analizar los conocimientos construidos por los estudiantes y, a través de los errores que cometen, diagnosticar cuáles son los conceptos o contenidos en los que presentan dificultades y necesitan ser mejorados, con el fin de brindarles una ayuda adecuada con la finalidad de erradicarlos o bien, disminuir su aparición (Torre, 2004).

Así, a diferencia de una enseñanza tradicional, donde el error se trata de evitar por ser considerado como un elemento perjudicial, en la pedagogía del error se busca hacer una integración de los errores dentro de los procesos de enseñanza para ser aprovechados, con la intención de darles un tratamiento adecuado y una posible solución (Torre, 2004).

Además, de acuerdo con esa idea, "el error consigue un nuevo estatus; el de indicador y analizador de los procesos intelectuales puestos en juego" (Astolfi, 1999, p. 15). Entonces, en lugar de crear un distanciamiento con ellos, se puede profundizar en su lógica para sacarles provecho en la mejora de los aprendizajes (Astolfi, 1999). Asimismo, al darle corrección a un error, se previene la aparición de estos en un futuro. Por eso, Torre (2004) propone tres fases de tratamiento de los errores matemáticos, las cuales se presentan a continuación:

1. **Detección de errores:** En esta primera fase de tratamiento didáctico de los errores, es de suma importancia, debido a que, mientras no se localicen y se tome conciencia de estos, es imposible seguir adelante. Dicha detección puede ser realizada por el docente, el alumno o sus compañeros. Todo depende del tipo de error que se esté tratando.
2. **Identificación de los errores:** Muchas veces, el tratamiento del error se queda únicamente en su localización, sin avanzar en su identificación para poder tener una descripción y posible causa de este. En esta fase, se procura hacer un diagnóstico de los errores, con el fin de proporcionar información suficiente para su posterior rectificación.
3. **Rectificación de errores:** Una vez localizado e identificado el error, se llega a su objetivo final, su corrección y posible eliminación. Aquí, el proceso pretende provocar un cambio en el conocimiento del estudiante y, a diferencia de un enfoque tradicional de enseñanza, en la pedagogía del error se involucran los errores dentro de su corrección.

Una vez identificada la existencia de errores en la clase de matemática, el siguiente paso consiste en identificar la manera en que a estos se les puede dar una posible solución. De esa forma, Torre (2004) propone una serie de estrategias y actividades centradas en la corrección y rectificación de los errores, que son las siguientes:

a) **Ficha-registro de errores:** Esta estrategia se fundamenta principalmente en la observación y registro sistemático de los errores en los que incurren los estudiantes con más frecuencia.
b) **Corregir o mejorar un ejercicio:** Con apoyo de la estrategia anterior, se pueden introducir los errores más frecuentes en ejercicios, textos o bien, solicitar a los estudiantes que, de forma individual o en grupo, localicen, identifiquen y corrijan.
c) **Segunda oportunidad:** Se trata de dar al estudiante una segunda oportunidad para presentar los trabajos o ejercicios, una vez que el profesor le haya entregado las observaciones correspondientes.

d) **Corrección cooperativa:** Entendiendo el aprendizaje como un proceso social-constructivo, esta estrategia se fundamenta en la rectificación de los errores a través del apoyo del profesor y los otros estudiantes.
e) **Revisión de ejercicios mal resueltos:** Esta estrategia contribuye a la identificación de ciertos procesos, desde su planteamiento hasta su ejecución. Incluso, se puede delimitar el tipo de errores que se quieren abordar, ya sean de nivel operativo o bien, de planteamiento.
f) **A la caza del error del profesor:** Consiste en que el docente plantea un juego con distintos tipos de ejercicios con errores y estos deben ser encontrados por los estudiantes. Si el estudiante descubre el error, puntúa a su favor y en caso contrario, puntúa el profesor.
g) **Autorreflexión-metacognición:** Consiste en una estrategia de análisis del mismo fracaso, en el caso de resultados inesperados (bajos resultados). Aquí se hace útil recurrir a una descripción de los errores cometidos, pensar cómo ocurrieron y a qué se debieron.

Con los sustentos teóricos expuestos, se evidencia la importancia de integrar los errores dentro de la enseñanza de la matemática y la existencia de diversas estrategias para hacerlo, a través de una propuesta metodológica: la pedagogía del error. Es decir, se propone un proceso de enseñanza que inicia con la caracterización y diagnóstico de las dificultades de los estudiantes, para después ejecutar acciones de aprendizaje de una manera activa, con la intención de contribuir al desarrollo del conocimiento matemático significativo de los estudiantes, específicamente el contexto matemático de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Capítulo III. Marco Metodológico

En este capítulo se presentan los elementos clave del diseño metodológico de la investigación. Se describe el paradigma, el enfoque y el método utilizados en la investigación. Además, se detallan los participantes del estudio, las técnicas e instrumentos usados para recopilar información, la forma en que se procesaron los datos y el proceso de análisis e interpretación de estos.

3.1 Paradigma, enfoque y método de la investigación

El paradigma en el cual se encuentra esta investigación corresponde al interpretativo, ya que según Gil et al. (2017) este paradigma "centra su estudio en los significados de las acciones humanas y la vida social" (p. 73). En este caso, es el análisis de los errores que realiza un grupo de estudiantes de undécimo en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita y su posterior implementación dentro de los entornos de aprendizaje, a través de una propuesta de enseñanza para el tema de ecuaciones lineales.

También, el estudio se enmarca dentro de un enfoque de investigación cualitativo, entendiendo que este "se enfoca en comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto" (Hernández-Sampieri et al., 2010, p. 364).

Lo mencionado se acopla a la presente investigación, pues se analizó a través de las producciones escritas cuáles son los errores matemáticos que cometen los estudiantes de undécimo al resolver ecuaciones con una incógnita, para uso posterior en la elaboración de una propuesta de enseñanza, la cual se implementó con la finalidad de atender dificultades y reforzar el aprendizaje del objeto matemático en cuestión.

Esto se debe a que el análisis de los errores que cometen los estudiantes en los diversos procesos de aprendizaje brinda mucha información sobre cómo se está desarrollando el conocimiento matemático y, además, puede brindar las herramientas para potenciarlo (Del Puerto et al., 2006).

Por último, el método de investigación que se utilizó correspondió a un estudio de caso. En este tipo de estudio se "investigan e informan las complejas interacciones dinámicas y en desarrollo de eventos, relaciones humanas y otros factores en una única instancia" (Cohen et al., 2007, p. 253), con el fin de entender las percepciones personales de los informantes sobre los acontecimientos. Por lo tanto, se trata de una rica descripción contextualizada de hechos relevantes para el caso, la cual es combinada con el análisis de estos, a través de una observación profunda de la realidad, que conduce a una visión completa del fenómeno y su complejidad (Alfaro et al., 2015).

En la investigación educativa dicho método está compuesto por diferentes etapas que se ordenan de forma lógica y se complementan entre sí con un objetivo definido previamente. Además, ayuda a entender y diagnosticar una determinada situación, debido a que brinda la posibilidad de examinar rasgos individuales del aprendizaje y el conocimiento de los estudiantes, que con otros métodos podrían no considerarse (Soto y Escribano, 2019).

Por su parte, el estudio de caso fue de carácter intrínseco (Stake, 1998), pues en él existía un interés personal sobre este por parte del investigador, que se dio a la tarea de conocer y aprender sobre los errores del grupo de estudiantes de undécimo año que participaron en el estudio. Para eso analizó los distintos errores que cometieron los alumnos durante las diversas etapas de la investigación y su evolución posterior a la incorporación en el aula para la atención de dificultades y el reforzamiento del aprendizaje del tema de ecuaciones lineales con una incógnita.

3.2 Fuentes de información

A continuación, se describen las fuentes primarias de información para el estudio, así como el criterio de selección de cada una de ellas.

3.2.1 Participantes del estudio

Los participantes en este proceso fueron los estudiantes de un grupo de undécimo año con una edad promedio de 17 años, de la sección 11-1 del centro educativo Liceo de Heredia, durante el curso lectivo del año 2022. En los siguientes apartados se clarificarán las razones de esta escogencia.

Criterios de selección de los estudiantes participantes para la propuesta de enseñanza

Se seleccionó el nivel de undécimo año, pues este es el último nivel de estudio de educación secundaria académica, en el que los estudiantes deben haber desarrollado las habilidades y adquirido los conocimientos algebraicos de los niveles educativos previos, específicamente en el contenido de las ecuaciones de primer grado. Por consiguiente, se espera que posean dominio de este tema.

Además, es el nivel previo más cercano a la educación superior, donde la investigación realizada en cursos iniciales de matemática universitaria ha identificado errores matemáticos de los estudiantes ligados a los conocimientos desarrollados durante la educación secundaria (Gamboa et al., 2019; García, 2010; Parra, 2021). De esta forma, es necesario profundizar en los errores que poseen los estudiantes de undécimo año de educación secundaria al resolver ecuaciones lineales con una incógnita, con el fin de implementar estrategias para su corrección.

Por último, la institución y el grupo de informantes fue seleccionado a conveniencia, tomando en cuenta el acceso a la institución y en concordancia con el horario del investigador y la docente a cargo del grupo de undécimo año. En total, se trabajó con 18 estudiantes y, al momento de la aplicación de instrumentos, se siguieron las restricciones sanitarias relacionadas con el COVID-19, según las directrices actuales del MEP en ese tiempo.

Criterios de selección de los estudiantes participantes para las entrevistas a profundidad

Los criterios de selección de los estudiantes para participar en las entrevistas a profundidad se establecieron de manera precisa, con la finalidad de dar relevancia a las voces recopiladas en esta etapa crucial de recolección de información. Se consideraron únicamente aquellos estudiantes que habían participado en todas las etapas anteriores del proceso de investigación. Además, se tuvieron en cuenta los resultados obtenidos en los cuestionarios pre-test y post-test, con el propósito de captar opiniones de alumnos que mostraron diferentes niveles de progreso en su comprensión del concepto matemático estudiado en esta investigación.

Después de un período posterior a la aplicación del post-test, se estableció contacto con tres estudiantes que accedieron voluntariamente a participar en las entrevistas a profundidad. A través de diálogos individuales con el investigador, dichos estudiantes compartieron sus percepciones sobre el impacto de la incorporación de sus errores en el entorno de aprendizaje y su propio conocimiento del tema de ecuaciones lineales. A través de sus respuestas, se puede apreciar que existen distintos niveles de comprensión y experiencias en relación con el tema estudiado y su proceso de aprendizaje.

3.2.2 Programas de Estudio de Matemática (PEM) del Ministerio de Educación Pública para la educación general básica y el ciclo diversificado (2012)

En Costa Rica, los PEM detallan los contenidos y habilidades matemáticas que los estudiantes deben desarrollar durante su paso por el sistema educativo. Esas habilidades se encuentran agrupadas en cinco áreas: números, medidas, relaciones y álgebra, y probabilidad y estadística. Además, en dicho documento se brindan múltiples recomendaciones y sugerencias para la ayuda del docente en su labor en cada contenido y habilidad matemática que desarrolle con estudiantes, mediante sugerencias de ejercicios y problemas que se pueden incluir para la explicación de un determinado tema matemático.

Como uno de los objetivos de esta investigación es describir los lineamientos y recomendaciones presentes en los PEM, con respecto a los errores matemáticos de los estudiantes, se realizó una revisión documental detallada de dichos programas de estudio, en busca de formas de tratamiento o incorporación de los errores matemáticos en el aula de la clase.

Además, se consideró las habilidades que los estudiantes de undécimo año han desarrollado en el área de álgebra, específicamente en las que se involucra resolver ecuaciones lineales con una incógnita. Estas habilidades fueron valoradas para el diseño del instrumento, en el que se determinó los errores que presentan los estudiantes de undécimo y, posteriormente, como eje director en la elaboración de las actividades para la propuesta de enseñanza diseñada.

Se analizó los PEM porque dicho documento corresponde al programa oficial y obligatorio que rige en la educación costarricense (MEP, 2012) y en él se detallan elementos importantes para la labor del profesor, siendo guía para planificar, seleccionar e implementar tareas adecuadas para el aprendizaje de los estudiantes (Rojas, 2014). Además, contiene las diferentes normas, recomendaciones y contenidos de importancia para el ejercicio de la labor docente (MEP, 2012).

3.2.3 Fuentes bibliográficas

En esta investigación se atendieron diversas fuentes de carácter bibliográfico. Se analizó libros de texto de educación secundaria de octavo año, que corresponden al nivel donde se abarca el tema de las ecuaciones lineales con una incógnita, según el PEM (2012) y de undécimo año, que es el nivel en el que se aplica esta investigación, con el fin de tener claridad acerca del tipo de ejercicios que se sugieren para el tema de ecuaciones lineales. Esto se consideró en la elaboración del cuestionario de recolección de errores y las actividades de la propuesta de enseñanza desarrollada y estudios que se encuentran estrechamente relacionados con el tema central de esta investigación.

Criterios de selección de las fuentes bibliográficas

Para la escogencia de los libros de texto de secundaria se tomó en cuenta el nivel de octavo, ya que corresponde al nivel donde se aborda el tema de ecuaciones lineales (PEM, 2012) y los de undécimo, que es el nivel en el que se aplica la propuesta. En estos se consideró que cada uno estuviera acorde con el plan de estudios vigente y a los cuales se pudiera tener acceso gratuito en forma virtual o física.

En esta investigación se valoraron diferentes estudios vinculados con la categorización y el uso de los errores algebraicos en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, como los que dan estructura a elementos teóricos de la investigación y artículos de revistas educativas disponibles en las bases de datos a las que la Universidad Nacional brinda acceso, como Education Research Complete, ERIC, Scopus y Springer, entre otras. Además, se consideró revistas educativas de acceso libre por medio de Google Académico.

Para la búsqueda de información se incluyeron palabras clave como *errores, álgebra y ecuaciones lineales*, entre otros o bien, los términos homólogos en el idioma inglés como *students errors, algebra y linear equations,* entre otros. Los documentos con los que se trabajó fueron publicados entre los años 2016 a 2022, lo que proporcionó información reciente y actualizada que sirvió de apoyo para la construcción de actividades de la propuesta de enseñanza implementada.

3.3 Técnicas de recolección de información

3.3.1 Revisión documental

Según Hernández-Sampieri et al. (2014), la revisión documental “implica detectar, consultar y obtener la bibliografía (referencias) y otros materiales que sean útiles para los propósitos del estudio, de donde se tiene que extraer y recopilar la información relevante y necesaria para enmarcar nuestro problema de investigación” (p. 61). En ese sentido, estos autores indican que dicha revisión debe realizarse de una forma selectiva de acuerdo con el tema de investigación y los objetivos propuestos, además de considerar las fechas de publicación de las referencias que se seleccionen para que la revisión permita obtener información actualizada.

En virtud de lo anterior, se entiende por revisión documental toda acción o conjunto de acciones que tengan como objetivo recolectar información de un documento con base en criterios previamente definidos en una investigación (Hernández-Sampieri et al., 2014).

En el caso particular de esta investigación, se indagó en los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP (2012) para la búsqueda de toda mención del uso de los errores y su aprovechamiento en los entornos de aprendizaje. Se incluyó también una revisión de los libros de texto utilizados en el currículo de matemáticas y se examinó cómo abordan las ecuaciones lineales y la posible integración de los errores en las actividades de aprendizaje. Además, se consultaron documentos pertinentes en las bases de datos mencionadas sobre los errores asociados con el proceso de resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita y cómo incorporarlos en propuestas de enseñanza. Toda la información obtenida se recolectó y sintetizó en una ficha de registro de datos (ver anexo 6).

3.3.2 Encuesta

De acuerdo con McMillan y Schumacher (2005), la encuesta es un método de investigación apoyado en diversas preguntas que se realizan a los sujetos de estudio, con el fin de obtener alguna información en particular de estos. Además, es una técnica de recolección de información muy habitual en la investigación cualitativa. Por ejemplo, en el ámbito educativo, las encuestas son utilizadas comúnmente para obtener información sobre actitudes, creencias y opiniones, entre otros, a través de una serie de preguntas, que pueden ser de manera oral o escrita.

En esta investigación su uso fue realizado mediante un cuestionario de preguntas abiertas (tipo prueba) para medir conocimiento, denominado pre-test y post-test, que incluyó ecuaciones lineales con una incógnita para su resolución. El instrumento se aplicó a estudiantes de undécimo año y fue resuelto utilizando los conocimientos y habilidades matemáticas del tema, adquiridos durante la educación secundaria.

Posteriormente, se revisó y analizó el instrumento, lo que permitió determinar cuáles son los errores que cometen con mayor frecuencia los participantes del estudio. Con esta técnica se realizó la primera y segunda fase de tratamiento de errores matemáticos de la pedagogía del error de Torre (2004), es decir, la detección e identificación de errores.

3.3.3 Propuesta de enseñanza

La rectificación de errores constituye la tercera fase del tratamiento de los errores matemáticos según la pedagogía del error propuesta por Torre (2004). Para llevar a cabo esta fase, se propuso como tercer objetivo de investigación el diseño de una propuesta de enseñanza conformada por varias actividades de aprendizaje, que se diseñaron siguiendo el objetivo principal de atender dificultades y errores de los estudiantes al resolver ecuaciones lineales, y así reforzar el aprendizaje del tema. Por ejemplo, se adaptó las estrategias propuestas en la pedagogía del error de Torre (2004), como la *ficha-registro de errores*, *corregir o mejorar un ejercicio*, *corrección cooperativa*, *revisión de un ejercicio mal resuelto* y *a la caza del error del profesor*.

También, para el diseño de las actividades se consideró los resultados de la revisión documental de los Programas de Estudio de Matemática (MEP, 2012) y las investigaciones sobre experiencias de aula donde se utilizaron los errores matemáticos para su enseñanza, así como los errores de mayor frecuencia que se presentaron en las producciones recolectadas por medio de los instrumentos de la encuesta.

3.3.4 Entrevista a profundidad

De acuerdo con la teoría propuesta por Taylor y Bogdan (1987), la entrevista a profundidad es una técnica cualitativa que se centra en un encuentro entre el investigador y los informantes en un momento específico de la investigación para comprender las perspectivas de los informantes en relación con experiencias o situaciones vividas en el proceso investigativo, mediante el cual se brinda un espacio significativo para que los participantes expresen sus opiniones y vivencias.

En ese sentido, Sánchez et al. (2021) afirman que la entrevista a profundidad se puede concebir "como una interacción entre dos personas, planificada y que obedece a un objetivo, en la que el entrevistado da su opinión sobre un asunto y, el entrevistador, recoge e interpreta esa visión particular" (p. 117).

Dicho proceso se asemeja más a una conversación entre iguales sobre un tema particular que a un intercambio formal de preguntas y respuestas, en el cual el investigador asume un papel activo y adopta una escucha empática y una buena guía de la conversación, en busca de obtener datos importantes de los informantes en relación con lo buscado, mediante una guía de preguntas previamente elaboradas, pero que puede ser flexible al momento del encuentro (Taylor y Bogdan, 1987), siendo una opción idónea para estudiar acontecimientos del pasado.

En este estudio, la entrevista a profundidad jugó un papel crucial al permitir una exploración detallada de las percepciones y experiencias de los estudiantes con las actividades de aprendizaje basadas en errores matemáticos. En esta los estudiantes proporcionaron opiniones valiosas, con el fin de valorar el impacto que tuvo esta propuesta didáctica en el aprendizaje y la comprensión de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Por lo tanto, esta entrevista permitió acceder a información importante que sería difícil de obtener mediante otros métodos.

3.4 Instrumentos de recolección de información

3.4.1 Ficha de registro de datos

Para realizar la revisión documental se diseñaron dos fichas de registro de datos: una para los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP (Anexo 6a) y otra para las investigaciones de las bases de datos seleccionadas por el investigador (Anexo6b), cuyo propósito general fue extraer información relacionada con la incorporación del uso de los errores para el aprendizaje.

En los PEM se buscó lineamientos y recomendaciones con respecto al uso de los errores matemáticos que cometen los estudiantes, lo anterior en sentido de corrección y la incorporación dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje. El propósito se desarrolló a partir de la revisión y análisis del documento, donde se extrajeron ideas sobre el tratamiento de los errores que cometen los estudiantes y la incorporación de una metodología de enseñanza que los aproveche, ya que dicho documento es el programa oficial para la educación matemática en Costa Rica.

Por otra parte, en el análisis de las investigaciones se indagó acerca del tipo de actividades que pueden realizarse para incorporar los errores en el aprendizaje de la matemática y los beneficios que es posible obtener en el conocimiento de los estudiantes. Esto brindó información útil para la elaboración de la propuesta de enseñanza, objetivo de esta investigación, tanto en aspectos metodológicos como en la forma de interpretar los resultados de la propuesta.

3.4.2 Cuestionarios pre-test y post-test

Para recoger la información correspondiente a la encuesta se diseñó dos pruebas o test, en concordancia con Bayardo (1987, citado en Parra, 2021). Estos se componen de una serie de preguntas, ya sea para completar bajo algún criterio, relacionar problemas e interpretar actividades, entre otros y es aplicada a algún individuo con la intención de obtener alguna respuesta.

Para el cuestionario pre-test y post-test se diseñó un único instrumento que fue el cual fue aplicado en dos momentos distintos del proceso investigativo. Este se basó en la resolución de ecuaciones lineales y se enfocó en los conocimientos y habilidades presentadas en el Programa de Estudios del MEP, que –al momento del estudio– los estudiantes de undécimo año debieron haber desarrollado en el nivel de octavo año. En la tabla 2 se detalla la información anterior.

Tabla 2. *Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales establecidas en los Programas de Estudio de Matemáticas considerados para la elaboración del cuestionario pre-test y post-test*

Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
Ecuaciones • Ecuaciones del primer grado con una incógnita • Solución de una ecuación	Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolver ecuaciones algebraicas fraccionarias que se reducen a ecuaciones del primer grado con una incógnita.	Las ecuaciones lineales por desarrollar deben ser de la forma que sigue, suponiendo que las expresiones están bien definidas: *1.* $ax = c$ *2.* $ax + b = c$ *3.* $ax + b = cx + d$ *4.* $ax \pm (cx \pm b) = d$ *5.* $a(bx \pm c) = d(ex \pm f)$ *6.* $ax \pm (bx \pm c) = dx \pm (ex \pm f)$ *7.* $\frac{x}{c} \pm a = \frac{b}{d}$ *8.* $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$ Se recomienda implementar ejemplos donde se contemplen los casos en que la ecuación tenga solución vacía o soluciones infinitas.

Fuente: Programa de Estudios de Matemática del MEP (2012) y elaboración propia.

El cuestionario cuenta con nueve ecuaciones diseñadas bajo los criterios mencionados. Se consideró ecuaciones cuyo conjunto solución fuera una única solución real, soluciones infinitas reales o el caso donde no tuviera una solución real o sea, el conjunto vacío.

Vale la pena mencionar que en el nivel de octavo año los estudiantes únicamente trabajan con números racionales. Sin embargo, en el nivel de undécimo los estudiantes ya debieron haber adquirido habilidades como saber operar fracciones algebraicas y cantidades del conjunto de los números reales, por lo que en el cuestionario se considera una ecuación con un coeficiente irracional. Los ejercicios abordados en el cuestionario se detallan en la tabla 3.

Tabla 3. *Ecuaciones lineales con una incógnita consideradas en el cuestionario pre-test y post-test, de acuerdo con las indicaciones puntuales del Programa de Estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública (2012)*

Tipo de ecuación		Ejercicio propuesto
1. $ax = c$	*a)*	$-4x = -24$ $S = \{6\}$
2. $ax + b = c$	*b)*	$7x - 21 = -32$ $S = \left\{\frac{-9}{7}\right\}$
	c)	$\sqrt{2} \cdot x + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $S = \left\{\frac{1 - 3\sqrt{2}}{2}\right\}$
3. $ax + b = cx + d$	*d)*	$-27x + 21 = 28 - 4x$ $S = \left\{-\frac{7}{23}\right\}$
4. $ax \pm (cx \pm b) = d$	*e)*	$2y - (4y - 5) = 0$ $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
5. $a(bx \pm c) = d(ex \pm f)$	*f)*	$3 \cdot (-5x + 2) = -5 \cdot (3x + 8)$ $S = \{\ \}$
6. $ax \pm (bx \pm c) = dx \pm (ex \pm f)$	*g)*	$7x - (6x + 6) = 2x - (6 + x)$ $S = \mathbb{R}$
7. $\frac{x}{c} \pm a = \frac{b}{d}$	*h)*	$\frac{x}{3} - 7 = \frac{-3}{2}$ $S = \left\{-\frac{33}{2}\right\}$
8. $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$	*i)*	$\frac{x - 1}{4x - 4} = \frac{1}{5}$ $S = \{\ \}$

Fuente: Elaboración propia.

La versión final de este cuestionario (ver anexo 5) se les brindó a los estudiantes en forma impresa y se consideró en cada ejercicio el espacio suficiente para su solución o cualquier anotación que se deseara realizar. Una vez que los estudiantes hicieron la prueba, la devolvieron al investigador, con el fin de revisar sus producciones y anotaciones en el desarrollo de la propuesta.

Por su parte, la información resultante del análisis del cuestionario pre-test se utilizó como insumo relevante en el diseño de un material didáctico, ya que los tipos de errores que aquí se detectaron fueron el eje central de cada una de las actividades de la propuesta.

Validación del cuestionario

La validación de este instrumento se realizó mediante el juicio de expertos. En este caso, se contó con la colaboración de cuatro profesores de secundaria, que se llamarán profesor 1, profesor 2, profesor 3 y profesor 4, los cuales han impartido octavo y undécimo año –que son los niveles en los que se tiene interés en esta investigación– durante uno o más periodos lectivos a lo largo de su carrera como docentes.

Dichos profesores se encuentran actualmente activos, trabajan para el Ministerio de Educación Pública en la Dirección Regional de Heredia y cuentan con una experiencia laboral promedio de 18 años. A ellos se les contactó de forma presencial, se les solicitó la colaboración, se les explicó en qué consistía el proceso de la validación y se les facilitó en forma digital el instrumento que debían completar (ver anexo 9). No obstante, a uno de los docentes se le facilitó también en forma física, debido a que él así lo pidió. Asimismo, para la validación del instrumento se les dio una semana de tiempo, el cual fue cumplido a cabalidad por todos los profesores.

En el instrumento de validación para cada uno de los nueve ejercicios propuestos en el cuestionario pre-test y post-test, a los validadores se les solicitó brindar una valoración que tenía como criterio: totalmente pertinente, incluir en el instrumento sin modificaciones; parcialmente pertinente, mantener en el instrumento, pero con modificaciones.

El profesor 1 valoró las preguntas 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 como totalmente pertinente, a incluir en el instrumento sin modificaciones. La pregunta número 3 la valora como parcialmente pertinente, mantener en el instrumento, pero con modificaciones, e indica como comentario: *Me parece que se podría excluir este ejercicio*. Se le consultó personalmente la razón, pues no amplió su comentario en el instrumento y explicó que es por el uso de números irracionales como coeficiente de la variable de la ecuación.

El profesor 2 valoró las preguntas 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 como totalmente pertinente, incluirlas en el instrumento sin modificaciones. Las preguntas 3 y 9 las valoró como parcialmente pertinente, mantener en el instrumento, pero con modificaciones y señaló para la pregunta 3: *Tiene más funcionalidad para reforzar las operaciones en* $\mathbb{I}$ *que para ecuaciones. Se sale del objetivo*. En la pregunta 9 mencionó: *La modificaría para que tenga solución para poder sacarle más provecho.* Sin embargo, el hecho de que dicha ecuación no posea solución se debe a una de las recomendaciones establecidas en el PEM, donde se sugiere trabajar ecuaciones con solución vacía o infinita.

El profesor 3 valoró las preguntas 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 como totalmente pertinente, incluir en el instrumento sin modificaciones. La pregunta número 3 la valoró como parcialmente pertinente, mantener en el instrumento, pero con modificaciones y dijo como comentario: *Sin la raíz*, haciendo énfasis en el uso números irracionales como coeficiente de la variable de la ecuación.

El profesor 4 valoró todas las preguntas como totalmente pertinente, incluir en el instrumento sin modificaciones. No obstante, para la pregunta 3 señaló: *La variable x podría confundirse como el sub radical. Recomiendo la expresión* $x\sqrt{2}$. Esta recomendación no se toma en cuenta, ya que en matemática al escribir un monomio es más común escribir primero el factor numérico y luego el factor literal. También, en la pregunta 9 se realiza como observación que: *Sería necesario que aparezca una ecuación lineal fraccionaria, con expresiones algebraicas en ambos lados para que se evalúe el proceso de homogenización*. Esto hace referencia a ecuaciones con fracciones algebraicas que al operar aparecen términos cuadráticos que se simplifican y la ecuación final sigue siendo lineal. No obstante, para esta investigación no se contemplaron ecuaciones de este tipo, porque únicamente se tomaron en cuenta las clases de ecuaciones que se sugieren en el PEM del Ministerio de Educación Pública (MEP).

Por último, a partir de las opiniones y recomendaciones brindadas por los validadores, se tomó la decisión de no modificar ni eliminar ninguna de las preguntas del cuestionario, ya que según el MEP (2012) los estudiantes del nivel de undécimo año deberían poseer un dominio de las operaciones con los números irracionales, por lo que no sería ningún inconveniente usar este tipo de números como coeficientes de las expresiones algebraicas presentes en una ecuación lineal.

3.4.3 Actividades de aprendizaje para la propuesta de enseñanza

El diseño de las actividades de aprendizaje consideró la conceptualización de actividades de aprendizaje propuesta por Fernández et al. (2018) y siguió elementos organizativos para la enseñanza, como objetivos, contenidos, estrategias, actividades de enseñanza y aprendizaje, actividades de evaluación y la solución.

También se incorporaron los resultados de la revisión documental del Programa de Estudios de Matemática (MEP, 2012), es decir, lineamientos y recomendaciones con respecto al uso de los errores en el aula de matemática e investigaciones previas con el mismo objetivo, así como los tipos de errores matemáticos más comunes de los estudiantes, detectados e identificados por la técnica de encuesta. Con esto se llevó a cabo las fases de detección e identificación de errores de la pedagogía del error (Torre, 2004).

Asimismo, se adaptaron las estrategias de corrección y rectificación de los errores, como las propuestas por Torre (2004), al objeto matemático en estudio, el cual fue de gran ayuda para la construcción de cada una de las actividades de aprendizaje incluidas en la propuesta.

Por ejemplo, las estrategias *corregir o mejorar un ejercicio* y *corrección cooperativa* se unificaron en una sola actividad porque, según con Torre (2004), en dichas actividades el estudiante posee conocimiento de la existencia de procedimientos erróneos en los ejercicios que le plantean, con el propósito de que los identifique e intente corregir.

Además, se complementó a partir del debate del grupo de trabajo y la guía del docente, donde se logró reflexionar sobre el proceso de solución del ejercicio, para lo cual se valoró más el razonamiento y análisis de los procedimientos versus la adquisición de una simple respuesta en el proceso de resolución de ecuaciones de primer grado y una incógnita.

Dicha actividad se llamó *A poner en equilibrio la balanza* y se trabajó en grupos de máximo tres estudiantes, los cuales analizaron la solución de diversas ecuaciones que se les presentaron resueltas de forma incorrecta.

Estas ecuaciones se ilustraron tanto de forma algebraica como mediante el uso de material manipulable del juego balanza matemática. A través de esto, los estudiantes fueron identificando los errores e intentando dar una solución correcta a las ecuaciones planteadas. Asimismo, comentaron acerca de los errores que detectaron en cada una de las soluciones planteadas.

Otra estrategia que se adaptó de Torre (2004) fue *a la caza del error del profesor*, que consiste en que los estudiantes deben identificar los errores que comete el docente al presentarles la solución de diversas ecuaciones. En esta investigación se llamó *En búsqueda del error* y consistió en que el docente a cargo distribuyera varias ecuaciones de primer grado con su solución mediante fichas en distintas partes del aula. Algunas contaban con la solución correcta y otras con diferentes tipos de errores en su solución.

De esa manera, con la guía del docente, sus conocimientos y ayuda del uso de la calculadora, los estudiantes buscaron e identificaron todas aquellas ecuaciones que presentaban error en su solución e intentaron resolverlas de forma correcta, para lo cual tomaron como referencia aquellas ecuaciones resueltas correctamente. Además, brindaron su opinión sobre los errores que descubrieron en las soluciones incorrectas que identificaron e intentaron responder por qué existe error en dicha solución y cómo se puede realizar dicho procedimiento de manera correcta.

Posteriormente, la *autorreflexión-metacognición* propuesta por Torre (2004) consiste en una estrategia de análisis cuando se detectan bajos resultados. Mediante los errores presentados por los estudiantes, se concientiza sobre qué los está provocando y qué se puede aprender de eso. En esta investigación se adaptó con el nombre *¿De los errores se aprende?* y con ella se pretendió estimular la reflexión y metacognición acerca de cómo los errores pueden fortalecer el conocimiento matemático

Por último, vale la pena mencionar que todo el material diseñado en esta propuesta se validó mediante la revisión del comité asesor de este trabajo, los docentes expertos contactados previamente en la validación del cuestionario, de acuerdo con su disponibilidad y el criterio del investigador.

3.4.4 Registro de hechos

De acuerdo con Sánchez et al. (2021), los registros de hechos consisten en “cualquier objeto fabricado para desempeñar alguna función específica, como captar una imagen, la voz, los sonidos; y pueden servir de evidencia en una investigación cualitativa” (p. 120). De esa forma, para esta investigación se empleó la entrevista a profundidad como técnica para recolectar información relevante y significativa sobre el impacto de las actividades de la propuesta diseñada en el aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita, con base en los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria.

En ese sentido, para no perder ningún detalle de la conversación con los estudiantes entrevistados se utilizó como instrumento de recolección de información la grabación de audio. Esto corresponde a un instrumento de mucha utilidad al realizar entrevistas porque, aunque se tomen notas durante la entrevista, es imposible captar toda la información necesaria, mientras que al grabar el audio de la conversación es posible volver a escuchar, transcribir e interpretar la conversación. Este procedimiento permite descubrir información relevante, pues es una forma de documentar de manera íntegra y exacta los contenidos de las entrevistas, y evitar pérdidas de información valiosa, así como asegurar la precisión y calidad de los datos que se obtienen (Sánchez et al., 2021).

Para llevar a cabo este proceso se utilizó la plataforma de Microsoft Teams, que ofrece la opción de grabación y facilitó el encuentro con los estudiantes. Esto contribuyó a simplificar el proceso de análisis y posterior interpretación de los datos obtenidos de las entrevistas. Además, posibilitó revisar y transcribir minuciosamente las conversaciones en busca de temas matices relevantes en la información recopilada.

Por último, es importante mencionar que, previo al inicio de grabaciones de las entrevistas, se obtuvo el consentimiento informado de los participantes, a los que se les aseguró la confidencialidad y anonimato de la información registrada.

3.5 Procedimientos para la recolección de la información

En este apartado, en primer lugar, se detalla cómo se realizó la negociación y entrada al campo de investigación y, posteriormente, se explican las etapas seguidas con el fin de aplicar todas las técnicas e instrumentos para recoger la información necesaria para este estudio.

3.5.1 Negociación y entrada al campo

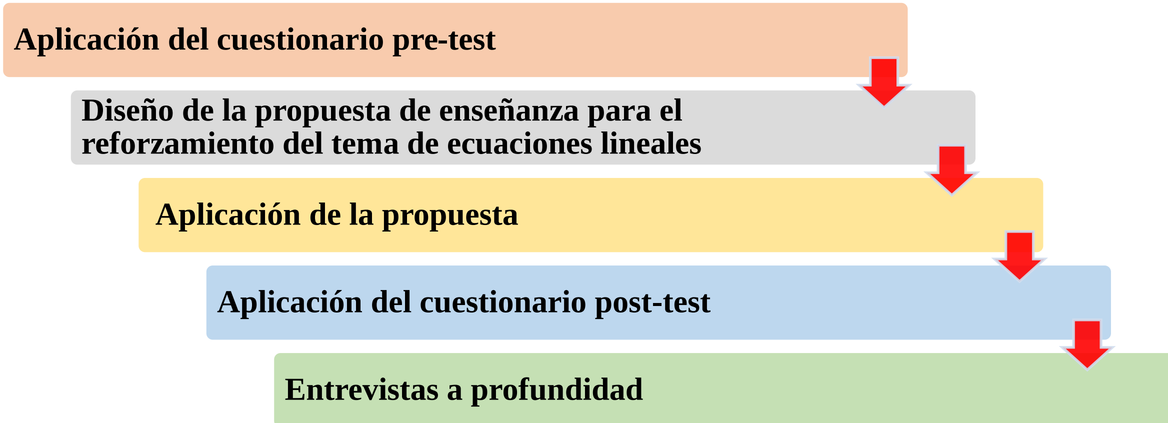
Para el acceso a la institución se contactó primeramente al director en forma presencial. Mediante una carta formal (ver anexo 3) se le expusieron las características principales y los objetivos de la investigación, como parte de una primera negociación de la entrada al campo. Luego de haber obtenido el visto bueno, se conversó con la docente Yessennia Chacón Sanabria, quien estaba cargo de algunos grupos del nivel de undécimo y accedió de forma voluntaria a brindar el espacio de una de sus clases para llevar a cabo esta investigación. Cabe mencionar que todo lo relacionado con esta investigación fue comunicado y aprobado por la coordinación académica de dicha institución (ver anexo 11).

Una vez listos estos trámites, se procedió a realizar un primer acercamiento con los estudiantes. En ese momento, se les explicó de forma resumida en qué consistía el proceso de investigación y por qué habían sido seleccionados. Además, se les brindó un consentimiento informado (ver anexo 4), que presentaron firmado por su encargado en los días posteriores a su entrega.

3.5.2 Trabajo de campo

Para un mejor entendimiento del trabajo realizado en esta investigación, se detalla en la figura 1 las etapas del trabajo de campo que permitió recopilar la información relevante para esta investigación.

Figura 1. *Etapas del trabajo de campo*



Fuente: Elaboración propia.

Etapa 1. Aplicación del cuestionario pre-test

Después de obtener los permisos correspondientes, se coordinó con la docente del grupo la fecha y hora de la aplicación. Se llevó a cabo de manera presencial el día 24 de mayo de 2022, durante las lecciones onceava y duodécima, para lo cual se respetó todas las medidas sanitarias y protocolos relacionados con el COVID-19. A los estudiantes se les entregó la prueba en formato físico, se les leyeron las instrucciones para realizarla y se les brindó un tiempo de 45 minutos para completarla.

Cabe señalar que, a pesar de haber solicitado a los estudiantes que realizaran la prueba en completo silencio, varios de ellos manifestaron que no sabían cómo resolver los ejercicios y no recordaban nada de la materia de años anteriores. Además, es importante mencionar que para el día de la aplicación del instrumento la institución estaba celebrando la semana electoral estudiantil, por lo que algunos estudiantes inscritos en partidos políticos tenían permiso de ausentarse.

Como resultado, solo 14 estudiantes se encontraban presentes en la clase en el momento de la aplicación de la prueba. Posteriormente, se contó con la colaboración de la docente del grupo para aplicar el cuestionario pre-test a los alumnos ausentes durante la primera aplicación.

Finalmente, toda la información recolectada se organizó mediante una matriz, en la cual se registraron los errores de cada uno de los estudiantes de acuerdo con los ejercicios que resolvieron, con el propósito de clasificarlos según las categorías de análisis diseñadas en esta investigación.

Etapa 2. Diseño de la propuesta de enseñanza para el reforzamiento del tema de ecuaciones lineales

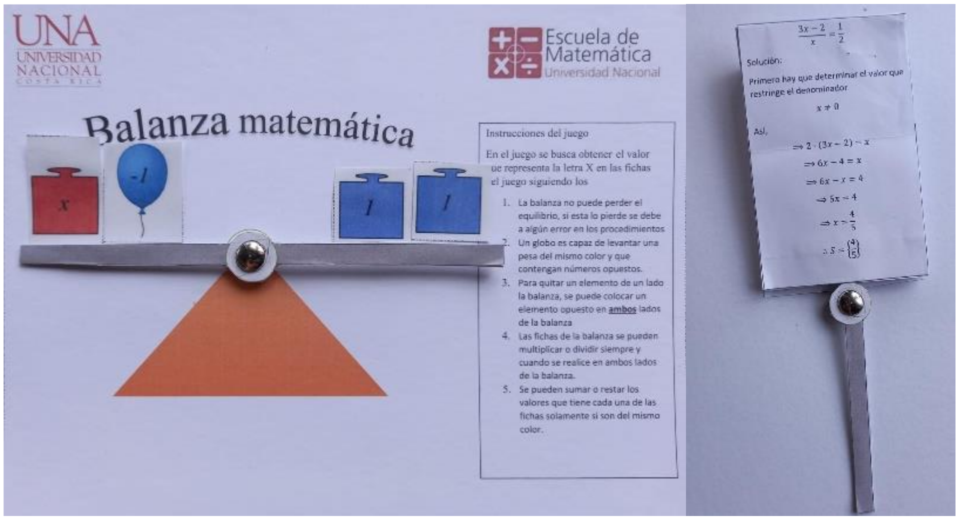
Una vez aplicado el pre-test, se procedió a clasificar los errores que los estudiantes cometieron al resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Esto permitió obtener una clara comprensión de los tipos de errores que cometieron en cada categoría de análisis, así como la frecuencia con la que se presentaron. Con esta información, se estableció una correspondencia entre los errores identificados en la prueba y los enfoques abordados en cada una de las actividades de la propuesta de enseñanza.

Para la elaboración de las actividades se consideraron los aspectos mencionados en Torre (2004), como la creación de una ficha-registro de errores. Esta ficha fue elaborada por el investigador a través de la revisión y clasificación de los errores cometidos en cada una de las pruebas pre-test realizadas. Además, se diseñaron actividades asociadas con corregir o mejorar los ejercicios, como realizar correcciones de manera colaborativa, revisar ejercicios mal resueltos y reflexionar a partir de los errores cometidos.

La propuesta de enseñanza también se basó en diversas recomendaciones obtenidas de la revisión documental realizada del Programa de Estudios de Matemáticas (PEM), libros de texto e investigaciones consultadas. Asimismo, se buscó abordar los errores como una oportunidad para mejorar los procesos de razonamiento (MEP, 2012). Para esto se utilizaron actividades que partieron del uso de los errores y se apoyaron en material manipulativo para fortalecer la transición de las matemáticas concretas a las abstractas (Samuel et al., 2016; Gamboa y Fonseca, 2017).

Se implementó una balanza compuesta por pesas y globos representados con objetos manipulables (ver figura 2), y se especificaron ciertas reglas de juego para abordar los métodos de *balanza* y *pasar al otro lado*, que son los que se abarcan en todos los libros de texto analizados. Además, se utilizaron fichas con ejercicios resueltos, donde el estudiante debía identificar la ecuación errónea y realizar su solución de forma correcta.

Figura 2. *Materiales manipulativos brindados en la propuesta*



Fuente: Elaboración propia.

Lo anterior concuerda con lo propuesto por Maldonado (2018), quien señala que se puede solicitar a los estudiantes la revisión de algunos ejercicios que presenten errores en su solución y estos sean capaces de explicar el porqué del error y brindar una solución correcta a lo planteado. De esta manera, se buscó desarrollar la capacidad de readecuar procedimientos y hacerlos de forma correcta, para lo cual se proporcionó retroalimentación a partir de los errores, mediante actividades que brindaran experiencias distintas en el aprendizaje de los alumnos (MEP, 2012; Samuel et al., 2016).

Etapa 3. Aplicación de la propuesta

Luego de que se diseñó y aprobó la propuesta de enseñanza, se procedió a coordinar con la docente a cargo del grupo seleccionado la aplicación de la propuesta, que tuvo lugar el miércoles 19 de octubre de 2022, en una sesión de cuatro lecciones, con un receso de 20 minutos tras las dos primeras lecciones. Inicialmente, se había planificado llevar a cabo dos sesiones de dos lecciones cada una. Sin embargo, debido al congreso de la Asociación Nacional de Educadores realizado en esas fechas, los estudiantes tenían las lecciones libres y accedieron a participar y desarrollar las actividades en una única sesión.

A pesar de la intención inicial de utilizar una presentación proyectada para apoyar el desarrollo de las actividades, no se pudo obtener acceso a la tecnología requerida en el momento previsto. No obstante, el equipo docente se adaptó rápidamente a la situación y aseguró que las actividades se hicieran sin inconvenientes. Se proporcionó a los estudiantes el material necesario, junto con las instrucciones detalladas para cada actividad y el material manipulable requerido.

Al inicio de la sesión, algunos estudiantes mostraron cierta confusión y dificultades para comprender la dinámica de las actividades. Sin embargo, a medida que se fueron desarrollando y con el apoyo constante del docente y el material manipulable, los estudiantes fueron aclarando sus dudas y lograron avanzar en la resolución de las actividades de manera efectiva.

Durante toda la sesión, se observó un alto nivel de interés y participación por parte de los estudiantes, lo que creó un ambiente propicio para el aprendizaje. Si bien algunos alumnos presentaron mayores desafíos que otros, la mayoría logró desarrollar las actividades con éxito, siempre en busca de fortalecer sus habilidades en la resolución de ecuaciones lineales.

También, durante la sesión se iba realizando breves retroalimentaciones del contenido con los estudiantes, en las que se les brindó la oportunidad de expresar sus opiniones y comentarios sobre la experiencia. La respuesta general fue positiva y varios manifestaron haber comprendido mejor los conceptos relacionados con las ecuaciones lineales y apreciaron el uso del material manipulable como una herramienta útil en el proceso de aprendizaje.

Por último, todo el material y los apuntes realizados por los estudiantes en todas las actividades fueron devueltos al investigador, quien posteriormente hizo una revisión y análisis detallado de dicho material. Gracias a esto, se puede concluir que la aplicación de la propuesta de enseñanza resultó ser una sesión dinámica y enriquecedora, donde los estudiantes pudieron fortalecer sus habilidades en la resolución de ecuaciones lineales a través de la identificación de errores con actividades prácticas y la utilización del material manipulable. De igual forma y a pesar de los desafíos tecnológicos, el desarrollo de las actividades fue exitoso y proporcionó una experiencia de aprendizaje significativa para los estudiantes.

Etapa 4. Aplicación del post-test

Esta etapa consistió en la aplicación del mismo cuestionario utilizado en el pre-test. El propósito principal fue recopilar datos comparables a los obtenidos en la etapa inicial de la investigación. Para llevar a cabo esta etapa fue necesaria una coordinación previa con la docente a cargo del grupo para garantizar la aplicación adecuada de la prueba.

La aplicación del post-test tuvo lugar el martes 15 de noviembre de 2022 y abarcó la octava y novena lección correspondiente a la materia de matemáticas. Durante este proceso, 14 estudiantes estuvieron presentes y no se pudo establecer contacto con los demás alumnos.

La duración de la prueba fue de 45 minutos, período que demostró ser suficiente para que los estudiantes completaran la prueba con éxito porque, al cumplirse el tiempo, todos habían entregado la prueba. Además, es importante destacar que durante esta aplicación se observó un comportamiento más positivo y participativo por parte de los alumnos, en comparación con la primera aplicación del cuestionario.

Una vez que se completó la aplicación del post-test, el investigador procedió a organizar y analizar la información recopilada. Con el objetivo de llevar a cabo un análisis sistemático, se utilizó una matriz, que permitió relacionar los errores identificados en cada ejercicio y las categorías de análisis previamente definidas. Este proceso permitió obtener una visión más clara de los patrones y tendencias en los errores cometidos, lo que facilitó una comparación efectiva con los resultados obtenidos en el pre-test y contribuir al logro de los objetivos de la investigación.

Etapa 5. Entrevista a profundidad

Como última etapa del trabajo de campo, se decidió llevar a cabo las entrevistas a profundidad, con el fin de obtener una comprensión enriquecedora de las perspectivas de los participantes con respecto al uso de los errores en la enseñanza de las matemáticas y cómo este enfoque influyó en sus conocimientos después de la implementación de la propuesta de enseñanza desarrollada. Esto ayudó a capturar percepciones sólidas y reflexivas de los informantes basadas en su experiencia, lo que enriqueció los resultados de esta investigación.

En un inicio se pretendió realizar un grupo focal para captar todas estas percepciones de los estudiantes en un mismo momento, sin embargo, existieron diversas incongruencias en la disponibilidad del grupo y el investigador que impidieron que este se realizara en el mismo curso lectivo lo que obligó al cambio de la técnica empleada y el momento de aplicación de esta.

Entre los inconvenientes presentados se encuentra el Cierre de Centro Educativos del 11 al 14 de Octubre de 2022 establecido en la circular DM-0065-10-2022 debido a las condiciones climatológicas del país en ese momento esto provocó una interrupción en el calendario académico, lo que afectó la disponibilidad de los estudiantes y repercutió los tiempos de aplicación de las etapas de la investigación. A pesar de que dicho periodo fue repuesto 21 de noviembre y el 13 de diciembre de 2022. En estas fechas los estudiantes de este nivel ya contaban con una nota asignada para la previa elaboración de los títulos de bachillerato, por lo que en esos días los estudiantes de este nivel no tuvieron lecciones y se perdió la comunicación con el grupo en ese ciclo lectivo.

Para llevar a cabo estas entrevistas el siguiente curso lectivo se solicitó la información de los participantes en la institución y se estableció contacto telefónico con tres estudiantes previamente involucrados en todas las etapas del proceso de la investigación. Las fechas de las entrevistas fueron programadas según su disponibilidad y la del investigador, y se realizaron el domingo 21 de mayo, martes 23 de mayo y domingo 4 de junio de 2023. Dado que al momento de las entrevistas los estudiantes ya no formaban parte de la institución, se optó por llevarlas a cabo de manera virtual.

Para esto se utilizó la plataforma Microsoft Teams. Dicha elección permitió hacer las entrevistas de manera efectiva y conveniente, a pesar de la distancia física entre los participantes y el investigador. Asimismo, facilitó la grabación del encuentro para realizar su transcripción y análisis.

3.6 Categorías y unidades de análisis

Según Hernández-Sampieri et al. (2010), las categorías de análisis en la investigación comprenden un constructo de conceptos, hechos y experiencias provenientes de distintas fuentes de información, ligados directamente a los objetivos e instrumentos para la recolección de información.

De esa manera, en esta investigación se proponen tres categorías de análisis: 1) lineamientos y recomendaciones sobre el tratamiento de los errores en ambientes de clase de matemática, 2) errores en la resolución de ecuaciones lineales y 3) uso del error en la clase de matemática.

3.6.1 Lineamientos y recomendaciones sobre el tratamiento de los errores en la clase de matemática

De acuerdo con Parra (2021), es importante que el profesor de matemática pueda percibir y detectar los errores que cometen los alumnos. Además, debe ser capaz de implementar dinámicas en clase donde considere el tratamiento de los errores matemáticos, así como las dificultades que los producen.

Debido a eso, en esta categoría se analizan los lineamientos y recomendaciones sobre el tratamiento de los errores en ambientes de la clase de matemática desde dos perspectivas, el contexto nacional por medio de los PEM del MEP (2012) y, de forma general, a través del análisis de investigaciones, para considerarse en el desarrollo de esta investigación.

Es importante mencionar que, al ser este el documento oficial para la educación matemática en secundaria en Costa Rica, en la presente investigación se realizó una revisión de los PEM en busca de lineamientos y recomendaciones para el docente en el tratamiento de los errores matemáticos de los estudiantes y hacer uso de ellos en los ambientes de clase. Esto se hizo de forma general en todo el documento y se registró toda mención de *error* y *errores* que se encontraran ligados a procesos de enseñanza. Dicha búsqueda se realizó utilizando el documento digital y la lectura del investigador para poder identificar las referencias a procesos de enseñanza.

En la misma línea, se seleccionó y analizó investigaciones sobre aspectos como la creación, planificación, implementación y evaluación de propuestas de aprendizaje relacionadas con los criterios descritos y cuál es su efecto en el conocimiento de los estudiantes, además de todas las sugerencias ricas para el diseño de las actividades de esta investigación.

3.6.2 Errores al resolver ecuaciones lineales con una incógnita

En esta categoría de análisis se estudian errores algebraicos que los estudiantes pueden cometer al resolver ecuaciones lineales con una incógnita. Para esto se tomaron en cuenta algunas de las clasificaciones de los errores descritos en el marco teórico de esta investigación. Dichas clasificaciones se organizaron de acuerdo con los objetivos de la investigación (ver tabla 4).

Tabla 4. *Clasificación de errores al resolver ecuaciones lineales con una incógnita*

Categoría de errores	Tipo de error	Ejemplo
CE1. Errores del álgebra que están en la aritmética El álgebra se encuentra muy ligada a la aritmética, por lo que a veces las dificultades que los estudiantes encuentran en álgebra son problemas que se quedan sin resolver en la aritmética.	***E1.1. Errores al efectuar operaciones básicas con números enteros*** Puede existir dificultad para realizar sumas, restas, multiplicación y división con números enteros positivos y negativos.	$3x = -5+3$ $\Rightarrow 3x = -8$
	E1.2. Errores al efectuar operaciones básicas con números racionales Se realizan de forma incorrecta los algoritmos para operar fracciones. Por ejemplo, al sumar una fracción, se suma tanto el denominador como el numerador.	$\frac{5x}{2} + \frac{x}{3} = 2$ $\Rightarrow \frac{6x}{5} = 2$
	E1.3. Errores en la propiedad distributiva Al realizar esta propiedad en forma incompleta o incorrecta.	$3(x+5) = 2$ $\Rightarrow 3\mathrm{x} + 5 = 2$
CE2. Errores de concepto debidos a las características propias del simbolismo algebraico Son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética. Algunos ejemplos son el sentido del signo "=" en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución	***E2.1. Confundir entre el término con la incógnita y el término independiente*** Se suma el término con incógnita con uno constante, es decir, una simplificación de términos no semejantes.	$a)\ 5(2x+1) = 7$ $\Rightarrow 5(3x) = 7$ $b)\ 0 = 7x - 4$ $\Longrightarrow\ 0 = 3$
	E2.2. Error en el método de balanza Si necesitan aplicar la misma operación a ambos lados de la igualdad, lo realizan solo en uno.	$7x - 8 = 3$ $\Rightarrow 7x - 8 + 8 = 3$

Tabla 4. *Clasificación de errores al resolver ecuaciones lineales con una incógnita*

Categoría de errores	Tipo de error	Ejemplo
formal, además del uso incorrecto de distintos algoritmos para resolver ecuaciones lineales con una incógnita.	***E2.3. Error en el coeficiente*** Se transpone al otro miembro el coeficiente de la incógnita como si estuviese sumando, en lugar de multiplicando.	$6x = 5$ $\Rightarrow x = 5 - 6$
CE3.Errores de procedimiento Al utilizar los algoritmos de resolución de ecuaciones confunden y mezclan las operaciones que se deben realizar.	***E3.1. Aplicación de las operaciones inversas en forma incorrecta*** Al transponer un número que está multiplicando a dividir al otro lado de la igualdad, se cambia también el signo. Si se aplica una operación inversa que no corresponde, un término que suma se transpone a una división o bien, únicamente se transpone del lado de la ecuación, sin realizar ninguna operación.	*a)* $-3x = -1$ $\Rightarrow x = \frac{-1}{3}$ *b)* $x + 3 = 1$ $\Rightarrow x = \frac{1}{3}$ *c)* $x + 3 = 1$ $\Rightarrow x = 1 + 3$
	E3.2. Error en la jerarquía de las operaciones Estos se producen cuando se realizan transposiciones en el orden incorrecto.	$\frac{3x}{2} + 6 = 4$ $\Rightarrow 3x + 6 = 8$
	E3.3. Falta de verificación en la solución Estos errores se presentan cuando cada paso de la realización de una tarea es correcto y el resultado final no corresponde a una solución plausible. En otras palabras, la posible solución no cumple con una o varias hipótesis requeridas. También, al omitir condiciones necesarias al resolver una ecuación, por ejemplo, todo denominador de una fracción debe ser diferente de cero.	$\frac{x-1}{2x-2} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow 3x - 3 = 2x - 2$ $\Rightarrow 3x - 2x = -2 + 3$ $\Rightarrow x = 1$

Fuente: Movshovitz-Hadar et al. (1987), Hall (2002), Pérez et al. (2019), Rodríguez (2015), Rosas (2013) y elaboración propia.

La categorización de errores descrita en la tabla 4 sirvió de base para clasificar los errores en el pre-test y post-test aplicados, lo que permitió hacer la comparación de las frecuencias de los errores según cada una de las subcategorías previo y posterior a la implementación de la propuesta.

3.6.3 Uso del error en la clase de matemática

En esta categoría se analizó información sobre hechos y experiencias vividas al aplicar las actividades de la propuesta de enseñanza, por ejemplo, al poner en práctica las estrategias de corrección y rectificación de errores. En otras palabras, en las actividades como *corregir o mejorar un ejercicio, corrección cooperativa* y *a la caza del error*, se prestó especial atención a frases, acciones o hechos que indicaran una mejoría de los errores encontrados en el cuestionario pre-test.

Además, para el análisis se consideraron los procesos metacognitivos del estudiante, por ejemplo, cómo se autorregula, monitorea y controla sus conocimientos, lo que permite que pueda tomar decisiones acertadas al resolver ecuaciones lineales con una incógnita. Dado que en las actividades se le brindó al participante el cuestionario en forma impresa, también se contempló las anotaciones realizadas en el análisis de la información y se estudió la evolución de los errores, es decir, si se logró la identificación y corrección de los errores.

De igual manera, se analizó la información obtenida en las entrevistas a profundidad, pues –a través de la opinión de cada uno de los estudiantes– se determinó si el uso del error en la clase de matemática había sido beneficioso para el aprendizaje de los estudiantes o no había producido algún cambio.

Todo fragmento de información recolectado de estas experiencias de aula se escribió en notas de campo y se sistematizó, lo que facilitó comparar constantemente con la información proveniente de las otras técnicas de recolección de información que se utilizaron en la investigación.

3.7 Análisis de los datos

El análisis de la información para esta investigación cualitativa según McMillan y Schumacher (2005) es “un proceso relativamente sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación, que nos proporciona explicaciones sobre el único fenómeno de interés” (p. 479). En este caso, se trata de los errores que cometen los estudiantes y cómo el docente puede hacer inclusión de estos en los ambientes de clase para el aprendizaje y reforzamiento de los contenidos matemáticos.

Para la primera etapa de la investigación se aplicó el cuestionario pre-test para recolectar los errores cometidos por los estudiantes y clasificarlos según las subcategorías de análisis propuestas en la investigación. De esa forma, se determinó cuál era el tipo de error con mayor frecuencia cometido por los estudiantes. Esto a partir de un registro donde se organizó toda la información mediante tablas y matrices según cada subcategoría de análisis, lo que facilitó un mejor entendimiento de los resultados obtenidos. Asimismo, se cuenta con un registro fotográfico de las diversas producciones erróneas realizadas por los estudiantes, que permitió mostrar de manera clara cómo es que se presentan los errores según cada una de las subcategorías definidas.

Una vez registrados y organizados los datos del pre-test, se pudo identificar cuáles eran los tipos de errores más comunes en los estudiantes y cuáles son los procedimientos en los que tienen más dificultades, y por ende, los realizaron de manera incorrecta. Estos errores se adaptaron a las actividades que conforman la propuesta de enseñanza, con la intención de que los estudiantes pudieran aprender de sus mismos errores al tener la posibilidad de revisar y corregir algún ejercicio que no esté correcto.

Dichas actividades se complementaron mediante el uso de material impreso y manipulable con el que los estudiantes se apoyaron para el desarrollo de cada actividad de la propuesta. Lo anterior permitió revisar las diferentes anotaciones realizadas por los alumnos en cada actividad, con intención de identificar si se lograba el propósito de la actividad y analizar cuál era la evolución de los errores de los estudiantes durante el proceso de investigación. En ese sentido, se podría apreciar si se estaba logrando que los estudiantes identificaran y lograran corregir los errores que poseían o bien, era irrelevante.

Posterior al diseño y aplicación de la propuesta objeto de esta investigación, se procedió a la aplicación del post-test, donde su análisis se basó en las mismas categorías de análisis que la primera prueba y los resultados obtenidos se registraron junto con los resultados del pre-test, lo que ayudó a identificar mejorías y errores que no se erradicaron posterior a la implementación de la propuesta de enseñanza.

Finalmente, se consideró la opinión de los participantes durante las entrevistas a profundidad. Para este propósito se grabaron en formato de audio y video las conversaciones, lo que facilitó su posterior transcripción. Esta grabación permitió al investigador capturar todos los detalles importantes que podrían no haber sido evidentes durante la interacción en la entrevista. Esta información adicional ayudó a realizar un análisis más exhaustivo.

3.7.1 Validez de los resultados

Según Sandín (2000), en la investigación educativa la validez de esta se asocia con la calidad de un estudio, rigor científico, veracidad y credibilidad que esta posea. En esta investigación se recolectó información de distintas fuentes y en diferentes momentos, lo que garantiza la validez de los resultados por medio de la triangulación.

Triangulación de la información

De acuerdo con Álvarez y San Fabián (2012), la triangulación es una de las estrategias de validación de mayor uso en la investigación cualitativa, la cual consiste en la validación cruzada cualitativa entre múltiples fuentes de datos, que son recogidas a través de distintas estrategias de datos aplicadas en diferentes periodos y completados con esquemas teóricos (McMillan y Schumacher, 2005), lo que permite una comprensión del objeto en estudio a partir los distintos elementos presentes en la investigación, donde se incluyen el investigador y los diferentes momentos en los que se recolectó la información (Álvarez y San Fabián, 2012).

Por tanto, la triangulación de la información en esta investigación se realizará con las técnicas de recolección de información, la revisión documental, la encuesta, la propuesta de enseñanza y las entrevistas a profundidad, de las cuales se irá obteniendo información en distintas etapas de la investigación.

Primeramente, se tomará en cuenta los resultados de la aplicación del pre-test y la información obtenida en la revisión documental en relación con lo planteado en el marco teórico, para así poder incorporarla en las actividades de la propuesta de enseñanza. Posteriormente, se contrastará la información recolectada en las actividades de la propuesta de enseñanza y en la aplicación del post-test. También, se tomará en cuenta las opiniones de los estudiantes participantes en las entrevistas a profundidad y de este modo, determinar el efecto de la propuesta aplicada.

Por último, cabe destacar que en cada una de las etapas de la recolección y análisis de la información se contrastará los resultados con lo expuesto en el marco teórico. Es decir, se podrán verificar y comparar con aspectos de las perspectivas teóricas y cada una de las categorías planteadas, lo que ayudará a extraer la información de mayor importancia para la presentación e interpretación de los resultados. Por consiguiente, todo ese proceso favorecerá la validez de esta investigación y el interés para futuros estudios.

3.8 Análisis de los datos

3.8.1 Codificación para el análisis de los datos

En este apartado se detalla cada uno de los códigos que se utilizaron para el conteo de los datos de acuerdo con cada una de las categorías de análisis. Esto se hizo en todos los ejercicios de la prueba para cada uno de los estudiantes y el grupo en general.

Estudiantes

En el desarrollo de esta investigación se contó con la participación de 18 estudiantes, que se codificaron como Est1, Est2, …, Est18.

Categorías de análisis

Cada una de las categorías de errores consideradas fueron codificadas como CE1, con subcategorías E1.1, E1.2, E1.3; CE2, con subcategorías E2.1, E2.2, E2.3 y CE3, con subcategorías E3.1, E3.2 y E3.3.

Cuestionarios pre-test y post-test

Ambas pruebas están constituidas por los mismos ejercicios, los cuales corresponden a nueve ítems de desarrollo, donde se contemplan los distintos tipos de ecuaciones lineales abarcadas en secundaria según el programa vigente. Cada uno de los ejercicios se codificó como Ejercicio_a, Ejercicio_b, …, Ejercicio_i y fueron analizados de forma descriptiva. Además, se realizó un conteo de los errores detectados en la herramienta de Excel de acuerdo con cada una de las subcategorías de análisis, lo que permitió comparar las frecuencias de los errores en ambas pruebas y así determinar si hubo menos presencia de errores posterior a implementación de la propuesta.

Por otra parte, para los casos donde no se identificaron errores en los ítems, se clasificaron de dos formas distintas: NR: Ítem sin resolución o respuesta, PC: Todos los procedimientos son correctos.

3.8.2 Análisis de los datos recolectados

Se realizó el análisis de los datos en diferentes etapas de la investigación tomando como base los datos recolectados con los diferentes instrumentos de recolección de información. En la primera etapa se hizo la extracción de información de las diferentes fuentes bibliográficas seleccionadas, mediante el uso de fichas bibliográficas, donde se plasmó la interpretación del autor, apoyado con imágenes de extractos de diferentes textos que fueron considerados en la elaboración de la propuesta de enseñanza, objeto de este estudio.

La segunda etapa consistió en la revisión de la información de cada una de las pruebas pre-test que realizaron los participantes. En ellas se identificaron y clasificaron cada uno de los errores de acuerdo con las subcategorías de análisis descritas. Para el conteo de los errores según cada subcategoría se elaboró un libro en Excel, en el cual se fueron clasificando los errores de cada una de las preguntas del pre-test.

Posteriormente, con la ayuda del programa se realizó el conteo de forma grupal y se pudo apreciar cuáles fueron las subcategorías de errores más frecuentes en los estudiantes, además de contabilizar cuando realizaban los procedimientos en forma correcta o no realizaban ninguno.

Tabla 5. *Instrumento para la cuantificación de los errores cometidos por los estudiantes al resolver el cuestionario pre-test*

Tipo de error manifestado por el estudiante NÚMERO 1													
Ítem	E1.1	E1.2	E1.3	E2.1	E2.2	E2.3	E3.1	E3.2	E3.2	E3.3	PC	NR	Total
Ejercicio_a													0
Ejercicio_b													0
Ejercicio_c													0
Ejercicio_d													0
Ejercicio_e													0
Ejercicio_f													0
Ejercicio_g													0
Ejercicio_h													0
Ejercicio_i													0
Total	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

En la tercera etapa se procedió a realizar diferentes adaptaciones del tipo de ejercicios de la prueba aplicada, los errores encontrados a cada uno de los ejercicios y actividades de la propuesta de enseñanza diseñada, para lo cual se creó una correspondencia entre los errores que los estudiantes cometieron y los abarcados dentro de la propuesta diseñada para el reforzamiento del tema de ecuaciones lineales. Dicha correspondencia entre los ejercicios se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 6. *Congruencia de los ejercicios y errores tratados en la propuesta con los encontrados en el cuestionario pre-test*

Ejercicio del pre-test	**Tipos de error encontrado en el pre- test**	**Errores que se trabajaron en la propuesta**
Ejercicio_a	E2.2, E2.3	E2.3
Ejercicio_b	E1.1, E2.1, E3.1, E3.2	E3.1
Ejercicio_c	E1.1, E2.1, E2.2, E3.1, E3.2	E2.1
Ejercicio_d	E1.1, E2,1	E2.1, E1.3
Ejercicio_e	E2.1, E2.2, E3.2	E2.1, E1.1
Ejercicio_f	E1.3, E2.1, E32	E1.3, E2.2
Ejercicio_g	E1.2, E2.1, E2.2, E3.1, E3.2	E2.2, E3.2
Ejercicio_h	E1.2, E1.3, E2.2, E2.3, E3.1, E3.2	E1.2, E3.1

Fuente: Elaboración propia.

La cuarta etapa implicó un análisis descriptivo de las actividades realizadas por los estudiantes en el material proporcionado durante el desarrollo de la propuesta implementada, con el fin de determinar si se logró el objetivo propuesto. Por último, se realizó el análisis correspondiente a la comparación de los resultados de la prueba pre-test con los del cuestionario post-test para poder determinar el efecto de la propuesta, contrastado con las opiniones de los estudiantes participantes de las entrevistas a profundidad.

Capítulo IV. Análisis y Discusión de Resultados

Este capítulo resume los hallazgos clave de la investigación, obtenidos mediante diversos instrumentos de recolección de información. Se detalla el análisis de información recolectada en los PEM (2012), los libros de secundaria y los artículos científicos consultados. Se incluye una revisión detallada de la información recopilada mediante un cuestionario pre-test, su relevancia en el desarrollo de la propuesta educativa y los resultados de la prueba post-test. Finalmente, se examinan las opiniones de los estudiantes sobre las actividades de enseñanza y el papel de los errores en el fortalecimiento del aprendizaje de ecuaciones lineales con una incógnita.

4.1 Análisis de la revisión documental

Los resultados inician con la información que se recolecta mediante la revisión documental de los PEM (2012), algunos libros de secundaria de octavo y undécimo nivel, y artículos científicos consultados según criterios previamente establecidos.

4.1.1 Programa de Estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública

Para llevar a cabo el análisis del PEM se utilizó un buscador para identificar la frecuencia de la palabra *error*, la cual apareció en 22 ocasiones, así como la palabra *errores*, que encontró 39 veces. Posteriormente, se realizó una lectura y análisis de cada uno de los contextos en los que estas palabras se presentaban. Se observó que los términos *error* y *errores* aparecen en diferentes contextos del programa de estudio, principalmente relacionados con situaciones de aprendizaje. Además, se abordó contenidos y aspectos asociados con la actualización del programa de estudios en el año 2012 y contenidos del plan de estudios específicamente en temas como estadística.

En este caso, en la figura 3(a) el término *errores* hace referencia a que es difícil elaborar un programa que se adapte a todas las formas de aprendizaje. Por eso no existe un programa perfecto y los errores pueden presentarse en cualquier contexto, puesto que son un componente inseparable de la vida (Torre, 2004).

Figura 3. *Mención de error relacionado con contenidos matemáticos y elaboración de los programas de estudio*

Sabemos que no existe un "programa perfecto" ni de matemáticas ni de ninguna asignatura. La educación – como la vida – solo puede ser entendida como un proceso evolutivo en el que, en cada paso, buscamos mejorar. Para ello aprendemos de nuestra propia historia, de nuestros errores y nuestros aciertos; aprendemos también de otras experiencias, de cómo lo han hecho otros para mejorar (o qué cosas no han funcionado bien en otras partes). Con base en ello, y gracias al trabajo de un equipo de lujo de expertos externos al MEP – pero muy cercanos a los procesos de la enseñanza de las Matemáticas – junto con nuestros propios asesores y docentes de aula, hoy contamos con una propuesta que, sin duda, representa un salto muy importante en la enseñanza de las Matemáticas en Costa Rica. A todas y todos ellos, mi agradecimiento.

(a)

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Estadística

Datos

- Uso
- Tipos de datos cuantitativos
- Por conteo
- Por medición
- Fuentes de error en los datos

(b)

Fuente: Tomado del Ministerio de Educación Pública (2012, pp. 22,457).

Por su parte, la figura 3(b) se refiere al área de estadística y probabilidad, en la cual las fuentes del error en los datos son parte de un conocimiento abordado, en el que una de las indicaciones puntuales señala que es "necesario discutir sobre los errores que se pueden generar en los procesos de recolección de información" (MEP, p. 249). A pesar de que es una indicación específica para este contexto particular, incorporar el análisis de los errores de distintos procedimientos le brinda al docente la oportunidad de analizar el progreso cognitivo de los estudiantes (Astolfi, 1999).

Figura 4. *Mención de error relacionado con consideraciones para organizar las lecciones*

Otro asunto: no se trata de usar muchos problemas en una lección, más bien unos pocos a partir de los cuales construir con profundidad los aprendizajes.

Finalmente, es un estilo que permite enriquecer la labor educativa con el correr del tiempo de manera precisa: escogencia de mejores problemas, anticipación de posibles soluciones o errores recurrentes, investigación docente para mejorar la presentación de los problemas y la organización de la lección.

Fuente: Tomado del Ministerio de Educación Pública (2012, p. 44).

En la figura 4 se hace énfasis en algunas consideraciones sobre el estilo para organizar las lecciones, para lo que se sugiere se tomen en cuenta los aportes del estudiante y haya una participación y comunicación asertiva entre ellos y el docente en los ambientes de aprendizaje, y de esa manera poder activar los procesos matemáticos y progresar en el desarrollo de las competencias matemáticas (MEP, 2012).

En ese sentido, el contexto de la figura anterior, al mencionar los *errores*, se refiere a que el profesor debe ser un guía que asesore a los estudiantes y, gracias a su experiencia, anticipar posibles soluciones erróneas para ayudar al estudiante a evitar cometerlos. Por lo tanto, es importante que el docente fomente un ambiente en el que los alumnos no se sientan juzgados por cometer errores, sino que sepan que a partir de ellos pueden aprender y reforzar sus conocimientos y habilidades, como lo propone Torre (2004). Esto se debe a que la enseñanza efectiva no solo trata de proporcionar información, sino también de guiar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje y atender las dificultades que estos poseen en sus conocimientos algebraicos (Socas, 2011).

Además, en los PEM se indica que el docente debe aprovechar las oportunidades en el aula para fomentar actitudes positivas hacia las matemáticas, ya que esto puede tener un impacto significativo en el rendimiento de los estudiantes, especialmente si se logra reducir las percepciones negativas hacia la asignatura que suele existir entre los alumnos.

Figura 5. *Mención de error relacionado con indicaciones para mejorar actitudes y creencias hacia la matemática*

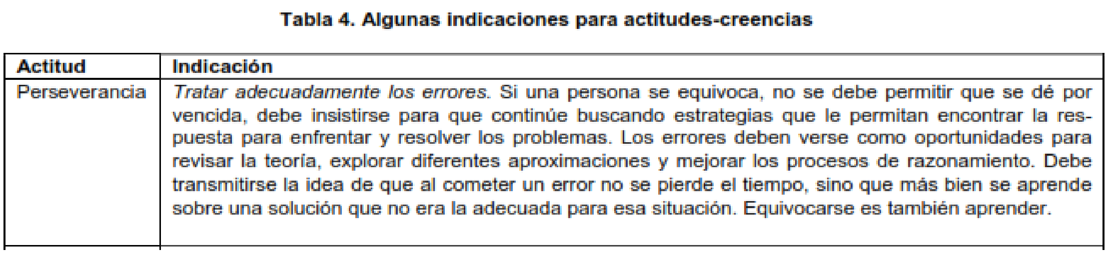


Tabla 4. Algunas indicaciones para actitudes-creencias

Actitud	Indicación
Perseverancia	*Tratar adecuadamente los errores.* Si una persona se equivoca, no se debe permitir que se dé por vencida, debe insistirse para que continúe buscando estrategias que le permitan encontrar la respuesta para enfrentar y resolver los problemas. Los errores deben verse como oportunidades para revisar la teoría, explorar diferentes aproximaciones y mejorar los procesos de razonamiento. Debe transmitirse la idea de que al cometer un error no se pierde el tiempo, sino que más bien se aprende sobre una solución que no era la adecuada para esa situación. Equivocarse es también aprender.

Fuente: Tomado del Ministerio de Educación Pública (2012, p. 63).

En la figura 5 se presentan sugerencias para abordar las actitudes y creencias hacia la matemática. Además, se destaca la importancia de la perseverancia en el aprendizaje, porque cometer errores es normal y no debe permitirse que los estudiantes se den por vencidos o piensen que no son capaces de dominar la materia. En cambio, es necesario motivarlos a ver los errores como oportunidades para explorar diferentes soluciones y procesos de razonamientos y algo presente en todos los procesos de aprendizaje.

Para conseguir lo anterior, una sugerencia es hacer uso de enfoques históricos que ilustren cómo los matemáticos del pasado lograron avances importantes gracias a su perseverancia (MEP, 2012). En ese caso, se requiere que, ante los errores, el docente evite ocasionar bloqueos, rechazos o sanciones y así poder brindar la oportunidad de generar conflictos en el conocimiento de los estudiantes con la intención de potenciar un aprendizaje significativo en ellos (Rico, 1997).

En la misma línea, el programa de estudio también proporciona algunas sugerencias breves sobre cómo utilizar los errores como herramienta de aprendizaje para comprender ciertos contenidos específicos, mediante indicaciones metodológicas.

Figura 6. *Mención de error relacionado con indicaciones metodológicas para el desarrollo de algunos contenidos matemáticos*

Indicaciones metodológicas

Generales para el ciclo

1. Es fundamental repasar los conocimientos y habilidades logrados en el ciclo anterior, mediante problemas que se relacionen con los nuevos conocimientos.
2. Es conveniente dar tiempo para que cada estudiante analice sucesiones y patrones. El análisis contempla identificar, conjeturar, utilizar ensayo y error, comparar soluciones y argumentar las estrategias utilizadas.
3. Para la habilidad de identificar el valor faltante en una expresión matemática, una figura o una tabla, hay que tener en cuenta posibles errores, principalmente en representaciones numéricas. Por ejemplo, algunos podrían responder que el número que falta en la expresión matemática 34 + 57 = □ + 81 es 91 en lugar de 10 pues 34 + 57 es igual a 91. Hay que detectar y corregir este tipo de error, utilizando la igualdad como un equilibrio en una balanza, como se recomendó en el ciclo anterior. Además es elemental que cada estudiante evalúe la pertinencia del resultado encontrado. Utilice la cajita (valor faltante) en el cualquiera de los miembros de la igualdad. Por ejemplo: 34 + □ = 60.

Fuente: Tomado del Ministerio de Educación Pública (2012, p. 241).

En la figura 6 se sugiere el uso del error como una indicación metodológica para el área de relaciones y álgebra. En particular, se menciona que el tema de sucesiones y patrones puede ser abordado a través de métodos como el ensayo y error, comparar soluciones y argumentar las respuestas.

También, se recomienda relacionar el concepto de igualdad con el equilibrio en una balanza para obtener un mejor entendimiento y abordaje de los errores en el tema de valor faltante en una igualdad. Aunque estas estrategias se proponen en el contexto de la educación primaria, también son aplicables en otros contenidos que se aborden en los diferentes niveles educativos, como se realizó en las actividades de la propuesta de enseñanza diseñada en esta investigación. En el contexto de la investigación, se abordan contenidos relacionados con los números reales y se destacan errores comunes en algunas de sus propiedades.

Entre ellos se encuentra la creencia errónea de que el resultado de una raíz cuadrada siempre es positivo, cuando en realidad puede ser tanto positivo como negativo, dependiendo del número bajo la raíz. Este tipo de errores puede abordarse mediante el análisis de igualdades aparentemente correctas, pero que –en realidad– dejan de lado algunos conceptos importantes y caen en *Inferencias no válidas lógicamente* que se asocian directamente con fallas en el razonamiento (Movshovitz-Hadar et al., 1987).

Figura 7. *Mención de error relacionado con propiedades en los números reales y las fórmulas notables*

▲ También es importante comentar que hay números, como por ejemplo $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-25}$ que no son reales.

Se debe realizar un análisis de posibles errores que se pueden cometer al calcular ciertas expresiones. Por ejemplo, analizar lo incorrecto en el siguiente procedimiento:

$$\sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = -5.$$

(a)

El tratamiento de errores algebraicos es fundamental en esta etapa. Un error muy frecuente es hacer $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Es importante asignar suficiente tiempo para potenciar la conjetura y el análisis de las expresiones con distintos valores numéricos, esto ayudará a la toma de decisiones y asimilación de las propiedades.

(b)

Fuente: Tomado del Ministerio de Educación Pública (2012, pp. 292, 345).

En la figura 7(a) se presenta una igualdad que a simple vista parece correcta. Sin embargo, realmente no considera el concepto de valor absoluto y al no tenerlo en cuenta, se puede llegar a conclusiones equivocadas. Esto evidencia la importancia de realizar análisis de errores particulares y de esa forma, fortalecer una comprensión clara de ciertas propiedades matemáticas estudiadas en secundaria.

Bajo la misma línea, en la figura 7(b) se muestra un error frecuente relacionado con el uso de las fórmulas notables, lo que sugiere que el docente debe estar constantemente alerta acerca de estos errores comunes en cada uno de los temas que aborda en clase y tener estrategias didácticas para abordarlos de manera efectiva. En el caso de esta investigación, se abordaron siguiendo las fases de tratamiento de los errores propuestas por Torre (2004) y las sugerencias encontradas en los programas de estudio.

4.1.2 Análisis de libros de texto de octavo año y undécimo año de secundaria

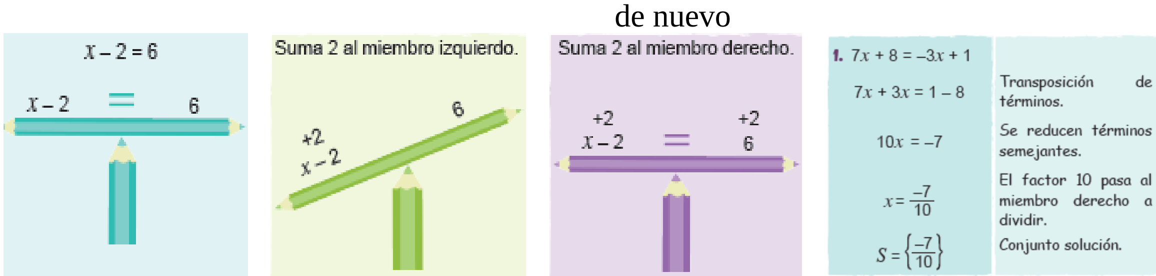
Para llevar a cabo el análisis de los libros de secundaria se consideraron los textos de octavo y undécimo grado publicados por las editoriales Publicaciones Porras y Gamboa, Ediciones Lebombo, Publicaciones Innovadoras en Matemáticas para Secundaria (PIMAS) y Didáctica Multimedia. Se accedió a estos libros de forma gratuita y digital a través de las muestras en las páginas web de las editoriales en las que se brinda el acceso a las muestras de los textos.

En el caso de los libros de octavo nivel, se analizó cómo se desarrolla el tema de ecuaciones. Para eso se tomó en cuenta cuáles son los procedimientos sugeridos para resolución de ecuaciones y el tipo de ejercicios que se proponen para su respectiva práctica, con la intención de evidenciar la congruencia con la propuesta de enseñanza implementada en esta investigación y los PEM. Del mismo modo, en los libros de undécimo nivel se indagó para cuáles de los contenidos de ese nivel se requiere un buen dominio en la resolución de ecuaciones lineales y, además, cuáles son los métodos de solución de ecuaciones lineales que emplean en dichos contenidos.

El libro de Publicaciones Porras y Gamboa (2017a) parte del concepto de tomar una ecuación como una balanza entre dos expresiones matemáticas y para poder solucionar la ecuación dicha balanza no puede perder el equilibrio, como se ilustra en la figura 8(a). Sin embargo, este método solamente lo muestra en algunos ejemplos. En su lugar, inicia la solución realizando la transposición de términos y utilizando operaciones inversas y la reducción de términos semejantes, como se ejemplifica en la figura 8(b) y que –a su vez– es común en el resto del libro y los libros de las demás editoriales.

Figura 8. *Métodos de resolución de ecuaciones utilizado en el libro de 8° año, Publicaciones Porras y Gamboa*

Balanza equilibrada | Balanza desequilibrada | Balanza equilibrada de nuevo



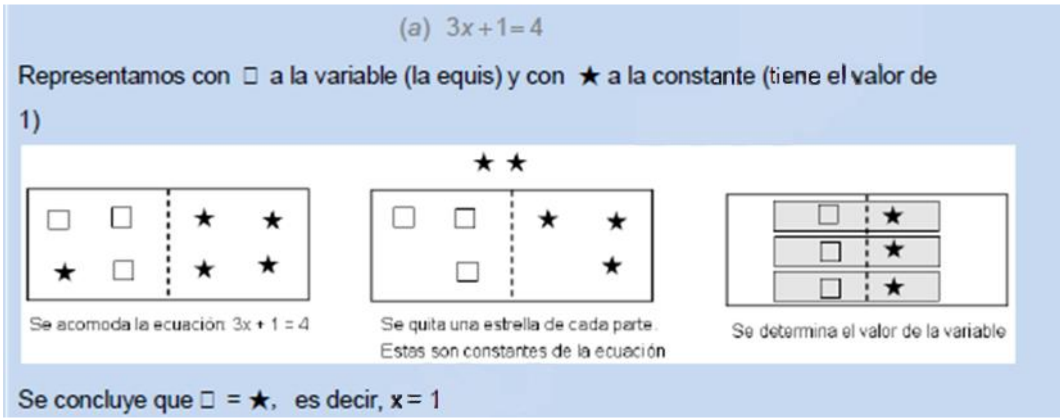
(a) (b)

Fuente: Publicaciones Porras y Gamboa (2017a, pp. 144, 148).

Por su parte, el libro de 8° año de Ediciones Lebombo (2015a) menciona que para determinar el conjunto solución de una ecuación se puede seguir diferentes métodos. Entre ellos está realizar pruebas con una sustituyendo las variables en ambos lados de la igualdad y verificar si la igualdad resultante es verdadera o falsa. Además, indica que existen métodos que ayudan a comprender y visualizar el proceso que se lleva a cabo al resolver una ecuación.

Para eso ejemplifica el método del dominó, donde cada parte de la pieza representa un miembro de la ecuación, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 9. *Método del Dominó para solucionar ecuaciones lineales*



Fuente: Ediciones Lebombo (2015a, p. 124).

Además, señala que dichos métodos se pueden ver limitados en casos al contar con un rango específico, donde puede estar la solución para sustituir los valores o bien, si la solución no es un número entero, puede ser un proceso complejo. También, el método del dominó limita únicamente con números naturales los coeficientes de las variables.

De esa forma, el mismo libro indica que uno de los métodos más eficientes al momento de resolver una ecuación lineal es de forma algebraica, que consiste en la aplicación de operaciones inversas hasta determinar el resultado, como se detalla en la figura 10.

Figura 10. *Método para resolver una ecuación de forma algebraica*

Cualquier valor de una ecuación se puede trasladar de un miembro al otro, para lo cual se efectúa la operación inversa; es decir:

- ☑ Si el valor está sumando; pasa al otro miembro de la ecuación a restar
- ☑ Si el valor está restando; pasa al otro miembro de la ecuación a sumar
- ☑ Si el valor está multiplicando; pasa al otro miembro de la ecuación a dividir
- ☑ Si el valor está dividiendo; pasa al otro miembro de la ecuación a multiplicar

Al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, es conveniente reunir las variables o incógnitas a un mismo miembro de la ecuación, y las constantes al otro.

Fuente: Ediciones Lebombo (2015a, p. 118).

Los libros de 8° año de PIMAS (2016a) y Didáctica Multimedia (2016a) concuerdan en que ambos abordan la resolución de ecuaciones utilizando el enfoque algebraico. Cada una de estas editoriales ofrece su propia explicación y forma de presentar el procedimiento, por medio del uso de diferentes palabras, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 11. *Procedimiento para resolver una ecuación lineal propuesto por las Editoriales PIMAS y Didáctica Multimedia*

Para despejar siempre primero se simplifican los miembros de la ecuación, utilizando las propiedades algebraicas vistas en los capítulos anteriores, y luego para "pasar" de lado se debe seguir el **orden inverso** del orden en que se realizan las operaciones.

(a)

1. Si hay términos semejantes éstos se reducen.
2. Por lo general se acomodan las variables a la izquierda y las constantes a la derecha.
3. Es importante cambiar signos cuando pasamos al otro lado del igual tanto variables como constantes.
4. La cantidad que multiplica a la variable pasa a dividir.
5. La expresión se simplifica.

Clave de Estudio

Para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, aplicamos el criterio del operador inverso (inverso aditivo o inverso multiplicativo).

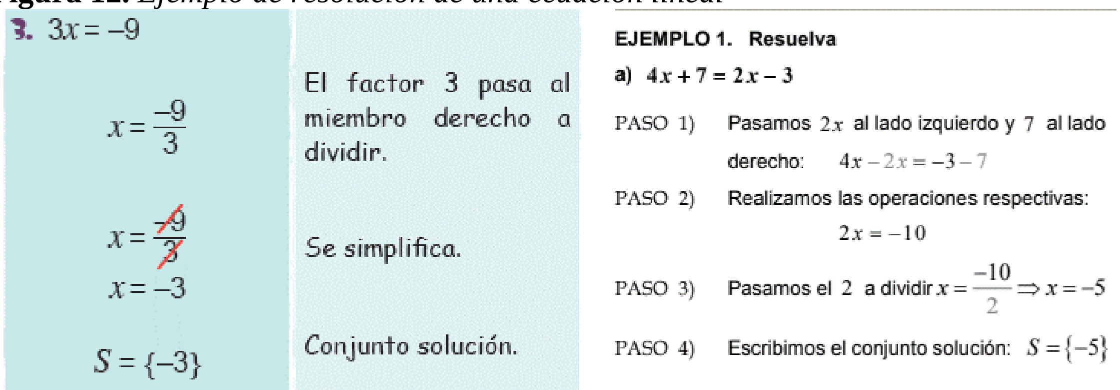
(b)

Fuente: Tomado de (a)PIMAS (2016a, p. 194) y (b) Didáctica Multimedia (2015a, p. 179).

De esta forma, se puede notar que existe una congruencia en todos los libros analizados en cuanto al método de solución de las ecuaciones de manera algebraica, como lo llaman en Ediciones Lebombo (2015a), por su particularidad de *pasar al otro lado* o bien, transponer los términos de la ecuación aplicando operaciones inversas hasta despejar la variable. Asimismo, indican que existen algunas otras propuestas para poder dar con la solución de una ecuación y buscar un mejor aprovechamiento del tema. Sin embargo, dependiendo del conjunto numérico en que se trabaje, existen limitaciones que llevan de vuelta a esa forma tradicional.

Por otra parte, con respecto a los ejercicios propuestos en cada uno de los libros de texto analizados, se logra evidenciar congruencia con lo sugerido en el MEP (2012). En general, todos muestran una serie de ejercicios resueltos con la justificación de cada uno de los procedimientos que realizan al resolver la ecuación, los cuales se van realizando de acuerdo con la cantidad de procedimientos que se deban hacer para dar con la solución.

Figura 12. *Ejemplo de resolución de una ecuación lineal*



3. $3x = -9$

$x = \frac{-9}{3}$ El factor 3 pasa al miembro derecho a dividir.

$x = \frac{\cancel{-9}}{\cancel{3}}$ Se simplifica.

$x = -3$

$S = \{-3\}$ Conjunto solución.

EJEMPLO 1. Resuelva

a) $4x + 7 = 2x - 3$

PASO 1) Pasamos $2x$ al lado izquierdo y 7 al lado derecho: $4x - 2x = -3 - 7$

PASO 2) Realizamos las operaciones respectivas: $2x = -10$

PASO 3) Pasamos el 2 a dividir $x = \frac{-10}{2} \Rightarrow x = -5$

PASO 4) Escribimos el conjunto solución: $S = \{-5\}$

(a) (b)

Fuente: Tomado de (a) Publicaciones Porras y Gamboa (2017a, p. 146) y (b) PIMAS (2016a, p. 193).

En la figura 12(a) se detalla una solución de una ecuación de tipo $ax = c$, presentada en el libro de , Publicaciones Porras y Gamboa (2017a). Cabe mencionar que en este libro de texto se abordan todos los tipos de ecuaciones sugeridas en el MEP (2012), en el mismo orden en que se sugiere en los PEM. Por su parte, la figura 12(b) es una solución presentada en PIMAS (2016a), donde se parte como primer ejemplo del tipo de ecuación $ax + b = cx + d$, en la que dentro de su solución se considera el caso abordado por , Publicaciones Porras y Gamboa (2017a). Asimismo, el libro de Ediciones Lebombo (2015a) contempla todas las clases de ecuaciones sugeridas. Únicamente el libro de Didáctica Multimedia (2015a) no aborda el tipo de ecuación de la forma $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$, que son sugeridos en el PEM.

No obstante, se logra apreciar en todos los libros ecuaciones que van más allá de lo sugerido por el MEP (2012) y que pueden ayudar al estudiante a generalizar los conceptos algebraicos, como identificar y reducir términos semejantes, operaciones con fracciones algebraicas y productos notables, entre otros.

En la figura 13 se muestra un ejemplo de algunos de los ejercicios propuestos en cuatro de los libros que se analizaron, donde se aprecia cómo se proponen ecuaciones que inicialmente no son lineales. Pero, al realizar algún procedimiento de simplificación, se transforman en una ecuación lineal de alguno de los tipos sugeridos en el MEP (2012).

Figura 13. *Ejercicios de ecuaciones lineales propuestos en los libros de texto analizados*

15. $(x+1)^2 = x(x+3) + 10$	(k) $(5x-4)(5x+4) = 25x^2 - (x+1)$
(a)	(b)
15. $\frac{4+2x+3x^2}{3} - \frac{2x^2-x}{2} = 0$	**i.** $(x-5)^2 + 2(3x-1) = x^2 + 3x$
(c)	(d)

Fuente: Tomado de (a) Publicaciones Porras y Gamboa (2017a, p. 150), (b), Ediciones Lebombo (2015a, p. 134), (c) PIMAS (2016a, p. 196) y (d) Didáctica Multimedia (2015a, p. 185).

Además, en los libros de undécimo año se identificó en qué contenidos es fundamental tener conocimientos sobre cómo resolver ecuaciones lineales, ya que existen temas en este nivel que dependen de contenidos previos (MEP, 2012). Además, se detectó una correspondencia entre los temas y su abordaje, como las ecuaciones exponenciales y logarítmicas. El propósito de estas es que los estudiantes dominen las propiedades de los exponentes y los logaritmos, donde se debe resolver una ecuación lineal, por lo que en sus explicaciones no detallan este proceso.

Figura 14. *Procedimiento y ejemplo para resolver una ecuación exponencial y logarítmica*

3. Procedimiento para resolver ecuaciones exponenciales

Paso 1: Verifica si se puede reescribir la ecuación dada de forma tal que ambos miembros se expresen en términos de la misma base.

Paso 2: Dado que la correspondencia de una función exponencial es biunívoca, es decir uno a uno, significa que no podemos tener la misma imagen para dos preimágenes, de manera simbólica si consideramos una función exponencial $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$, por ejemplo si $a^x = a^y \Rightarrow x = y$. Por esa condición de inyectividad de la función exponencial se igualan los exponentes de ambos miembros de la ecuación.

Paso 3: Se resuelve la ecuación resultante.

(a)

4.7 Ecuaciones donde se aplica la definición de logaritmo

$x = \log_a b = \Longrightarrow a^x = b$

Si vamos a resolver una ecuación como la siguiente: $\log(x+3) - \log(x-6) = 1$

Aplicamos las propiedades y la definición de logaritmo: $\log\left(\frac{x+3}{x-6}\right) = 1$

Como no se indica base, quiere decir que el logaritmo es base 10.

$$\log_{10}\left(\frac{x+3}{x-6}\right) = 1$$
$$\left(\frac{x+3}{x-6}\right) = 10^1$$
$$x+3 = 10(x-6)$$
$$x+3 = 10x-60$$
$$x-10x = -60-3$$
$$-9x = -63$$
$$x = \frac{-63}{-9}$$
$$x = 7$$

Ahora hay que probar la solución en la ecuación original: $\log(7+3) - \log(7-6) = 1$

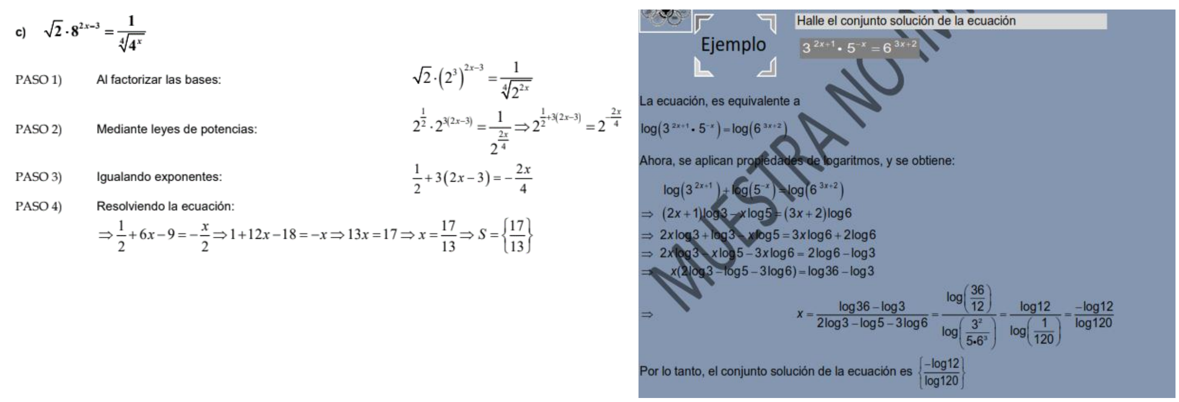
$1 = 1$ Como se cumple la igualdad $S = \{7\}$

(b)

Fuente: Tomado de (a) Publicaciones Porras y Gamboa (2017b, p. 35) y (b) Didáctica Multimedia (2015b, p. 78).

En la figura 14 se observa que en el nivel de undécimo no se abordan los algoritmos de resolución de ecuaciones lineales de manera directa, sino que se utilizan como una herramienta para desarrollar otras habilidades. Se centra más en el razonamiento y propiedades, y se asume que domina dichos procesos.

Figura 15. *Solución de una ecuación exponencial*



(a) (b)

Fuente: Tomado de (a) Ediciones Lebombo (2015b, p. 55) y (b) PIMAS (2016b, p. 79).

La revisión crítica de estos libros permitió identificar la congruencia entre las prácticas sugeridas en los textos y las directrices del Programa de Estudios de Matemática (PEM), y también diseñar bajo una misma línea una propuesta de enseñanza que contenga distintas actividades de aprendizaje bajo un constructo de elementos organizados, con el fin de subsanar las dificultades detectadas (Fernández et al., 2018).

La elección de incorporar ideas derivadas de ese análisis en la propuesta de enseñanza de esta investigación subraya un esfuerzo por diseñar estrategias didácticas que se alineen con las necesidades educativas actuales y promuevan un aprendizaje significativo. Esto es particularmente relevante en el contexto para abordar y corregir los errores comunes en la resolución de ecuaciones lineales, un aspecto crítico en la formación matemática de los estudiantes que ha sido ampliamente discutido en la literatura, como lo señalan Pérez et al. (2019) y Hall (2002).

Cabe señalar que, al integrar métodos visuales y kinestésicos, como el uso de una *balanza matemática* para representar ecuaciones y enfatizar la importancia de las operaciones inversas, la propuesta busca no solo reforzar el entendimiento conceptual, sino también ofrecer a los estudiantes herramientas prácticas para superar dificultades específicas, en consonancia con las categorías de errores identificadas e intentar fomentar en el estudiante el mejor entendimiento conceptual.

4.1.3 Análisis de investigaciones relacionadas con el uso de los errores en la enseñanza de matemáticas

En busca de alguna relación con la categorización y el uso de los errores algebraicos en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita dentro de los entornos de aprendizaje, se analizaron tres artículos bajo las características expuestas en el capítulo anterior.

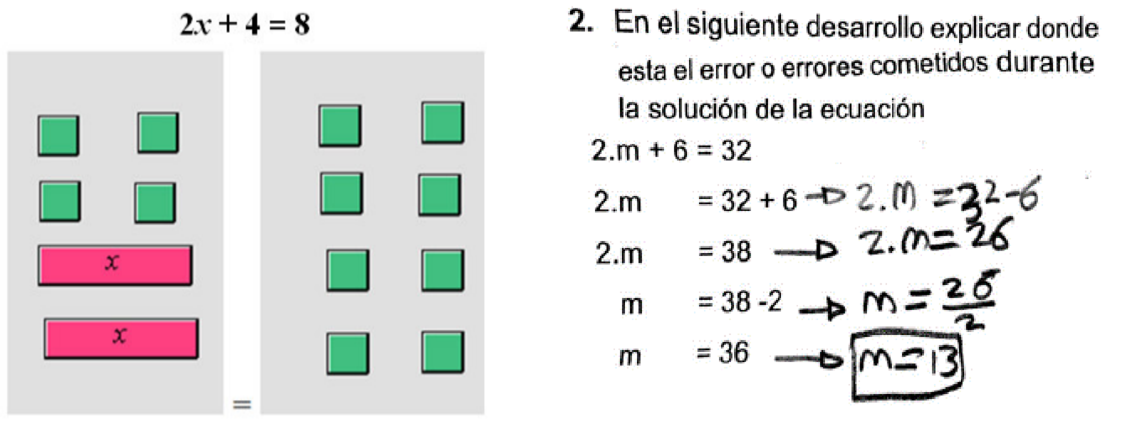
En ellos se logra identificar algunas relaciones con las categorías de errores desarrolladas en el marco teórico. Por ejemplo, la investigación de Gamboa y Fonseca (2017) detalla diversas clasificaciones de errores en matemáticas de forma general, fundamentadas en dos aspectos distintos. El primero se refiere al conocimiento matemático al realizar alguna operación, donde se coincide con la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987) y el segundo aspecto, al procesamiento de la información como reglas de razonamiento demostrativo.

De manera similar, el trabajo de Samuel et al. (2016), bajo la opinión de docentes y estudiantes, desvela que los problemas más comunes que enfrentan los alumnos en el tema de ecuaciones lineales son causados por: a) dificultades para agrupar términos similares, b) dificultades para manipular signos y símbolos algebraicos, y c) los estudiantes creen que en ocasiones estos conceptos se explican muy rápido. Los problemas a) y b) se pueden asociar con los errores aritméticos y de concepto propuestos por Pérez et al. (2019), mientras que el problema c) se puede deber a que existen incongruencias entre las estrategias y recursos planteados con las características y capacidades de los estudiantes (Parra, 2021).

En ese caso, Maldonado (2018) sugiere que se tomen en cuenta elementos importantes al momento de trabajar las ecuaciones lineales. Por ejemplo, el docente no debería solicitarle al estudiante que realice un procedimiento y que este sea de forma correcta, sino que –en contraposición– podría pedirle que revise algún ejercicio resuelto de forma incorrecta y que él sea quien indique dónde se encuentra el error y explique el porqué de este.

Asimismo, Samuel et al. (2016) hacen hincapié en la necesidad de proporcionar experiencias prácticas a los alumnos cuando se explican estos temas, de forma que se dé un aprendizaje profundo y duradero en ellos mediante actividades que generen un impacto positivo en el conocimiento del estudiante, como se observa en la figura 16(a).

Figura 16. *Sugerencia de ejercicio para el abordaje del tema de ecuaciones lineales*



(a) (b)

Fuente: Tomado de (a) Maldonado (2018, p. 86) y (b) Samuel et al. (2016, p. 101).

Bajo la misma línea, Samuel et al. (2016) destacan que los materiales manipulativos concretos y virtuales en la educación matemática se han convertido en un medio para tender un puente de transición de las matemáticas concretas a las abstractas. Sin embargo, Maldonado (2018) menciona que en una unidad didáctica para el abordaje de este tema se debe tomar en cuenta la aplicación de un modelo diverso de enseñanza, que conjugue tres teorías: conductismo, cognitivismo y constructivismo, ya que así se pueden fortalecer procesos mentales, como recordar hechos, generalizaciones, asociar conceptos y desarrollar procedimientos, como se muestra en la figura 16(b).

De esa manera, se puede generar una transformación del modelo pedagógico tradicional que se aplica en las clases de álgebra por un modelo donde el estudiante tome una participación activa, se le dé mayor protagonismo (Maldonado, 2018) y los errores se puedan utilizar como una fuente de motivación y punto de partida para la exploración de unas matemáticas creativas. Esto implicaría plantear y resolver problemas valiosos de forma que se desarrollen diferentes tipos de tareas que permitan descubrir conocimientos erróneos, fomentar la reflexión y activar conceptos relevantes, como el uso de diagramas, sustitución de números sencillos, juegos, invención de preguntas y calificación de tareas colectivas (Gamboa y Fonseca, 2017).

En ese sentido, en esta investigación se consideraron aspectos relevantes propuestos por Gamboa y Fonseca (2017), Maldonado (2018) y Samuel et al. (2016) para la elaboración de las actividades. La implementación de materiales manipulables, junto con el énfasis en el trabajo colaborativo y la reflexión sobre errores, fue un aspecto de suma importancia. Estos enfoques son consistentes con Méndez et al. (2018), quienes afirman que las matemáticas pueden aprenderse de manera divertida y con la teoría del error de Torre (2004), que promueve una perspectiva distinta sobre los errores en clase y busca su reducción a través de metodologías no tradicionales.

4.2 Resultados y análisis de la prueba pre-test

Este segmento detalla los resultados obtenidos del análisis de las pruebas pre-test realizadas por los estudiantes. En el proceso se efectuó una revisión de estas pruebas y se identificó y registró cada uno de los errores conforme con las subcategorías establecidas en la tabla 4 de este documento. Este proceso permitió una comprensión detallada de los patrones de errores comunes y sus posibles causas.

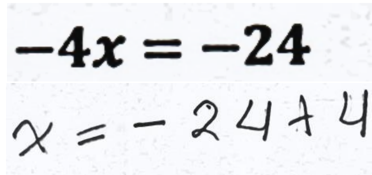
Tabla 7. *Tipo de error manifestado por el grupo de estudiantes en cada una de las preguntas del pre-test según subcategorías de análisis*

	E1.1	E1.2	E1.3	E2.1	E2.2	E2.3	E3.1	E3.2	E3.3	PC	NR	Total
Ejercicio_a	0	0	0	0	1	1	0	0	0	14	2	2
Ejercicio_b	3	0	0	3	0	0	4	0	0	4	4	10
Ejercicio_c	0	1	3	0	1	1	3	5	0	1	9	13
Ejercicio_d	2	0	0	6	0	1	2	2	0	0	6	13
Ejercicio_e	1	0	0	3	0	0	0	0	0	2	13	4
Ejercicio_f	1	0	0	8	2	0	0	1	0	0	9	12
Ejercicio_g	0	0	4	4	0	0	0	2	0	0	8	10
Ejercicio_h	0	0	0	1	4	0	1	1	0	0	12	7
Ejercicio_i	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	17	1
Total	8	1	7	20	7	3	9	11	0	23	82	66

Fuente: Elaboración propia.

De un total de ítems evaluados en la prueba pre-test, se identificó un total de 66 errores distribuidos en diversas subcategorías. En 23 ocasiones, los estudiantes lograron resolver adecuadamente los ejercicios planteados (PC), mientras que un total de 82 ejercicios no fueron resueltos (NR). Entre los ejercicios resueltos, cabe destacar la ecuación presentada en el ejercicio_a, en el que se exhibió la menor cantidad de errores. En este caso, 14 de los estudiantes pudieron resolverla de manera correcta, 2 resolvieron y cometieron errores, y únicamente 2 de ellos no brindaron respuesta.

Figura 17. *Ilustración del error en la solución del ejercicio_a*



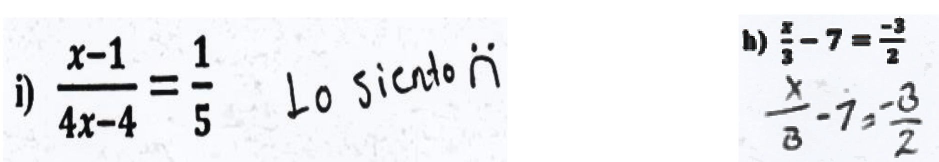
Fuente: Elaboración propia.

La figura 17 muestra un error de la subcategoría E2.3 *error de coeficiente*, cometido por el estudiante 7. En este asume que la operación realizada por el coeficiente de la variable es una suma, en lugar de una multiplicación. Esto se refleja en cómo el –4 se traslada al lado derecho de la ecuación como una suma.

Otro resultado relevante que se identificó fue la notable cantidad de estudiantes que no proporcionaron ninguna respuesta o procedimiento en algunos de los ejercicios de la prueba. Específicamente, 13 estudiantes no abordaron el ejercicio_e, 12 estudiantes no resolvieron el ejercicio_h y 17 estudiantes no completaron el ejercicio_i.

Es importante resaltar que ningún estudiante ofreció una respuesta correcta para el ejercicio_h y el ejercicio_i. Asimismo, en el caso del ejercicio_i, solo uno de todos los estudiantes que realizaron el pre-test intentó abordarlo. Los demás simplemente copiaron los ejercicios o escribieron mensajes de disculpa por no poder resolverlo, lo que suele preocupar, ya que al nivel de undécimo año las ecuaciones se consideran como un conocimiento previo (MEP, 2012), como se evidencia en la figura 18.

Figura 18. *Ilustración de ejercicios sin solución*

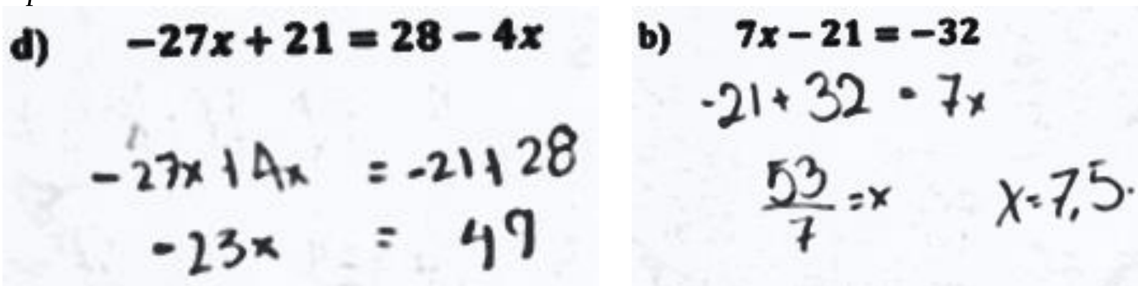


(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, se contabilizó un total de 8 ejercicios en los que se cometieron errores pertenecientes a la subcategoría E1.1 *errores al efectuar operaciones básicas con números enteros*. Dos de ellos se muestran en la siguiente figura.

Figura 19. *Ilustración de errores de la subcategoría E1.1 en los ejercicios d y b, respectivamente*



(a) (b)

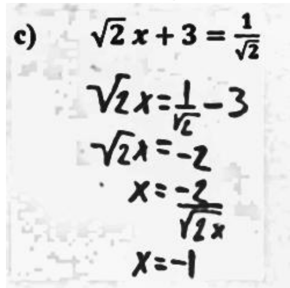
Fuente: Elaboración propia.

Las imágenes de la figura anterior muestran las soluciones brindadas por los estudiantes 8 y 11, respectivamente. En la figura 19(a) se aprecia cómo el alumno realizó la transposición de términos de manera correcta en el primer paso. Sin embargo, al hacer la operación –21+28, no consideró el signo del primer término y sumó como si ambos fueran enteros positivos, por lo que obtuvo como resultado 49. Según Movshovitz-Hadar et al. (1987), este error se puede asociar con la categoría de *datos mal utilizados*, que incluye la omisión de un dato importante en la solución de un ejercicio, como es el signo negativo del primer término o bien, por descuido al efectuar la operación, ya que en el mismo ejercicio realiza una operación similar de forma correcta.

Por otra parte, en la figura 19(b) se observa cómo el estudiante primero realizó una transposición de términos en la que el término con variable no cambia de signo y muestra así una dificultad en el intercambio de sumandos. De acuerdo con Rosas (2013), es la incapacidad de comprender la transposición de términos, como *cambiar de lado-cambiar de signo* y el estudiante solamente realiza este proceso cuando pasa de un término negativo a uno positivo y el caso contrario lo omite. Posteriormente, comete un error al efectuar operaciones con números enteros (Pérez et al., 2019) y al hacer la operación –21+32, suma los elementos como si fueran del mismo signo, por lo que obtiene como resultado 53.

Luego, en la subcategoría E1.2. *errores al efectuar operaciones básicas con números racionales*, solo se contabilizó un ejercicio con error. En esta se abordan principalmente las operaciones con fracciones (Pérez et al., 2019). Cabe señalar que la ausencia de errores identificados podría estar relacionada con la baja tasa de respuestas en los ejercicios que requerían el uso de operaciones con números racionales, ejercicio_c, ejercicio_h y ejercicio_i. Esto no descarta su existencia, ya que es posible que este tipo de errores haya pasado desapercibido, dado que no hubo suficientes respuestas por parte de los estudiantes.

Figura 20. *Ilustración de errores de la subcategoría E1.2 en el ejercicio_c*

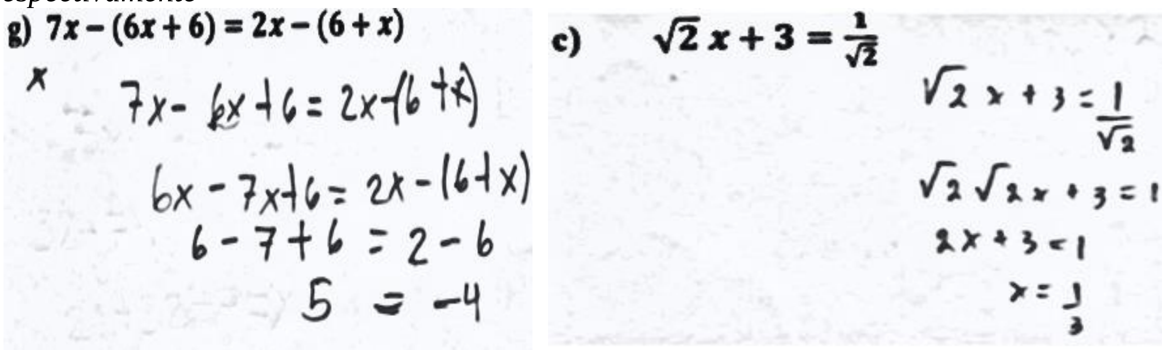


Fuente: Elaboración propia.

La figura 20 muestra la solución proporcionada por el estudiante 14. En esta se aprecia cómo el alumno comenzó el proceso de solución de la ecuación de manera correcta al transponer el término 3 al lado derecho de la ecuación, considerando de forma adecuada que, al cambiar de lado, se cambia de signo (Rosas, 2013). Sin embargo, cuando debió realizar la operación $\frac{1}{\sqrt{2}} - 3$, olvidó el denominador de la fracción y operó únicamente $1 - 3$, omitiendo el denominador de la fracción. Y, aunque se estaba trabajando con un número irracional, el error cometido no se asocia con este en lo absoluto. Posteriormente, transpuso el coeficiente de la variable al lado opuesto con la operación inversa correcta, pero también escribió la variable *x*, y al simplificar la operación, omitió la raíz y obtuvo como resultado -1.

En la subcategoría E1.3 *errores en la propiedad distributiva*, se identificó este tipo de error en 7 ocasiones. En las imágenes de la figura 21 se muestran las soluciones proporcionadas por los estudiantes 15 y 17, respectivamente. En la figura 21(a), se observa cómo el estudiante intentó eliminar los paréntesis del lado izquierdo de la ecuación, aplicando una distributividad incompleta del signo negativo, que se puede deber a un error con origen en la aritmética (Rodríguez, 2015). Además, el ejercicio venía acompañado de numerosas inconsistencias en la resolución de la ecuación, incluyendo procedimientos que carecían de justificación lógica y matemática, donde existe una pérdida del significado de las variables (Rosas, 2013).

Figura 21. *Ilustración de errores de la subcategoría E1.3 en los ejercicios g y c, respectivamente*



(a) (b)

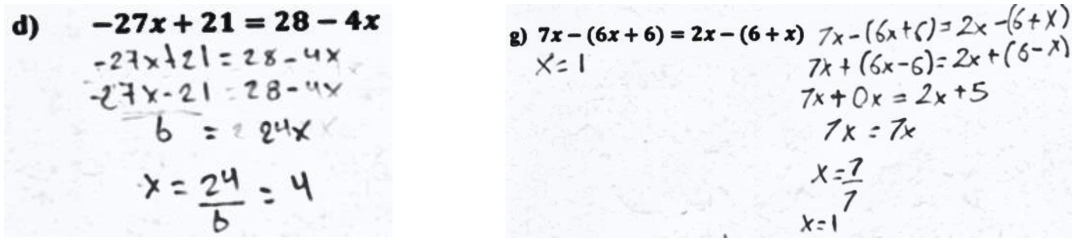
Fuente: Elaboración propia.

De manera similar, en la figura 21(b) el estudiante inicialmente intentó eliminar los términos fraccionarios. Para eso, transpuso el término $\sqrt{2}$ presente en el denominador del lado derecho de la ecuación para multiplicarlo en el lado izquierdo. Sin embargo, cometió un error al realizar este procedimiento, ya que no consideró que esta operación debía aplicarse a cada uno de los términos del lado opuesto de la ecuación (Pérez et al., 2019). Además, al pasar el término que está sumando al otro lado de la igualdad, lo hizo como una división, confundiendo la operación inversa que debía realizar (Hall, 2002). En consecuencia, se demuestran errores de diversas subcategorías en un solo ejercicio.

En la misma línea, se observa en la subcategoría E2.1 el error común de confundir el término con la incógnita y el término independiente (Hall, 2002; Pérez et al., 2019). Este tipo de error representa la subcategoría más frecuente entre los errores identificados, con un total de 20 ocasiones en las que se cometió.

La figura 22 muestra dos imágenes para ejemplificar este tipo de error mediante las soluciones proporcionadas por los estudiantes 5 y 18, respectivamente. En la figura 22(a) se observa cómo el estudiante asumió que los dos términos del lado derecho de la igualdad son constantes y simplificó $-27x + 21$ a 6, incurriendo en errores al operar números enteros (Pérez et al., 2019), ya que –si consideró ambos elementos como semejantes al sumar dichos términos– el resultado debería ser negativo. También simplificó $28 - 4x$ a $24x$, lo cual es incorrecto.

Figura 22. *Ilustración de errores de la subcategoría E2.1 en los ejercicios d y g, respectivamente*



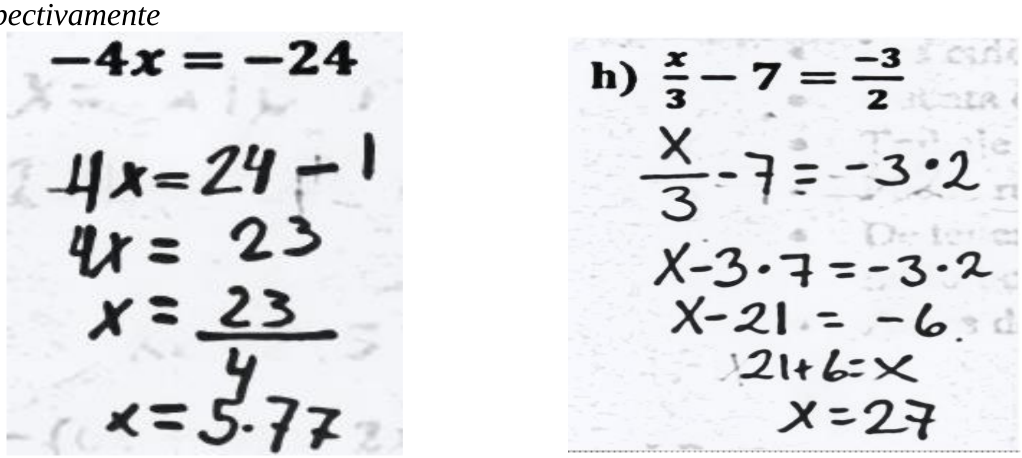
(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

De igual manera, en la figura 22(b), se aprecia que el alumno simplificó las operaciones dentro de los paréntesis, asumiendo que los elementos eran términos semejantes, cuando en realidad no lo son. En el lado izquierdo de la igualdad, consideró ambos elementos como variables y en el derecho como constantes, simplificó $6x - 6$ a 0, $6 - x$ a 5 y, en el antepenúltimo paso, cometió nuevamente el error al simplificar la expresión $2x + 5$ como $7x$.

En la subcategoría E2.2 *errores en el método de la balanza*, que se considera como un error de procedimiento según Pérez et al. (2019), se contabilizó en 8 ocasiones este tipo de error. En la siguiente figura se muestran dos de ellos.

Figura 23. *Ilustración de errores de la subcategoría E2.2 en los ejercicios a y h, respectivamente*



(a) (b)

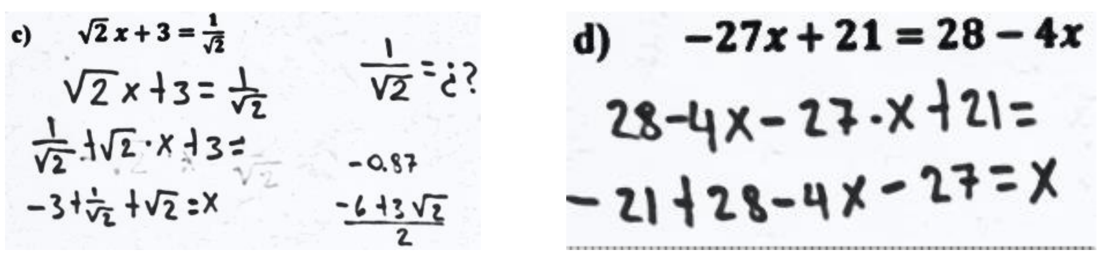
Fuente: Elaboración propia.

En las imágenes de la figura anterior se exponen las soluciones proporcionadas por los estudiantes 14 y 9, respectivamente. Con respecto a la figura 23(a), para resolver la ecuación partió de restar una unidad del lado derecho de la ecuación y si se considera la ecuación como una balanza, en este procedimiento pierde el equilibrio (Pérez et al., 2019).

En la figura 23(b) se observa cómo el estudiante cometió un error al transcribir inicialmente incorrectamente el ejercicio, pues al lado derecho de la ecuación, en lugar de colocar la fracción $-\frac{3}{2}$, cambió la operación a una multiplicación y escribió $-3 \cdot 2$ sin justificación alguna y se pueden denominar *errores técnicos* (Movshovitz-Hadar et al., 1987). Posteriormente, intentó eliminar el término fraccionario multiplicando por 3 cada término en el lado izquierdo de la igualdad, a pesar de que la operación la aplicó de forma correcta. Este procedimiento se debió realizar en ambos lados de la igualdad. También en el último paso, logró visualizar errores en la transposición de términos de un lado al otro de la igualdad, lo que refleja dificultad en el intercambio de sumandos (Rosas, 2013).

En la subcategoría E2.3 *error en el coeficiente* se contabilizaron únicamente 3 ejercicios con ese tipo de error. Uno de ellos en el ejercicio_a, que se detalla al inicio de la sección y los demás en la siguiente figura.

Figura 24. *Ilustración de errores de la subcategoría E2.3 en los ejercicios c y d, respectivamente*



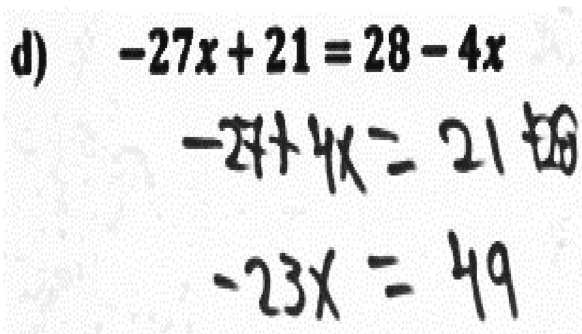
(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

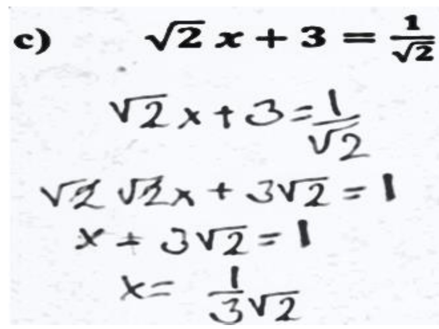
En las imágenes de la figura anterior se presentan dos soluciones proporcionadas por el estudiante 15. En la solución de la figura 24(a) se observa cómo en el primer paso el alumno transpuso todos los elementos de la ecuación al lado izquierdo de la igualdad, sin considerar el cambio de signos que esto genera, mostrando así dificultad en el intercambio de sumandos en una ecuación (Rosas, 2013). Luego, aunque indicó mediante un punto que la operación que realizó el coeficiente $\sqrt{2}$ con la variable x es una multiplicación, en el paso siguiente transpuso la variable x al lado derecho de la ecuación como si la operación que hizo con el coeficiente fuera una resta (Pérez et al., 2019). De manera similar, en el ejercicio de la figura 24 (b) repitió la misma secuencia que en el ejercicio anterior y transpuso una variable de un lado a otro de la igualdad sin considerar la operación que realizó con el coeficiente que la acompañaba.

Consecutivamente, en la subcategoría E3.1 *aplicación incorrecta de operaciones inversas* se detectó este tipo de error en 9 ocasiones. Dos de ellas se detallan en la figura 25.

Figura 25. *Ilustración de errores de la subcategoría E3.1 en los ejercicios d y c, respectivamente*



(a)



(b)

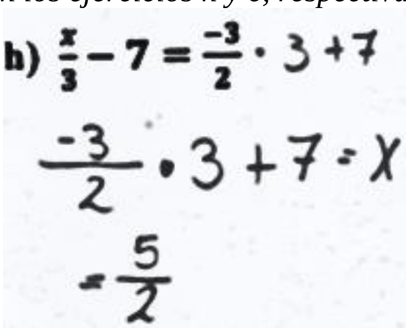
Fuente: Elaboración propia.

En las imágenes de la figura 25 se muestran las soluciones proporcionadas por los estudiantes 13 y 16, respectivamente. Este error se presenta cuando se omite realizar el cambio de operación al transponer un término de un lado a otro de la ecuación o bien, se realiza una operación inversa que no es la correcta (Pérez et al., 2019). En la figura 25(a) se observa que el estudiante intentó inicialmente agrupar los términos con variables en un lado de la igualdad y los términos constantes en el otro. Sin embargo, al transponer el término constante 21 del lado izquierdo al derecho, no cambió de signo y permaneció positivo.

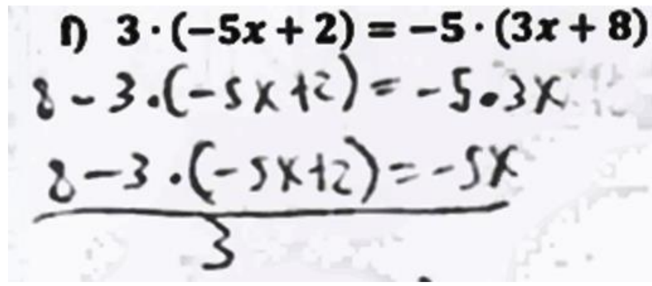
En la figura 25(b) el estudiante comenzó eliminando los términos fraccionarios de la ecuación. Para eso, transpuso el término $\sqrt{2}$ del lado derecho al izquierdo para multiplicar ambos términos en el lado izquierdo, un procedimiento válido y correcto. Sin embargo, en el paso siguiente, al realizar la multiplicación $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, canceló los coeficientes como si estos fueran inversos y no lo son. En el paso siguiente, transpuso el término $3\sqrt{2}$ como una división, en lugar de hacerlo como una resta, que era la operación inversa correcta y eso se puede deber a que no comprendió el concepto y objetivo de cada una de las operaciones algebraicas (Hall, 2002).

Conjuntamente, en la subcategoría E3.2 *error en la jerarquía de las operaciones* se logró detectar un total de 12 ejercicios con este tipo de error.

Figura 26. *Ilustración de errores de la subcategoría E3.2 cometidos por los estudiantes 3 y 9 en los ejercicios h y c, respectivamente*



(a)



(b)

Fuente: Elaboración propia.

En las imágenes de la figura anterior se presentan las soluciones proporcionadas por los estudiantes 3 y 6. En la figura 26(a) se puede observar cómo, al despejar la variable, el alumno transpuso el denominador como una multiplicación y luego sumó la constante 7, manifestando un orden erróneo al realizar los procedimientos (Pérez et al., 2019). Y, aunque aplicó las operaciones inversas de manera correcta al transponer los términos, alterar la jerarquía de las operaciones condujo a un resultado incorrecto.

En la figura 26(b) se muestra cómo, al despejar la variable, el estudiante transpuso elementos de un lado a otro de la igualdad sin seguir el orden adecuado. Inicialmente, transpuso el 8 del lado derecho de la igualdad sin considerar que este valor se encontraba dentro de un paréntesis y para realizar este procedimiento, primero debía aplicar la propiedad distributiva. En el paso siguiente, transpuso el 3 que multiplicó como una división, sin considerar que para despejar la variable debía haber eliminado primero los paréntesis y simplificado los términos semejantes en la igualdad, realizando *inferencias no válidas lógicamente*, que se relacionan principalmente con fallas en el razonamiento de los estudiantes (Movshovitz-Hadar et al., 1987).

En la subcategoría de análisis E3.3 *falta de verificación de la solución*, no se contabilizó ningún error. Esto se debe a que el ejercicio del cuestionario pre-test donde podía ocurrir este tipo de error corresponde al ejercicio_i. No obstante, en este ejercicio 17 de los 18 estudiantes no realizaron ningún procedimiento y el estudiante que intentó resolverlo no logró brindar una solución.

Además, un detalle importante que se aprecia en todas las soluciones obtenidas en la prueba es que los alumnos no proporcionan el conjunto solución una vez que habían completado todo el proceso de resolución. Esto es de suma importancia, ya que puede darse el caso de que el valor al que han despejado la variable no sea una solución válida para la ecuación o bien, cuente con una solución infinita.

En última instancia, a través del análisis de la prueba, es relevante destacar la cantidad de preguntas sin responder que –junto con la cantidad de errores encontrados– se puede deber a que existe algún elemento de un conocimiento parcialmente construido (Rico, 1997) que refleja indicios en la falta de comprensión por parte de los estudiantes sobre lo que se debe hacer para resolver una ecuación. Esto es particularmente preocupante en un nivel donde se espera que este conocimiento sea previo.

4.3 Resultados y análisis de la propuesta de enseñanza

4.3.1 Actividad 1

La actividad inicial, denominada *A poner en equilibrio la balanza* (ver anexo 12), buscó que los estudiantes reconocieran errores en ecuaciones lineales previamente solucionadas, representadas mediante balanzas desequilibradas por fallos en su resolución. Se animó a los alumnos a corregir estas ecuaciones utilizando balanzas manipulables, que facilitaban la representación y resolución paso a paso hasta completar la solución.

Para el desarrollo de esta actividad se contó con un espacio de 80 minutos entre el tiempo de explicación y su aplicación. Se pretendió trabajar con un proyector multimedia como apoyo visual en la propuesta, pero no se logró tener acceso a este. Por lo tanto, se debió hacer uso de la pizarra y material impreso únicamente, lo que permitió el desarrollo de la actividad sin ninguna complicación.

A continuación, se muestra un análisis detallado de los resultados obtenidos en los ejercicios, por medio de imágenes de algunas de las soluciones planteadas. Aquí se evidencia que la actividad resultó ser desafiante e incluso difícil para los grupos participantes. Cabe señalar que, a pesar de que los estudiantes lograron identificar algunos de los errores planteados en los ejercicios, en ciertos casos las soluciones presentadas carecieron de claridad y explicación. Además, se observó que en ocasiones no se siguieron las indicaciones y se optó por brindar descripciones visuales, en lugar de abordar el enfoque solicitado, lo que evidencia discordancia entre los datos y el tratamiento que le da el estudiante (Movshovitz-Hadar et al., 1987).

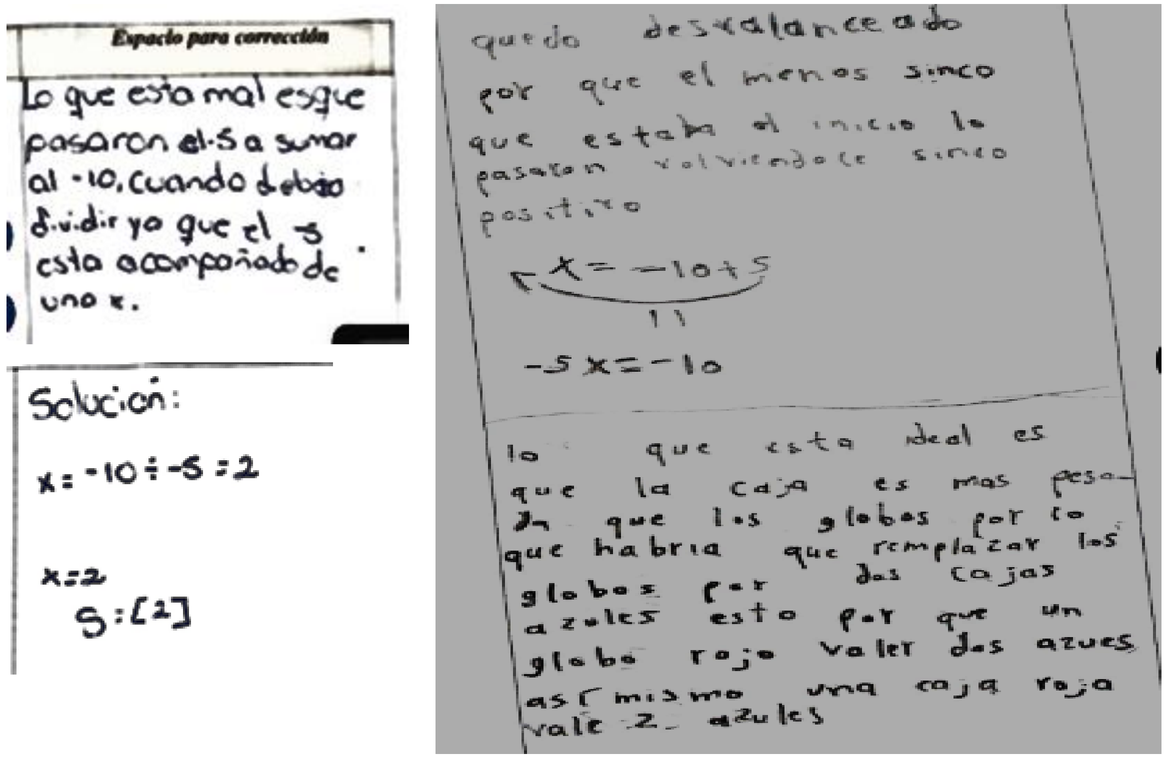
Por otra parte, en el nivel 3 de la actividad se evidenció una disminución considerable en las respuestas, lo que representa un indicio de dificultades en la manipulación de expresiones algebraicas, especialmente cuando involucran fracciones o números irracionales (Pérez et al., 2019). Aunque estos contenidos no corresponden propiamente al nivel de undécimo (MEP, 2012), es común que algunos errores matemáticos persistan en los estudiantes debido a dificultades que poseen desde grados inferiores (Gamboa et al., 2019; Parra, 2021).

Las imágenes de la figura 27 hacen referencia a las respuestas proporcionadas por los grupos 1 y 6, respectivamente. En este ejercicio se les propuso a los estudiantes como solución lo siguiente:

$$-5x = -10 \Rightarrow x = -10 + 5$$

En la figura 27(a) los estudiantes identificaron de manera clara el error presente al señalar que el -5 no debería *pasar* como suma, sino como división. Esto supone indicios de comprensión acerca de que la operación aritmética realizada por una constante delante de una variable es una multiplicación. Además, reconocieron que para resolver la ecuación era necesario *pasar al otro lado* el término, utilizando la operación inversa, en este caso, la división.

Figura 27. *Solución del ejercicio 1 del nivel 1 de la actividad A poner en equilibrio la balanza*



(a) (b)

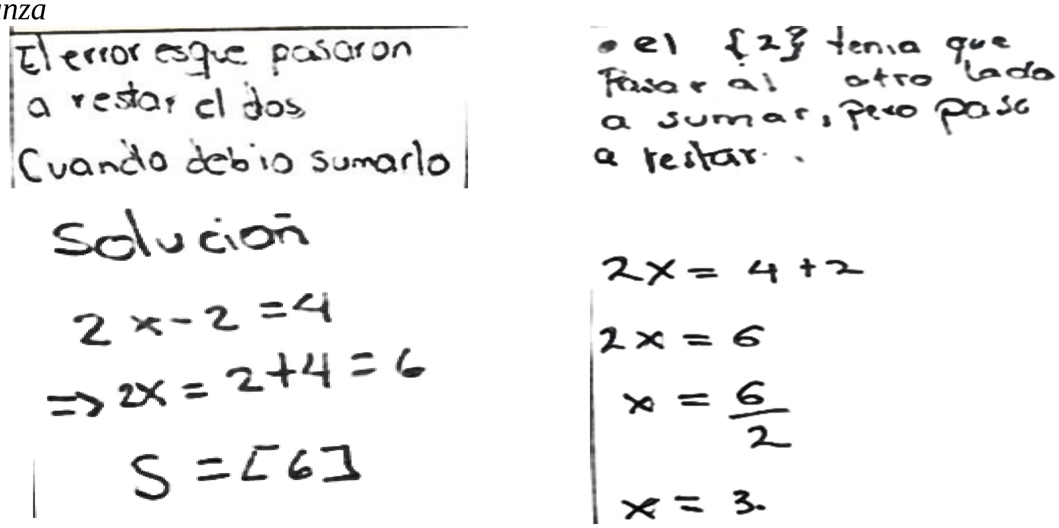
Fuente: Elaboración propia.

De forma similar, en la figura 27(b), los alumnos lograron identificar el *error de coeficiente* relacionado con trasponer el término -5 al lado derecho de la ecuación como una suma, aunque no detallaron claramente su proceso de solución (Pérez et al., 2019). No obstante, a través de su observación, pudieron determinar el valor de la variable al indicar que, según lo visto, *un globo rojo vale dos azules, así como una caja roja vale dos azules*. Hicieron hincapié en que el valor de la variable x era igual a 2, lo cual correspondía a la solución correcta de la ecuación.

La figura 28 muestra la solución del ejercicio 2, que proporcionaron los grupos 1 y 7, respectivamente. En dicho ejercicio se propuso a los estudiantes analizar la solución con error:

$$2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 4 - 2$$

Figura 28. *Solución del ejercicio 2 del nivel 1 de la actividad A poner en equilibrio la balanza*



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

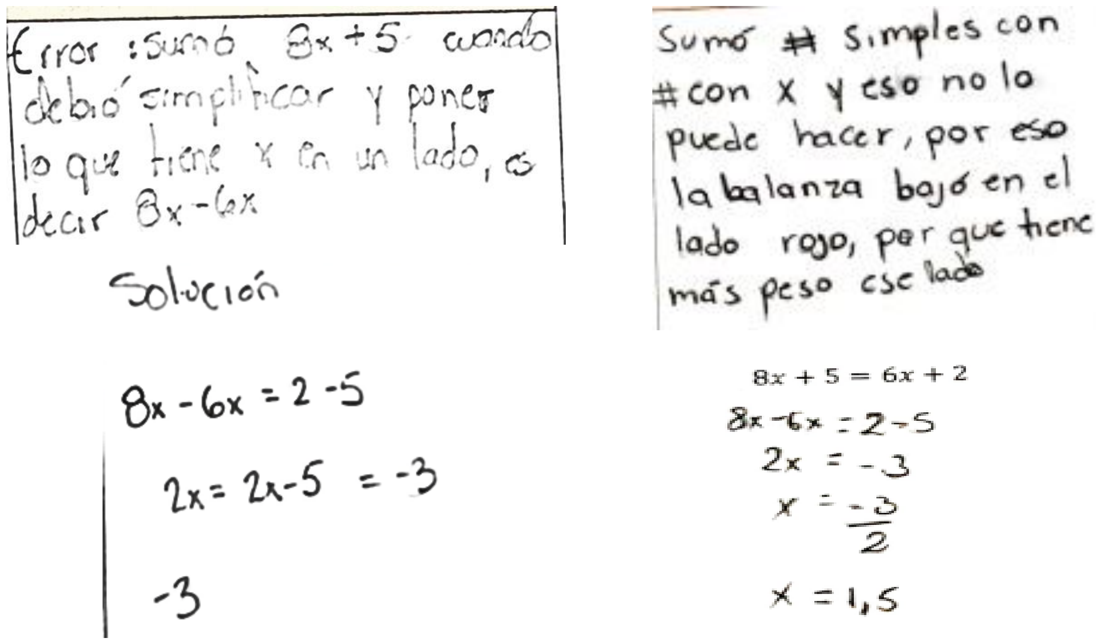
En la figura 28(a) se observa cómo los estudiantes identificaron el *error al aplicar operaciones inversas* (Hall, 2002) que se muestra en la ecuación y lo corrigieron. Sin embargo, en el último procedimiento que realizaron no se consideró el coeficiente de la variable x y se proporcionó el conjunto solución antes de finalizar el proceso. A pesar de no cometer errores adicionales, la solución proporcionada es incorrecta y a su vez, la forma de escritura del conjunto solución lo hicieron entre corchetes “[ ]”, cuando en su lugar se utilizan llaves “{ }”.

La figura 28(b) muestra cómo los estudiantes detectaron y corrigieron correctamente el error en la ecuación propuesta para lo que señalaron que *el 2 tenía que pasar al otro lado a sumar, pero pasó a restar*. A pesar de identificar el error, resolver la ecuación de manera y dar con el valor correcto, dentro de su respuesta no incluyeron el conjunto solución.

Posteriormente, en la figura 29 se muestra la solución del ejercicio 3 proporcionada por los grupos 4 y 8, respectivamente. En este caso, la solución de la ecuación con error que se les presentó a los estudiantes fue la siguiente:

$$8x + 5 = 6x + 2 \Rightarrow 13x = 8 \Rightarrow x = 8 - 13$$

Figura 29. *Solución del ejercicio 3 del nivel 1 de la actividad A poner en equilibrio la balanza*



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

En la solución mostrada se cometieron errores al *confundir entre el término con la incógnita y término independiente* y *errores en el coeficiente* (Pérez et al., 2019). Sin embargo, los estudiantes se centraron en el primer tipo de error mostrado. En la figura 29(a) los alumnos indicaron que en la solución que se les presentó se suma $8x + 5$ en el primer paso, cuando antes de realizar alguna operación debían *poner lo que tiene x de un lado*, haciendo referencia a que el orden utilizado para resolver la ecuación no era el adecuado.

Aunque en su solución lograron trasladar correctamente los términos con variables y constantes a lados opuestos y simplificaron adecuadamente, no completaron el último paso necesario: trasladar el número 2 al otro lado de la igualdad a dividir, para obtener la solución final. Y al no realizar una verificación del conjunto solución, se dio con una respuesta distinta al conjunto solución del ejercicio (Movshovitz-Hadar et al., 1987).

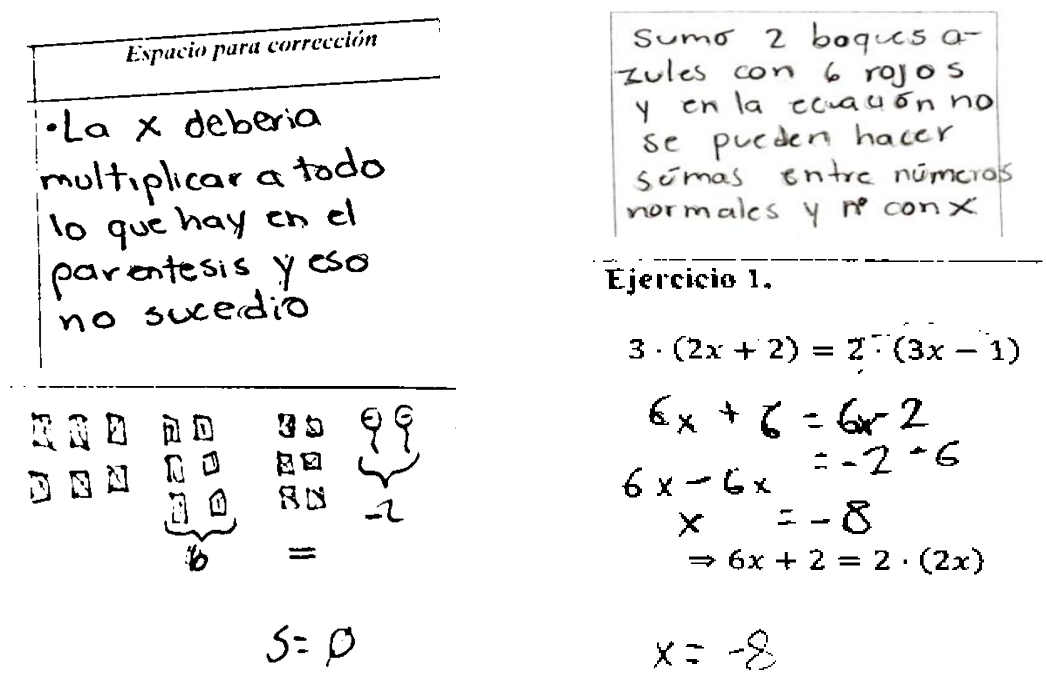
De forma similar, en la figura 29(b) los estudiantes del grupo señalaron el error de *sumar números simples con números con x*, refiriéndose a la imposibilidad de sumar o restar variables con términos independientes (Pérez et al., 2019). En su solución, aunque no presentaron formalmente el conjunto solución, mostraron la solución correcta, tanto en su forma fraccionaria como decimal.

En las primeras líneas de la solución del ejercicio que revisaron los estudiantes se buscó abordar los *errores en la propiedad distributiva* y *confundir entre el término con la incógnita y término independiente* (Pérez et al., 2019) de la siguiente manera:

$$3 \cdot (2x + 2) = 2 \cdot (3x - 1) \Rightarrow 6x + 2 = 2 \cdot (2x) \Rightarrow 8x = 4$$

A continuación, en la figura 30 se presenta las respuestas de los grupos 5 y 8, respectivamente. En la figura 30(a) los estudiantes intentaron describir el error mostrado. No obstante, aunque la explicación que proporcionaron no era del todo clara, se pretendió hacer énfasis en el *error en la propiedad distributiva* al referirse que *la x debió multiplicar a todo lo que hay en el paréntesis* (Pérez et al., 2019).

Figura 30. *Solución del ejercicio 1 del nivel 2 de la actividad A poner en equilibrio la balanza*



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

Por su parte, al dar solución al ejercicio, en lugar de presentar un procedimiento matemático formal, los estudiantes optaron por usar dibujos para representar su razonamiento. Ilustraron los elementos de una balanza, herramienta utilizada en la actividad. A través de esta representación gráfica y siguiendo las reglas del juego propuesto, su solución se puede traducir a la forma algebraica: $6x + 6 = 6x - 2$, lo que simplificaron a $6 = -2$. De aquí concluyeron que la solución del ejercicio es $\mathrm{S} = \emptyset$, lo cual es correcto. Esta técnica visual les permitió llegar a la solución adecuada del ejercicio de una manera comprensible.

Sin embargo, es preocupante que estudiantes de undécimo año no cuenten con la capacidad para desarrollar una expresión algebraica de este tipo, pues –según el MEP (2012)– las ecuaciones con una incógnita son un conocimiento previo que el estudiante debería dominar a nivel de undécimo y a su vez, se convierten en errores persistentes hasta los niveles universitarios, donde un alto porcentaje de estudiantes presenta errores en temas que se asume que dominan (Gamboa et al., 2019; Parra, 2021).

En la solución mostrada en la figura 30(b), los estudiantes hacen referencia al error de tipo E1.3 que se comete en la segunda línea de solución presentada. Indicaron que se sumó *bloques azules* con *bloques rojos*, señalando que no se podían sumar, pues representaban términos no semejantes. Ellos se centraron en proponer una solución algebraica, desarrollándola correctamente hasta que, en el último paso, cometieron un error. Para la expresión $6x - 6x$ obtuvieron incorrectamente el resultado x, cuando debería haber sido 0.

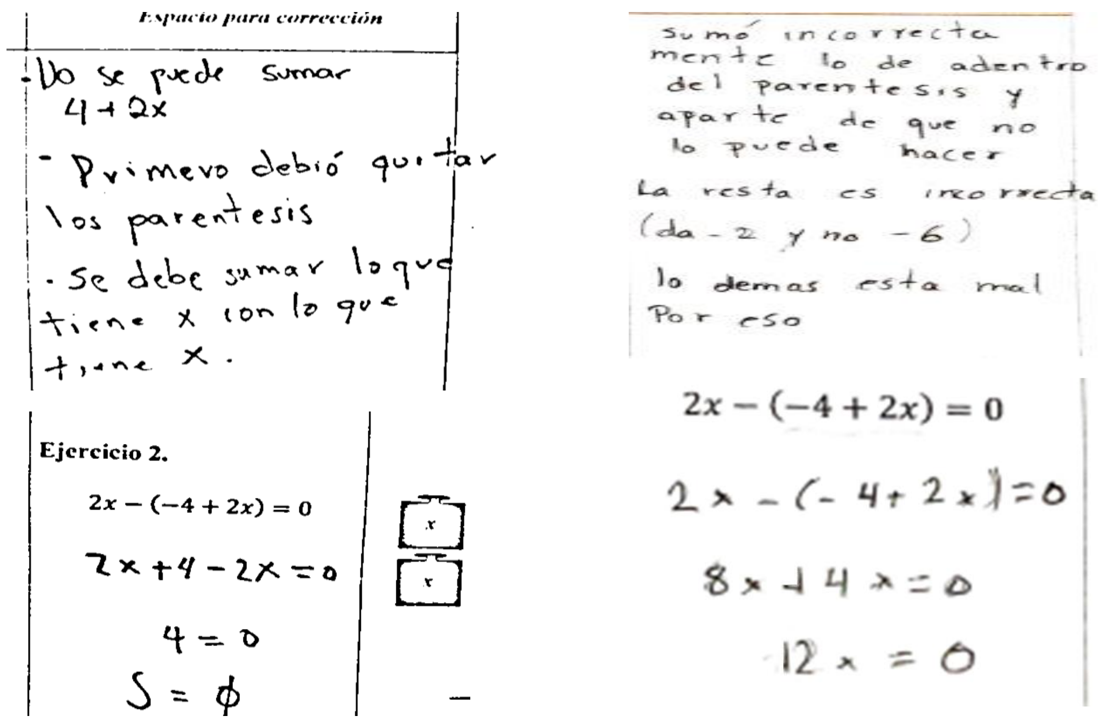
A pesar de realizar la mayoría de los procedimientos correctamente, este error se debió a que en ocasiones incurrieron en *inferencias no válidas lógicamente*, donde se realizan deducciones inválidas desde el punto de vista matemático (Movshovitz-Hadar et al., 1987). Esto puede deberse a que –a veces– las variables se suelen considerar como etiquetas y no se toma en cuenta la relación que hay entre ellas y las constantes que las acompañan (Rosas, 2013).

Seguidamente, para el ejercicio 2, se muestra la solución que brindaron los grupos 4 y 9, respectivamente. En ella se consideró abordar *errores al efectuar operaciones básicas con números enteros* y el error de *confundir entre el término con la incógnita y término independiente* (Pérez et al., 2019) de la siguiente manera:

$$2x - (-4 + 2x) = 0 \Rightarrow 2x - (-6) = 0$$

En la figura 31(a) los estudiantes mencionaron que el error cometido se relacionaba con el *orden en que se realizan las operaciones* (Hall, 2002), pues señalaron que para resolver correctamente el ejercicio el primer paso debía ser eliminar los paréntesis de la ecuación y luego simplificar los términos semejantes. Además, detallaron que se debía sumar únicamente *lo que tiene x con lo que tiene x*, destacando que en la solución presentada se cometía también el error al confundir la incógnita y el término independiente (Pérez et al., 2019).

Figura 31. *Solución del ejercicio 2 del nivel 2 de la actividad A poner en equilibrio la balanza*



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 31(b) los estudiantes identificaron ambos errores en esa línea de solución y argumentaron que en ella se sumó incorrectamente los términos dentro del paréntesis y no se podía hacer la suma, porque los términos no eran semejantes. Aunado a esto, mencionaron que, al realizar la suma "$-4 + 2x$", se obtenía como resultado –6, en lugar de -2, haciendo alusión a un *error al realizar operaciones con números enteros* (Pérez et al., 2019).

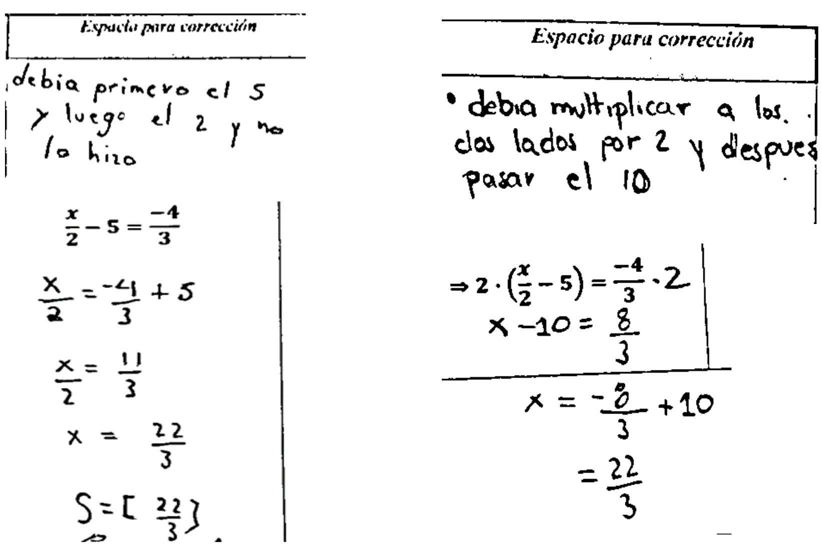
Por su parte, al hacer la solución del ejercicio, cometieron diversos errores. Al intentar eliminar los paréntesis de la ecuación, obtuvieron como resultado $8x + 4x$, como si la expresión a simplificar hubiera sido $2x \cdot (- -4 + 2x)$. Estos errores pueden deberse a dificultades que no se resolvieron en el aprendizaje de la aritmética y repercuten posteriormente en el conocimiento algebraico (Rodríguez, 2015).

En el nivel 3 de la actividad, hubo una participación limitada de los grupos, especialmente al enfrentarse a ejercicios con fracciones y raíces. Algunos estudiantes expresaron su desconocimiento sobre cómo abordar este tipo de ecuaciones y no proporcionaron respuestas. También, debido a las restricciones de tiempo de la actividad, se tuvo que avanzar al siguiente segmento. Las próximas figuras muestran las respuestas recopiladas del ejercicio 1 y 2 de este nivel que fueron brindadas por los grupos 1 y 7.

En el primer ejercicio, la solución que se les propuso a los alumnos para revisión presenta un *error en el método de balanza* (Pérez et al., 2019), el cual se ilustra a continuación.

$$\frac{x}{2} - 5 = \frac{-4}{3} \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{x}{2} - 5\right) = \frac{-4}{3} \Rightarrow x - 10 = \frac{-4}{3}$$

Figura 32. *Solución del ejercicio 1 del nivel 3 de la actividad A poner en equilibrio la balanza*



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 32(a) los estudiantes señalaron que el error en la solución se asociaba con la jerarquía de operaciones que se debían realizar (Pérez et al., 2019). Para esto propusieron una secuencia distinta en la solución: primero transponer los términos constantes al lado derecho para simplificarlos y luego el denominador de la variable como una multiplicación. Siguiendo estos pasos, lograron dar correctamente con el conjunto solución de la ecuación. No obstante, este lo brindaron entre corchetes "[ ]", cuando en su lugar se utilizan llaves "{}". Esto se puede relacionar con dificultades que presentan los estudiantes con respecto a características propias del simbolismo que establecen cierto uso para cada uno de los símbolos utilizados (Rodríguez, 2015).

En la figura 32(b) los estudiantes reconocieron el error en el *método de la balanza*, destacando que el fallo fue multiplicar por 2 en un solo lado de la igualdad y no a ambos (Pérez et al., 2019). Al corregir este error y aplicar un método distinto al del grupo 1, también pudieron dar con la solución correcta de la ecuación. A pesar de esto, no brindaron el conjunto solución ni realizaron ninguna verificación de la solución encontrada.

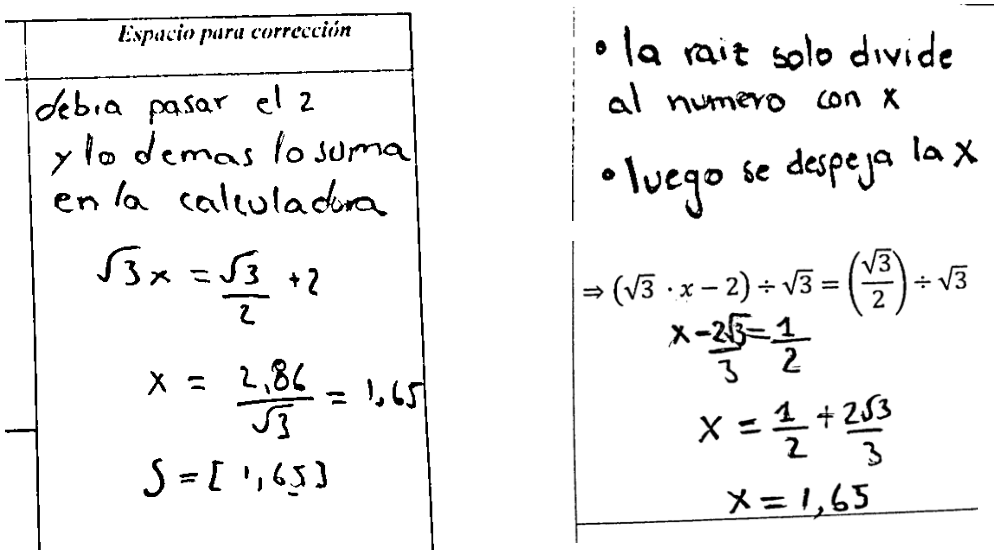
Situación similar se presentó en el último ejercicio de la actividad, ya que los mismos grupos dieron un camino de solución distinto y realizaron otros procedimientos. Pero el resultado obtenido al final del proceso sí correspondía a la solución correcta del ejercicio.

Estaba diseñado para que los estudiantes reconocieran un error *en la propiedad distributiva*. El error específico por identificar involucraba dividir un paréntesis entre un mismo elemento o –alternativamente– multiplicarlo por el inverso de ese elemento (Pérez et al., 2019). El ejercicio se detalla a continuación:

$$\sqrt{3}\ \cdot x - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\sqrt{3}\ \cdot x - 2\right) \div \sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \sqrt{3} \Rightarrow x - 2 = \frac{1}{2}$$

En la figura 33(a) los estudiantes mencionaron que el error correspondía a incoherencias en el orden de las operaciones a seguir para dar con la solución del ejercicio (Hall, 2002). Por lo tanto, indicaron que *primero debió pasar a sumar el 2 y el resto se puede sumar en la calculadora*, haciendo alusión al proceso a seguir para dar con la solución. Para realizar la suma que incluía números con radicales utilizaron una calculadora científica, presentando los resultados en una aproximación decimal.

Figura 33. *Solución del ejercicio 2 del nivel 3 de la actividad A poner en equilibrio la balanza*



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

En contraste, en la figura 33(b) señalaron que el error cometido fue que *se tenían que dividir los dos números con la raíz,* aludiendo a un *error de distributividad incompleta* (Pérez et al., 2019). Corrigieron este error en su solución y luego transpusieron el término constante al lado opuesto, despejando la variable sin cometer ninguna inconsistencia. Finalmente, usaron la calculadora para simplificar la expresión y brindar una aproximación decimal de la solución.

Aunque en algunos de los ejercicios mostraron capacidad para identificar errores y aplicar correcciones, a menudo las soluciones presentaban alguna falla en el razonamiento seguido por el estudiante (Movshovitz-Hadar et al., 1987), en muchas ocasiones relacionadas con el uso de simbolismo algebraico, como el significado del signo igual (=) en una ecuación (Rodríguez, 2015; Rosas, 2013).

También, es posible resaltar dificultades persistentes en la manipulación de fracciones y radicales, donde hubo una menor presencia de respuesta. Es preocupante que en este nivel educativo los estudiantes se enfrenten a dificultades con conceptos que se esperaría dominaran. Según el MEP (2012), estos temas son abordados a nivel de octavo año de secundaria y en undécimo se consideraba conocimientos previos que son aplicados en diversos temas y que, en ocasiones, repercuten en cursos de matemáticas a nivel de educación superior (Gamboa et al., 2019; Parra, 2021).

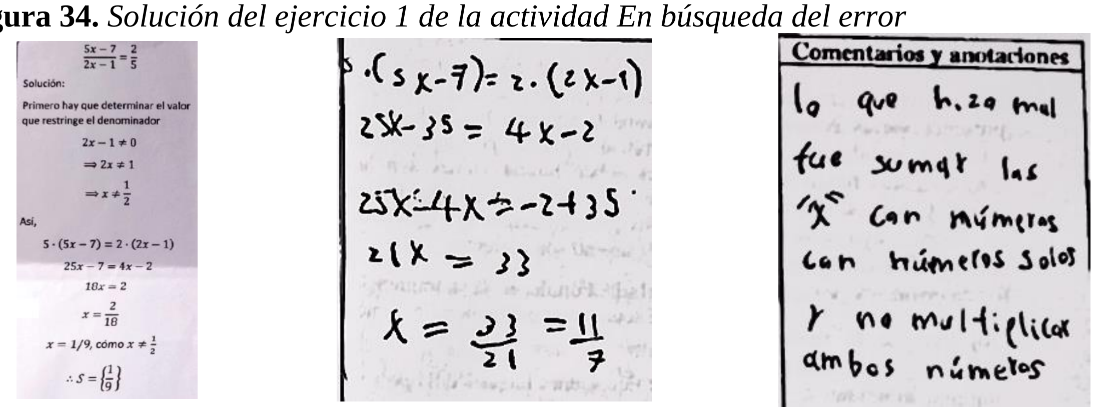
4.3.2 Actividad 2

La actividad 2, titulada *En búsqueda del error*, formó parte de la propuesta de enseñanza (ver anexo 13). En esta, el docente investigador distribuyó fichas por el aula, cada una con ecuaciones y sus respectivas soluciones. Algunas de las cuales contenían errores. Siguiendo las indicaciones de Torre (2004), la tarea de los estudiantes consistió en identificar las ecuaciones cuyas soluciones eran incorrectas y corregir o mejorar la solución propuesta mediante el trabajo grupal y el uso de herramientas como la calculadora científica. Con esta herramienta, probaron las soluciones de las fichas hasta detectar las ecuaciones cuyos conjunto solución no correspondían a la ecuación dada. Tras localizar estas ecuaciones, procedieron a resolverlas y analizar los errores encontrados.

En total, se formaron nueve grupos distribuidos de igual manera que la actividad 1. Tres de ellos únicamente identificaron las soluciones incorrectas. Sin embargo, no ofrecieron correcciones ni aportes adicionales sobre los errores observados. Otros dos grupos dieron la respuesta correcta de los ejercicios, pero tampoco aportaron un análisis complementario sobre los errores presentados. Entre las respuestas brindadas para cada uno de los ejercicios de la actividad se destacan las siguientes.

En la figura 34 se presenta la solución incorrecta del ejercicio propuesto a los estudiantes en la actividad 2.

Figura 34. *Solución del ejercicio 1 de la actividad En búsqueda del error*



(a) (b) (c)

Fuente: Elaboración propia.

La figura 34(a) muestra el ejercicio que se les planteó, en el cual se cometieron *errores en la propiedad distributiva* y *confundir entre el término con la incógnita y término independiente* (Pérez et al., 2019).

La figura 34(b) muestra el camino de solución proporcionada por el grupo 6. En esta solución aplicaron de manera correcta la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis. Posteriormente, decidieron agrupar las variables en un lado de la igualdad y las constantes en el otro, simplificando correctamente los términos semejantes y aplicando las operaciones inversas al transponer el coeficiente que multiplicaba la variable como una división, finalizando con la simplificación de la fracción resultante.

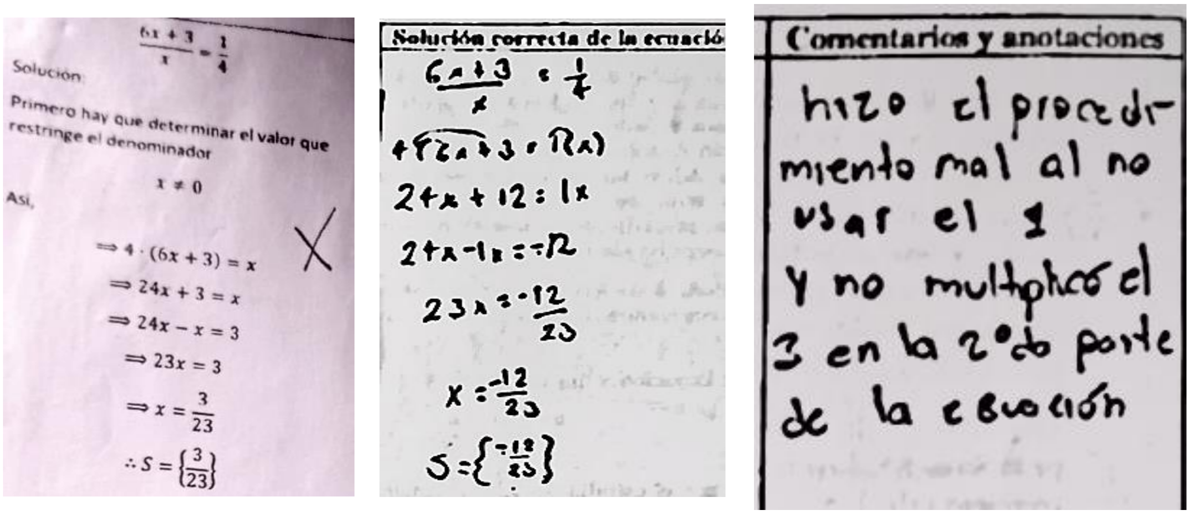
En la figura 34(c) se enfocaron inicialmente en el error de *confundir entre el término con la incógnita y término*, indicando lo siguiente: *lo que hizo mal fue sumar las x con números solos.* Además, señalaron el error *en la propiedad distributiva*, exteriorizando que *no multiplicó ambos números* (Pérez et al., 2019).

También, un detalle destacable de las soluciones expuestas es que, al finalizar el proceso de resolución de la ecuación, no se brindó el conjunto solución de esta. Además, se omitió realizar un análisis de la restricción con que cuenta el ejercicio en el denominador de la fracción, que podría hacer la diferencia entre la cantidad de soluciones que posea la ecuación (Movshovitz-Hadar et al.,1987).

De forma similar, en el segundo ejercicio de la actividad se abordaron *errores en la propiedad distributiva*, *confundir entre el término con la incógnita y término independiente* y *aplicación de las operaciones inversas en forma incorrecta* (Hall, 2002; Pérez et al., 2019). En la figura 35 (a) se muestra el segundo ejercicio dado a los estudiantes con sus respectivos errores propuestos. La figura 35(b) presenta la solución y la figura 35(c) los comentarios proporcionados por el grupo 2 acerca de los errores que identificaron.

En la solución expuesta en la figura 35(b) los estudiantes siguieron de manera precisa los pasos para resolver la ecuación. Realizaron la correcta aplicación de la propiedad distributiva, señalando con distintas marcas cuáles eran los elementos que debían multiplicarse en este proceso. Luego, decidieron agrupar los términos con variables y los términos constantes en lados opuestos de la igualdad para simplificarlos. Finalmente, transpusieron el coeficiente que acompañaba a la variable en forma de división al otro lado de la igualdad.

Figura 35. *Solución del ejercicio 2 de la actividad En búsqueda del error*



(a) (b) (c)

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 35(c) indicaron cuáles fueron los aspectos que consideraron incorrectos en la solución mostrada. Señalaron que el procedimiento estaba mal hecho debido a la falta de utilización del número 1. No obstante, es trivial la justificación brindada porque, si la variable no tiene un coeficiente numérico explícito, se asume que su coeficiente es igual a 1. Se menciona que no se multiplicó el 3 en la segunda parte de la ecuación, haciendo referencia a la aplicación incorrecta de la *propiedad distributiva* (Pérez et al., 2019), lo cual sí era un error que se esperaba que ellos detectaran.

En ese sentido se destaca que, mediante la actividad *En búsqueda del error*, los estudiantes no solo identificaron las ecuaciones con errores en la solución de ecuaciones, sino que también mostraron indicios de comprensión del concepto matemático durante la propuesta, resultado que va de la mano con lo establecido en la teoría del error de Torre (2004) en este tipo de ejercicios.

En fin, esta actividad centrada en la identificación y corrección de errores en ecuaciones lineales por parte de los estudiantes evidenció un desarrollo mixto en la comprensión y aplicación de conceptos algebraicos reflejado a través de las respuestas analizadas. Este resultado subraya la importancia de profundizar en la enseñanza de procedimientos algebraicos y la formalidad en la escritura matemática, tal como sugieren Hall (2002) y Pérez et al. (2019).

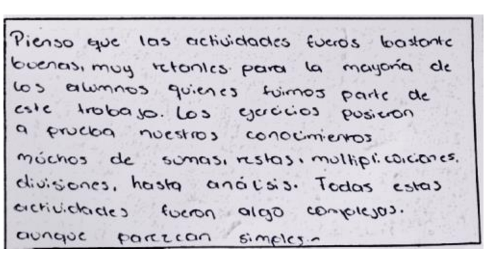
La actividad destacó la capacidad de los estudiantes para identificar errores comunes, alineándose con las categorías de errores descritas por Movshovitz-Hadar et al. (1987), Hall (2002) y Pérez et al. (2019). Sin embargo, se considera necesario la adaptación de estrategias pedagógicas dirigidas a fortalecer la comprensión y aplicación de conceptos algebraicos fundamentales. Esta propuesta de enseñanza, basada en la pedagogía del error, busca no solo abordar estas dificultades, sino también fomentar un aprendizaje significativo, aprovechando los errores como oportunidades de aprendizaje, en consonancia con las teorías de Torre (2004) y los enfoques constructivistas que promueven la reflexión y el razonamiento crítico en el aula.

4.3.3 Actividad 3

La tercera y última actividad de la propuesta titulada *¿De los errores se aprende?* brindó a los estudiantes un espacio para reflexionar y expresar su opinión de manera escrita acerca de lo aprendido en las actividades llevadas a cabo. En ese sentido, tuvo como objetivo principal fomentar la autorreflexión y la conciencia de los propios errores, y cómo estos pueden contribuir al proceso de aprendizaje una vez alineados a la pedagogía del error propuesta por Torre (2004).

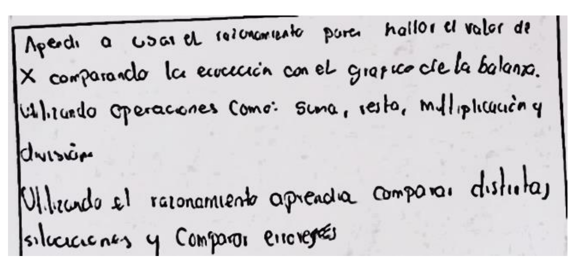
Dicha actividad se realizó de forma individual y a través de ella se obtuvieron distintas opiniones, en las que los estudiantes expresaron sus percepciones sobre lo desarrollado y aprender a partir de sus propios errores en el ámbito de las matemáticas.

Figura 36. *Opiniones de los estudiantes en relación con las actividades que se desarrollaron*



Pienso que las actividades fueros bastante buenas, muy retonles para la mayoría de los alumnos quienes fuimos parte de este trabajo. Los ejercicios pusieron a prueba nuestros conocimientos múchos de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, hasta análisis. Todas estas actividades fueron algo complejos, aunque parezcan simples.

(a)



Aprendi a usar el razonamiento para hallar el valor de X comparando la ecuación con el grafico de la balanza. Utilizando operaciones como: suma, resta, multiplicación y división
Utilizando el razonamiento aprendia comparar distintas situaciones y comparar errores

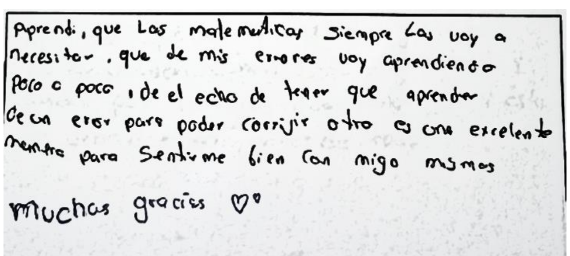
(b)

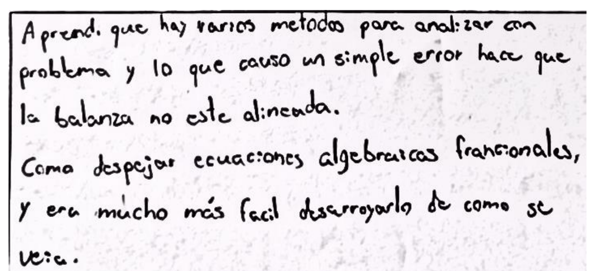
Fuente: Elaboración propia.

En la figura 36(a) el estudiante mencionó que las actividades de la propuesta fueron *bastante buenas, muy retantes para todos los alumnos*, haciendo referencia a que estas pusieron a prueba los conocimientos matemáticos y de análisis que ellos poseen, ya que, aunque en un inicio pareció sencillo desarrollar la actividad, al momento de realizarlo resultó complejo.

Además, en la figura 36(b) el estudiante expresó que mediante las actividades aprendió a *usar el razonamiento para hallar el valor de x*, apoyándose en la comparación de la ecuación y su representación visual con la balanza matemática que se les brindó. También se mencionó que, gracias a la comparación de soluciones correctas con erróneas, se mejoró el entendimiento del objeto de estudio. Por lo que se puede considerar el uso de los errores como un vital para potenciar el desarrollo del conocimiento algebraico (Socas, 2011).

Figura 37. *Opiniones de los estudiantes con respecto al aporte de los errores en el aprendizaje*





(a) (b)

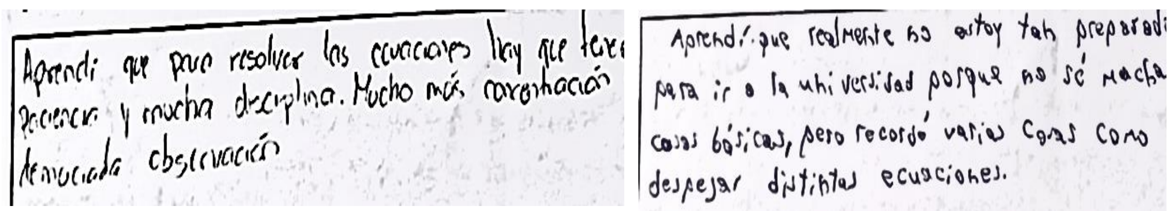
Fuente: Elaboración propia.

En la figura 37(a) el estudiante reflexionó sobre la relevancia constante de las matemáticas en su vida. Reconoció que los errores son valiosas oportunidades de aprendizaje y que la corrección de errores contribuye al crecimiento personal. Además, mostró una actitud positiva al sentirse satisfecho consigo mismo al aprender de los errores y mejorar. Debido a eso, el docente debe interesarse por estos, ya que los errores pueden ser indicadores del progreso y comprensión conceptual de los estudiantes (Astolfi, 1999).

En la figura 37(b) otro estudiante expresó la idea de que existen múltiples enfoques para abordar un problema y que identificar la causa de un simple error puede marcar la diferencia en el proceso de resolución de un ejercicio, como se ilustró en la actividad de la balanza. El comentario anterior resalta la importancia de comprender las causas subyacentes de los errores para saber incluirlos dentro de los procesos de aprendizaje y para ellos, se debe tener en cuenta las fases de tratamiento de los errores (detección, identificación, rectificación) propuestas por Torre (2004).

Siguiendo esta línea, se examinan las opiniones de otros participantes, donde expresaron sus reflexiones acerca del proceso de resolución de ecuaciones lineales.

Figura 38. *Opiniones de los estudiantes sobre el proceso de resolver ecuaciones*



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 38(a) se destaca la relevancia de la paciencia, la disciplina, la concentración y la observación, necesarias para abordar el tipo de ejercicios desarrollados en las actividades. De forma similar, en la figura 38(b) se reconoce que existen dificultades en conceptos básicos que son importantes para el nivel educativo universitario, lo que concuerda con lo expuesto en Gamboa et al. (2019) y Parra (2021). A pesar de estas posibles lagunas en el conocimiento, el estudiante manifestó que ha recordado cómo despejar ecuaciones, lo que se puede considerar un progreso en su aprendizaje.

Estas reflexiones resaltan lo importante que es la perseverancia para el entendimiento de las ecuaciones lineales, ya que suelen ser contenidos que se asumen como que el estudiante los comprende a nivel de undécimo (MEP, 2012). Sin embargo, en muchas ocasiones, si estas dificultades no son tratadas, existe una persistencia de estos fallos que –con el pasar del tiempo– repercuten hasta los niveles universitarios (Parra, 2021).

Finalmente, es posible decir que con la actividad se logró brindar a los estudiantes un espacio valioso para reflexionar sobre su proceso de aprendizaje a partir de sus opiniones y conclusiones. Además, se destaca la importancia de ciertas actitudes que pueden favorecer los procesos de aprendizaje. También, resultó ser un ejercicio esclarecedor y reflexivo, que proporcionó a los estudiantes una oportunidad única para contemplar la naturaleza y el impacto de los errores en su aprendizaje matemático (Torre, 2004).

4.4 Resultados y análisis del cuestionario post-test

A continuación, se presentan los resultados y el análisis de la información recopilada a través de las pruebas post-test. Al igual que en la etapa anterior, para llevar a cabo este análisis del post-test se realizó una revisión exhaustiva de las pruebas hechas por los participantes. En este proceso, se registraron y evaluaron minuciosamente los tipos de errores cometidos en cada ejercicio y se mantuvieron las mismas subcategorías de análisis establecidas. Este análisis permitió evaluar si posterior a las actividades implementadas existe una mejoría de las habilidades matemáticas de los participantes en la resolución de ecuaciones lineales y la detección y corrección de errores.

En este apartado se muestra un conteo de los errores según las subcategorías de análisis y el ejercicio en que se cometió el error y además, se contabilizó cuando un ejercicio presentaba o no conjunto solución (Sol). Asimismo, se destaca una serie de imágenes con algunas muestras de las soluciones brindadas por los estudiantes en esta prueba. Para cada uno de los ejercicios se presenta una solución correcta y una errónea, con el fin de mostrar la mejoría que lograron los estudiantes y las dificultades que aún presentan en este tema.

Tabla 8. *Tipo de error manifestado por el grupo de estudiantes en cada una de las preguntas del post-test según subcategorías de análisis*

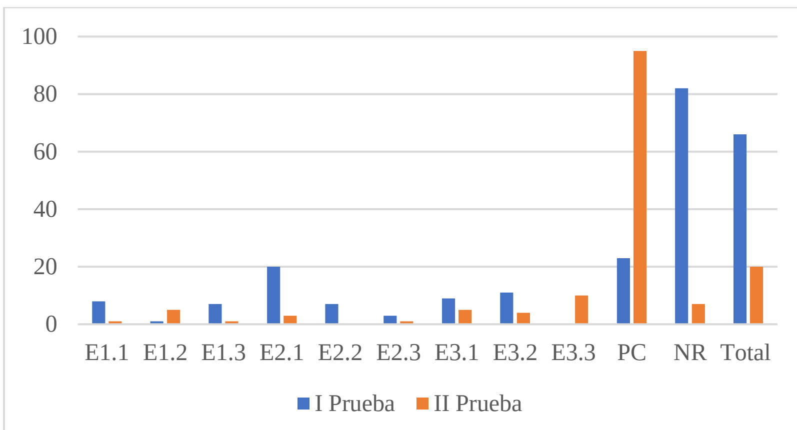
	E1.1	E1.2	E1.3	E2.1	E2.2	E2.3	E3.1	E3.2	E3.3	Sol	PC	NR	Total
Ejercicio_a	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12	11	0	1
Ejercicio_b	0	0	0	0	0	0	3	3	0	9	12	0	6
Ejercicio_c	0	5	0	0	0	0	0	0	0	5	11	2	5
Ejercicio_d	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	13	0	1
Ejercicio_e	0	0	0	1	0	0	2	0	0	10	11	0	3
Ejercicio_f	0	0	1	1	0	0	0	1	0	11	8	0	3
Ejercicio_g	0	0	0	1	0	0	0	0	0	11	9	1	1
Ejercicio_h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	9	2	0
Ejercicio_i	0	0	0	0	0	0	0	0	10	1	11	2	0
Total	1	5	1	3	0	1	5	4	10	80	95	7	20

Fuente: Elaboración propia.

A partir de los resultados de las tablas 7 y 8, se logró comparar los errores obtenidos en los cuestionarios pre-test y post-test según cada una de las subcategorías de errores establecidas.

En la figura 39 se aprecia que la cantidad de errores detectados disminuyó de manera notable en la mayoría de las subcategorías evaluadas. Solamente aumentó en las subcategorías *E1.2 errores al efectuar operaciones básicas con números racionales* detectados en el ejercicio_c y *E3.3. falta de verificación en la solución* en el ejercicio_i, que en el cuestionario pre-test fue mayor la cantidad de preguntas sin respuesta que se contabilizaron.

Figura 39. *Gráfico de barras: Comparación de los resultados del cuestionarios pre-test y post-test según las subcategorías de errores*



Fuente: Elaboración propia.

También, es notable el aumento de la cantidad de soluciones correctas del primer cuestionario al segundo. Además, se logró obtener soluciones con todos los procedimientos correctos (PC) en todas las ecuaciones propuestas y el número de ecuaciones sin resolver (NR) disminuyó considerablemente.

A continuación, se presenta una serie de imágenes que muestran algunas soluciones de los estudiantes en las ecuaciones del cuestionario.

En la figura 40 se muestran las soluciones aportadas por los estudiantes 1 y 13, respectivamente. En la figura 40(a) se observa que el estudiante brindó la solución correcta del ejercicio. No obstante, cometió un *error técnico* al omitir el signo negativo antes del número 24 en el primer paso (Movshovitz-Hadar et al., 1987).

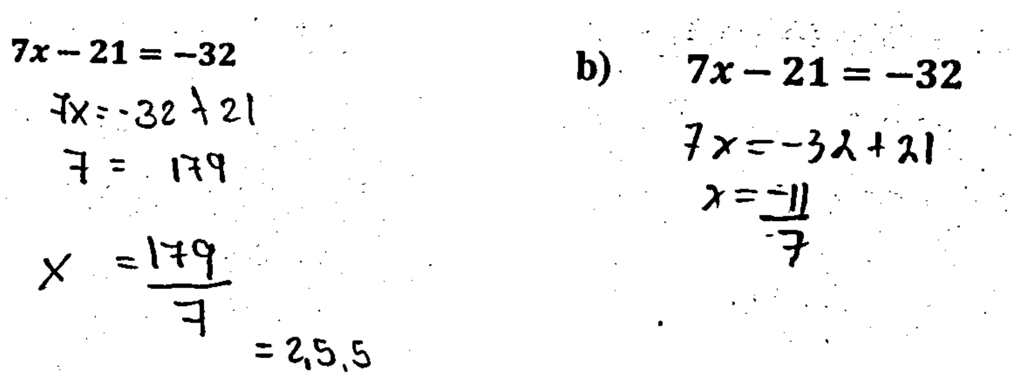
Figura 40. *Solución del ejercicio_a del cuestionario post-test*

(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

En cambio, en la figura 40(b) el alumno cometió un error de tipo *E2.3 error en el coeficiente*. Este error se manifiesta cuando se interpreta erróneamente que la operación entre el coeficiente y la variable es una suma, y al trasladar el término al lado opuesto de la igualdad, cambia el signo del número de negativo a positivo de forma incorrecta (Pérez et al., 2019). Posteriormente, se presentan las soluciones aportadas por los estudiantes 5 y 17 en el siguiente ejercicio de la prueba.

Figura 41. *Solución del ejercicio_b del cuestionario post-test*



(a) (b)

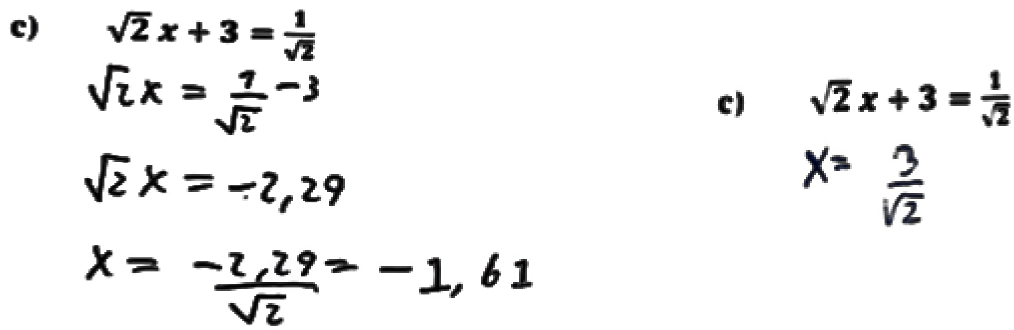
Fuente: Elaboración propia.

La figura 41(a) evidencia cómo el estudiante escribió correctamente el primer paso de la solución del ejercicio al transponer el término -21 del lado izquierdo al derecho de la ecuación, considerando el cambio de signo. Sin embargo, al momento de ejecutar la operación, la interpretó como multiplicación, en lugar de realizar una suma, por lo que cometió un error en la operación inversa que realizó (Hall, 2002). Estos errores podrían deberse a un descuido por parte del estudiante o a una pérdida de significado de las variables que satisfacen una ecuación algebraica (Rosas, 2013), aunado a una falta de verificación de la solución encontrada en la ecuación inicial (Movshovitz-Hadar et al., 1987).

La figura 41(b) muestra una solución clara y correcta del ejercicio. En esta, el estudiante primero transpuso el término constante del lado izquierdo al lado derecho de la igualdad, cambiando el signo adecuadamente. Luego simplificó el resultado y, finalmente, transpuso el coeficiente de la variable al lado opuesto como una división y obtuvo la solución correcta del ejercicio.

Para el análisis del siguiente ejercicio se examinaron las respuestas proporcionadas por los estudiantes 6 y 14, respectivamente en la figura 42.

Figura 42. *Solución del ejercicio_c del cuestionario post-test*



(a) (b)

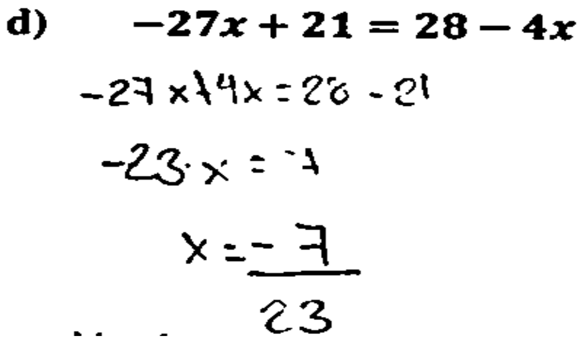
Fuente: Elaboración propia.

En la figura 42(a) el estudiante realizó correctamente todos los pasos que conducían a la solución correcta. Primero transpuso todos los términos constantes al lado derecho de la ecuación para simplificarlos. Hecho que resulta particular, ya que al simplificar mostró su respuesta en forma decimal de forma inmediata, lo que supone que el resultado lo obtuvo con la calculadora y podía desconocer cómo manipular fracciones con radicales. Por último, transpuso el coeficiente de variable al lado opuesto de la igualdad como una división, que también brindó su aproximación en forma decimal.

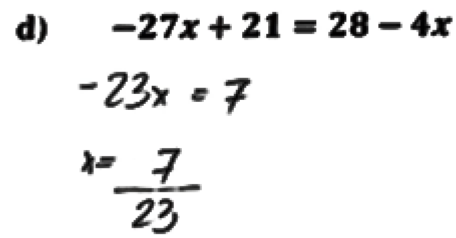
Por su parte, en la figura 42(b) se asume que el estudiante omitió el lado derecho de la igualdad y la ecuación que buscaba solucionar era $\sqrt{2}x = 3$, donde para solucionar únicamente transpuso el término $\sqrt{2}$ en forma de división y su resultado fue $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Estos errores se deben a las características propias del simbolismo algebraico, como uso del signo igual (=) como una relación de equivalencia entre ambos lados de la igualdad (Rodríguez, 2015; Rosas, 2013).

La figura 43 describe la solución mostrada por los estudiantes 5 y 11, respectivamente, en el ejercicio_d.

Figura 43. *Solución del ejercicio_d del cuestionario post-test*



(a)



(b)

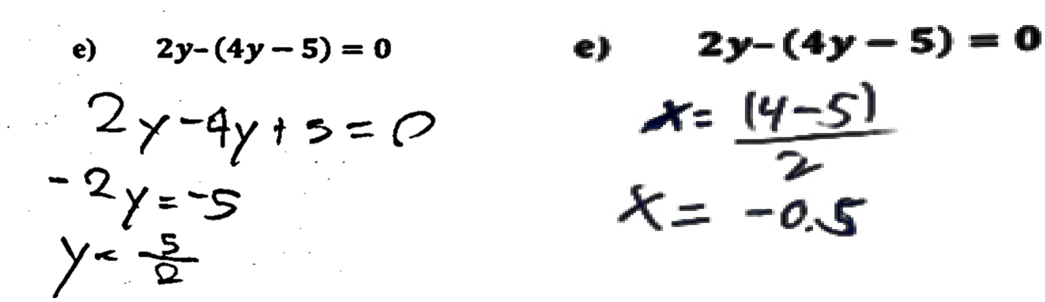
Fuente: Elaboración propia.

En la figura 43(a) el estudiante presentó la solución del ejercicio de manera clara y estructurada. Comenzó por transponer los términos con variables al lado izquierdo de la ecuación, mientras que los términos constantes los situó en el lado derecho. Tras simplificar ambos lados de la ecuación, procedió a transponer el coeficiente de la variable, colocándolo como denominador del término constante en el lado derecho del igual.

En contraste, la solución en la figura 43(b), aunque parcialmente correcta, presentó fallos. Inicialmente, el estudiante omitió pasos importantes de la solución del ejercicio. Además, en el último paso de la solución, al transponer como división el coeficiente de la variable al lado opuesto de la igualdad, también cambió el signo de este, aplicando dos operaciones inversas en un mismo procedimiento, que se puede nombrar como *errores de procedimiento* propios de las ecuaciones (Pérez et al., 2019).

En la siguiente figura se representan las soluciones aportadas por los estudiantes 2 y 14, respectivamente, en el ejercicio_e del cuestionario post-test.

Figura 44. *Solución del ejercicio_e del cuestionario post-test*



(a) (b)

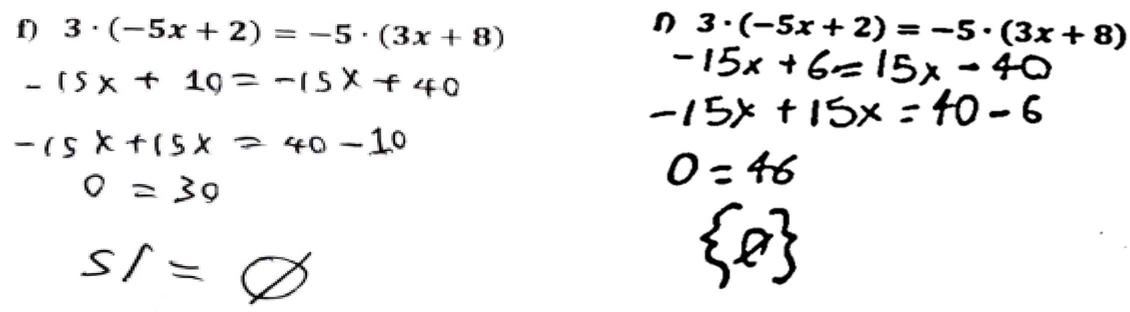
Fuente: Elaboración propia.

La figura 44(a) muestra un detallado procedimiento para resolver el ejercicio. Aquí, el estudiante inició eliminando los paréntesis usando la distributividad del signo negativo. Luego, siguió simplificando términos semejantes y, finalmente, trasladó el término constante al lado derecho y el coeficiente de la variable como división, aplicando correctamente la ley de signos.

En contraste, la figura 44(b) revela varios errores en el proceso. El alumno comenzó cambiando la variable de y a x, lo que se puede considerar como un *error técnico* (Movshovitz-Hadar et al., 1987). Después, movió el paréntesis al otro lado, lo que conllevó al estudiante a cometer el error de sumar el término con incógnita con uno que no lo tenía (Pérez et al., 2019). A pesar de aplicar correctamente operaciones inversas al mover elementos de un lado al otro de la igualdad, el resultado obtenido no coincide con la solución correcta de la ecuación.

Para la solución del ejercicio_f se seleccionó las respuestas aportadas por los estudiantes 6 y 18, ilustradas en la siguiente figura. En la figura 45(a) el estudiante cometió un *error al aplicar la propiedad distributiva* en el lado izquierdo de la expresión (Pérez et al., 2019). Al trabajar con $3 \cdot (-5x + 2)$, obtuvo incorrectamente $-15x + 10$, donde el segundo término era incorrecto, posiblemente debido a un descuido. Sin embargo, en el lado derecho de la expresión aplicó la propiedad correctamente. A pesar de este error inicial, los pasos subsiguientes condujeron a una solución que coincide con la correcta del ejercicio.

Figura 45. *Solución del ejercicio_f del cuestionario post-test*



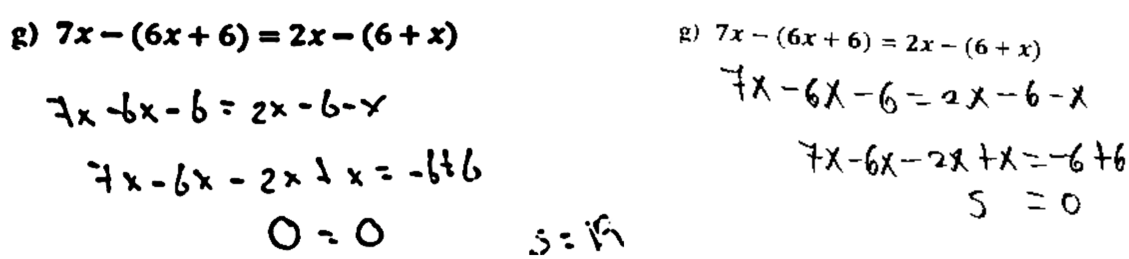
(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 45(b) los pasos para alcanzar la solución del ejercicio están correctamente mostrados. El estudiante comenzó aplicando la propiedad distributiva en ambos lados, luego transpuso las variables al lado izquierdo y las constantes al derecho. Tras simplificar ambas expresiones, concluyó que la solución del ejercicio era el conjunto vacío.

Bajo la misma línea de análisis, se presenta la siguiente figura, donde se muestra la solución del ejercicio_g realizada por los estudiantes 5 y 13, respectivamente.

Figura 46. *Solución del ejercicio_g del cuestionario post-test*



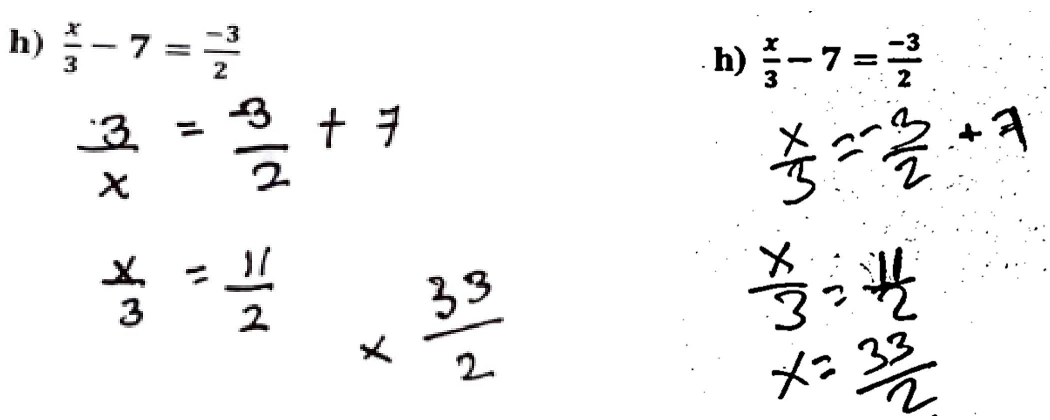
(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

En las dos soluciones que se presentan en la figura anterior, los estudiantes adoptaron una estrategia similar para determinar el conjunto solución de la ecuación. Ambos empezaron aplicando la propiedad distributiva al signo negativo que precedía a los paréntesis. Seguidamente, trasladaron las variables al lado izquierdo y las constantes al lado derecho de la igualdad. En la figura 46 (a) el estudiante realizó correctamente la simplificación en ambos lados y llegó a la solución adecuada del ejercicio. Por otro lado, en la figura 46(b), aunque no se muestra la simplificación de los términos, el estudiante ofreció directamente una solución. Si bien el valor proporcionado satisfacía la igualdad, no incluía todos los elementos necesarios para completar el conjunto solución. Realizó *inferencias no válidas lógicamente*, errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento del estudiante y, en este caso, sin tener un resultado claro, únicamente brindó el conjunto solución del ejercicio (Movshovitz-Hadar et al., 1987).

En el penúltimo ejercicio de la prueba se consideró la respuesta brindada por los estudiantes 1 y 10, en las figuras 47(a) y 47(b), respectivamente.

Figura 47. *Solución del ejercicio_h del cuestionario post-test*



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

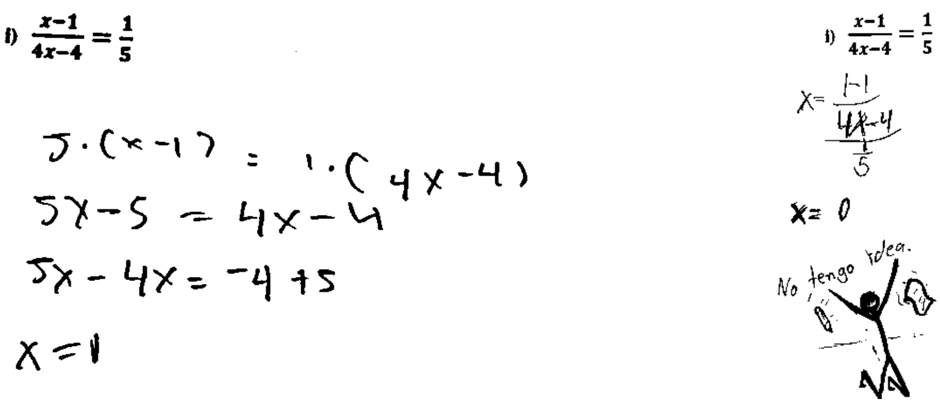
En la figura anterior las imágenes evidencian que ambos estudiantes siguieron la misma secuencia para resolver la ecuación. Iniciaron trasladando el término constante al lado derecho y luego simplificaron la expresión. El siguiente paso consistió en transponer el denominador que acompañaba la variable al otro lado de la igualdad, tratándolo como multiplicación.

No obstante, en la figura 47(a) se observan algunos errores en la transcripción del ejercicio (Movshovitz-Hadar et al., 1987). El estudiante confundió el numerador con el denominador de la fracción al escribir en una nueva línea y en la última línea de la solución, omitió el signo de igual, a pesar de anotar el valor correcto. Estos detalles en la escritura de una solución son importantes y marcan la diferencia en la claridad y exactitud del proceso, pues se pierde el significado del signo igual (=), que es parte fundamental de una ecuación (Hall, 2002).

En la figura 47(b), en el primer paso de la solución, el estudiante transpuso el término -7 al lado derecho de la ecuación y simplificó los términos constantes. Posteriormente, transpuso el denominador de la fracción que acompañaba la variable en forma de multiplicación, determinando así el valor de la solución de la ecuación.

La figura 48 ilustra las soluciones del último ejercicio de la prueba proporcionadas por los estudiantes 8 y 14, en las figuras 48(a) y 48(b), respectivamente.

Figura 48. *Solución del ejercicio_i del cuestionario post-test*



(a) (b)

Fuente: Elaboración propia.

En este ejercicio la mayoría de los estudiantes siguieron correctamente los pasos para despejar la variable x. Inicialmente, transpusieron los denominadores de las fracciones al lado opuesto de la igualdad como multiplicaciones, aplicaron la propiedad distributiva y luego separaron las variables y las constantes en lados opuestos de la igualdad.

Sin embargo, no tuvieron en cuenta que, al trabajar con fracciones algebraicas, hay restricciones importantes con respecto a las variables en los denominadores. Este error se clasifica como E3.3 *falta de verificación en la solución*, que señala la omisión de considerar que el denominador de una fracción no puede ser cero y no comparar la solución con dicha restricción. Aunque sus procedimientos fueron correctos, el valor encontrado no era una solución válida del ejercicio, como se evidencia en la figura 48(a).

Por otro lado, en la figura 48(b) el estudiante intentó resolver el ejercicio, pero mostró incertidumbre sobre cómo abordar las fracciones presentes. Colocó un resultado con el objetivo de ofrecer alguna solución y acompañó su respuesta con un dibujo que expresaba su confusión en cuanto al proceso de resolución.

A través de los resultados presentados, este estudio reveló una variedad de errores en la resolución de ecuaciones lineales y no solo confirmó las categorías teóricas establecidas por autores como Kieran (1992), Hall (2002) y Pérez et al. (2019), sino que también resaltó la importancia de un enfoque pedagógico que utilice estos errores como herramientas de aprendizaje, en consonancia con las ideas propuestas por Rico (1997).

La observación detallada de estas respuestas subraya que, aunque los errores pueden ofrecer oportunidades para reconsiderar ciertos conocimientos y superar dificultades de manera constructiva, en un contexto de educación secundaria siempre es un desafío asegurar que todos los estudiantes los superen y exista una consistencia de estos a través del tiempo (Parra, 2021).

Se evidencia que persisten errores matemáticos a lo largo del proceso de investigación, lo que se asemeja a los hallazgos de Parra (2021). Esto se evidencia en que, a pesar de los mejores resultados obtenidos en el cuestionario post-test comparado con el cuestionario pre-test, algunos alumnos continuaron presentando errores en el proceso de resolución de las ecuaciones lineales propuestas.

4.5 Resultados y análisis de la entrevista a profundidad

Esta sección presenta un análisis detallado de las percepciones y experiencias relatadas por los participantes de las entrevistas a profundidad. En total, se entrevistó a tres estudiantes, cuyas características y elección se detallan en el capítulo de la metodología. A través de las entrevistas, los alumnos involucrados compartieron sus opiniones sobre las distintas actividades y cómo las estrategias utilizadas influyeron en su proceso de reforzamiento y aprendizaje del tema de ecuaciones lineales con una incógnita.

Se exploraron opiniones sobre la iniciativa de utilizar errores como una herramienta pedagógica y el impacto de las actividades de la propuesta en el proceso de reforzamiento y aprendizaje del tema en estudio, respaldadas por materiales manipulables para una mejor comprensión y asimilación de conceptos matemáticos. Estos aportes proporcionan perspectivas notables sobre la efectividad de incorporar errores en la enseñanza de matemáticas.

Durante las entrevistas, se obtuvo una buena percepción sobre el uso de errores en la enseñanza. Al abordar sobre su opinión sobre *el uso de errores en la enseñanza de ecuaciones lineales*. Señalan que:

Estudiante 3: Me parece increíble porque así uno sabe qué es lo que está haciendo mal y cómo podemos implementarlos para llegar a la respuesta correcta.

Además, está metodología brinda una percepción distinta de los errores, pues al estudiante comúnmente se le dice lo que está incorrecto sin ninguna explicación.

Estudiante 1: … esto está mal, y esto también, y veía el cero ahí gigante en rojo, …, entonces, la idea de la retroalimentación y explicarnos el por qué está mal y cómo corregir, pues eso está muy bien.

Esto concuerda con Lira y Pérez (2011), quienes indican que la enseñanza va más allá de un proceso de repetición y acumulación de conocimientos, que se trata de un proceso de transformación de la mente de la persona que aprende. Por lo tanto, el error debe ser un indicador para el análisis de procesos intelectuales de los estudiantes (Astolfi, 1999).

Asimismo, esta forma de trabajo les parece atractiva a los alumnos, pues al cuestionarles *sobre el uso de material manipulativo para representar la balanza*, respondieron que cambió el entorno en que se desarrolló la clase ya que solo recibían clases tradicionales.

Estudiante 2: Nunca nos habían enseñado en todo ese año de esa forma, o sea, como actividades así, siempre fue como que lo más tradicional, pizarra y ya, pero creo, me pareció bien tanto como a mí y a mis compañeros.

Además, el acompañamiento brindado mediante el uso de dichos materiales en las actividades de la propuesta logró cautivar a los estudiantes, pues se generó un espacio de aprendizaje muy distinto al que están acostumbrados.

Estudiante 1: El hecho de que no haya sido como tan aburrido y se hubieran utilizado como materiales didácticos, este, me ayudó bastante.

Este comentario subraya la importancia de la variedad de recursos pedagógicos para mantener el interés y enriquecer la experiencia de aprendizaje, lo que permite a los estudiantes abordar los contenidos de forma más tangible y práctica. Y al indagar si estos *pueden ayudar a mejorar el aprendizaje de ecuaciones lineales*. Se manifiesta que:

Estudiante 3: Nosotros a veces necesitamos un tipo de estímulo para entender algunas cosas y esa fue una práctica en la que no solo nos divertimos, sino que aprendimos sobre el tema.

El uso de materiales manipulables y el tipo de actividades realizadas contribuyeron significativamente a una experiencia educativa más dinámica y enriquecedora para algunos estudiantes, lo que se contrasta con lo mencionado por Abrate et al. (2006), quienes plantean que algunas dificultades asociadas con el desarrollo cognitivo de los alumnos se pueden deber a las incongruencias entre las estrategias y recursos planteados con las características y capacidades de los alumnos.

Asimismo, se observó una actitud positiva hacia los errores como oportunidades de aprendizaje, según la percepción de los estudiantes. Además, la diversificación de los materiales didácticos contribuyó a una comprensión más sólida del proceso para resolver las ecuaciones, al entender la naturaleza de los errores y cómo abordarlos efectivamente.

Durante las entrevistas, los alumnos también compartieron perspectivas valiosas sobre el impacto positivo de las actividad *En busca del error* en su proceso de aprendizaje. El estudiante 3 expresó su agrado por la originalidad de la técnica empleada.

Estudiante 3: Me gustó mucho que fuera de la mano con la otra actividad. Y me agradó que la técnica fuera diferente, que no sea encontrar la que está correcta, sino la que está incorrecta. Este fue más entretenido y siento que también como que lo apreciamos más o le metimos más empeño.

Esta perspectiva ilustra cómo la metodología propuesta puede despertar un mayor interés y compromiso por parte de los estudiantes. Al mismo tiempo, reconocieron que la metodología les ayudó de manera significativa a diferenciar y comprender los errores en las ecuaciones, lo que promueve un pensamiento más crítico y profundo sobre los conceptos matemáticos. En cuanto a *cómo les ayudaron estas actividades en la identificación y corrección de errores de ecuaciones lineales* se indica que.

Estudiante 1: El hecho de tener que encontrar la ecuación que estaba mal siento que fue un poco más difícil, pero al mismo tiempo ayudó bastante a poder como trabajar más la mente.

Esto subraya la complejidad adicional que puede llevar la búsqueda de errores, lo que incitaba un mayor compromiso intelectual del estudiante y favorecía el proceso de aprendizaje de manera completa y reflexiva.

Asimismo, la opinión del estudiante 2 reflejó que esta aproximación pedagógica no solo fue beneficiosa para él, sino que también fue percibida de manera positiva por otros compañeros. Y indagar *el impacto de estas actividades en su aprendizaje* el estudiante menciona que:

Estudiante 2: Tanto en mí como en algunos otros compañeros que logré escuchar. Fue bastante provechoso. Así como nos divertimos, así como nos confundimos, así como no entendimos nada, así como aprendimos también con bastante provecho para todos, a muchos les ayudó mucho, mejoraron, muchos no entendieron, pero todos creo que un proceso.

El proceso fue enriquecedor para todos, ya que se evidenció una mejoría en los resultados previos y posteriores a la propuesta, lo que refleja un impacto positivo de la inclusión de los errores en la clase de matemáticas. Se destaca también una percepción positiva de los estudiantes hacia el uso de errores como herramienta educativa en la enseñanza de las matemáticas. Esto resalta la teoría del error de Torre (2004), la cual señala que los errores deben ser vistos no solo como fallos, sino como valiosas oportunidades para profundizar en la comprensión del estudiante y a través de ellos, brindar espacios más amenos para su aprovechamiento.

En este caso, las actividades de la propuesta buscaron reforzar conocimientos importantes en los estudiantes de una manera distinta. Aunque es imposible para el docente determinar completamente si un alumno entiende o no un tema –como señala Hall (2002)–, los alumnos de esta investigación destacaron que las actividades fueron más entretenidas que las clases tradicionales que usualmente reciben.

Sin embargo, a pesar de estos cambios metodológicos en una población variada de estudiantes, también se pueden encontrar dificultades relacionadas con las actitudes afectivas y emocionales, propias de la percepción de cada estudiante hacia la matemática, lo cual puede generar una predisposición negativa, como indican Abrate et al. (2006).

De esta manera, la investigación respalda la teoría del error de Torre (2004), quien señala que, al realizar las tres fases de tratamiento de los errores (detección, identificación y rectificación), se puede lograr una disminución en la aparición de errores. En concordancia con Parra (2021), muchos de estos errores suelen ser consistentes. Sin embargo, observó que con el desarrollo de la propuesta se logró una mejoría y aceptación por parte de los estudiantes hacia las actividades desarrolladas.

Capítulo V. Conclusiones y recomendaciones

Este capítulo destaca los descubrimientos clave que emergieron de la investigación, en consonancia con los objetivos inicialmente establecidos. Es crucial señalar que, debido a la naturaleza cualitativa del estudio, no es apropiado generalizar los hallazgos a todos los estudiantes de undécimo grado en el ámbito de la educación secundaria. No obstante, los resultados brindan una perspectiva interesante sobre las dinámicas que podrían estar presentes en algunas aulas de este nivel. Adicionalmente, este estudio ha generado varias recomendaciones para investigaciones futuras, las cuales se centran en el análisis y la implementación práctica de los errores en entornos educativos, y resaltan particularmente cómo estos errores pueden ser valiosos para reforzar el aprendizaje matemático de los estudiantes.

5.1 Conclusiones

El objetivo general de esta investigación fue *elaborar una propuesta didáctica orientada a abordar dificultades y fomentar el aprendizaje en el tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita, basándose en los errores matemáticos identificados en un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria en Costa Rica*. Para alcanzar este objetivo la investigación se estructuró en torno a cuatro objetivos específicos, los cuales contribuyeron de manera integral al desarrollo y logro del objetivo general.

El primer objetivo específico de esta investigación se basó en *describir los lineamientos y recomendaciones de los Programas de Estudio de Matemática (2012) del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, en cuanto al uso de errores matemáticos cometidos por estudiantes de educación secundaria*. El análisis de dicho programa con respecto al tratamiento de los errores matemáticos cometidos por estudiantes de secundaria desvela una visión que valora los errores no solo como dificultades en el aprendizaje, sino que también destaca el papel del docente, quien debe ser un guía que asesore a los estudiantes.

Además, con base en su conocimiento y experiencia profesional, puede anticipar posibles soluciones erróneas, así como fomentar un ambiente en el que los alumnos no se sientan juzgados por cometer errores, sino que a partir de ellos puedan aprender y reforzar sus conocimientos y habilidades matemáticas, como lo propone Torre (2004).

A pesar de que el currículo señala que los errores proveen una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático de los estudiantes (Del Puerto et al., 2006; MEP, 2012), no es posible que el docente saque el máximo provecho de esto, debido a que lo hallado en el documento sobre los errores es superficial. Hacen falta directrices explícitas sobre cómo abordar y utilizar los errores en el aula, y esto podría derivar en que el docente no tenga clara la forma de diagnosticar las dificultades de sus estudiantes, además de cómo integrarlos en la enseñanza de la matemática para solventar dichas dificultades. Este vacío de información puede limitar la efectividad con la que los errores se convierten en herramientas de aprendizaje, lo que subraya la necesidad de recursos adicionales o formación docente que guíen la implementación de estrategias pedagógicas centradas en los errores.

Por su parte, esta investigación ha demostrado, aunque no de forma generalizada, que la incorporación del análisis y corrección de errores puede mejorar significativamente el rendimiento académico en matemática de los estudiantes (Rico, 1997; Parra, 2021), indicando la importancia de integrar estos enfoques en la enseñanza de las matemáticas, ya que los errores constituyen “una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos” (Del Puerto et al., 2006, p. 4).

El segundo objetivo de esta investigación se enfocó en *clasificar los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria al resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Para llevarlo a cabo se analizaron cada uno de los errores cometidos en la prueba y se contabilizaron de acuerdo con las subcategorías de análisis establecidas en el marco metodológico, a su vez, alineadas con los enfoques propuestos por Movshovitz-Hadar et al. (1987), Hall (2002), Pérez et al. (2019), Rodríguez (2015) y Rosas (2013).

A través de la revisión y análisis de las respuestas brindadas por los estudiantes en las pruebas y actividades realizadas, se reveló una comprensión variada y en ocasiones, insuficiente de las ecuaciones lineales por parte de los alumnos, a pesar de la importancia de este concepto matemático en múltiples contextos académicos y cotidianos (MEP, 2012).

Se identificaron dificultades significativas en el dominio del tema, que resaltan una preocupante brecha con respecto al conocimiento matemático esperado para estudiantes en su último nivel de educación secundaria (MEP, 2012). Esto, a su vez, puede perjudicar en estudios superiores, por no poseer una base adecuada de conocimiento previo (Gamboa et al., 2019; Parra, 2021).

Este hallazgo es particularmente alarmante, dado que –según el MEP (2012)– los conceptos relacionados con las ecuaciones lineales deberían haber sido asimilados por los estudiantes en etapas educativas anteriores, lo que indica una desconexión entre los niveles educativos y la preparación de los estudiantes para desafíos matemáticos más avanzados.

En este contexto, la investigación destaca la necesidad imperante de abordar y superar estas dificultades a través de estrategias didácticas, de modo que se fomente una comprensión más profunda y aplicada de las ecuaciones lineales (Socas, 2007), y se ofrezca un marco valioso para replantear el enfoque pedagógico, donde se identifique y clasifique los errores, a la vez que los incorpore de manera constructiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto permitiría a los docentes utilizar los errores como herramientas pedagógicas efectivas para diagnosticar y abordar las áreas de mayor dificultad para los estudiantes, lo que propiciaría un aprendizaje matemático más eficaz para sus estudios posteriores.

Además, el análisis reveló que, aunque los estudiantes podían identificar y corregir errores, sus respuestas a menudo carecían de una estructura formal adecuada. Esto subraya la necesidad de enfatizar en la enseñanza de métodos algebraicos y promover una escritura más formal en los procedimientos matemáticos. También se notaron dificultades continuas en el manejo de conceptos como fracciones y radicales, lo que desvela preocupación, ya que a nivel de undécimo año se espera que los estudiantes dominen por completo estos contenidos (MEP, 2012). Esto resalta la importancia de concentrar esfuerzos en esas áreas en futuras estrategias de enseñanza.

El tercer objetivo de esta investigación se centró en *diseñar actividades de aprendizaje que utilizaran errores matemáticos de estudiantes de undécimo año para atender dificultades y reforzar el aprendizaje en ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Para diseñar las actividades de aprendizaje se utilizó la clasificación de errores obtenida del cuestionario pre-test, además del análisis detallado de los Programas de Estudio de Matemática, libros de texto de secundaria e investigaciones relevantes en la enseñanza de matemáticas, como los estudios de Gamboa y Fonseca (2017), Samuel et al. (2016) y Maldonado (2018).

Se logró completar las fases de *detección* e *identificación* de los errores propuesta por Torre (2004), con el propósito de diseñar actividades donde existiera coherencia entre el tipo de ejercicios de la actividad con los errores sugeridos y los detectados en los estudiantes previamente, y de esa manera, resaltar su utilidad como herramienta educativa y la importancia de fomentar actitudes positivas hacia el aprendizaje matemático.

Para la fase de *rectificación de errores* se diseñó una propuesta de enseñanza formada por tres actividades relacionadas con la teoría propuesta por Torre (2004). Las actividades 1 y 2 siguieron el objetivo de *corregir o mejorar un ejercicio*, *corrección cooperativa* y *revisión de ejercicios mal resueltos*. Por último, la actividad 3 se caracterizó por seguir un proceso de *autorreflexión-metacognición de la información* obtenida en las actividades anteriores.

En la primera actividad, los estudiantes disfrutaron una experiencia lúdica para identificar y corregir errores en ecuaciones lineales. Al utilizar una balanza manipulable, visualizaron el equilibrio de las ecuaciones y cómo los errores influían en su equilibrio. Además, en la actividad se presentaron resultados variados en la comprensión y aplicación de conceptos y procedimientos algebraicos.

Aunque algunos estudiantes demostraron capacidad para identificar y corregir errores, se observaron fallos en el razonamiento y dificultades con conceptos como fracciones y radicales, lo que resulta un desafío tanto para el aprendizaje actual como para su aplicación futura en matemáticas avanzadas, ya que en las universidades se asume que el estudiante posee los conocimientos previos necesarios para esto.

Este vacío se asocia con que el docente evita trabajar este tipo de ejemplos y se limita únicamente a ecuaciones definidas en el conjunto de los números racionales, como se apreció en la validación del cuestionario aplicado a los estudiantes. Por consiguiente, cuando se enfrentan a una ecuación con números irracionales, no saben cómo resolverla, ya que nunca se han enfrentado a este tipo de expresiones.

La segunda actividad se enfocó en la resolución de ecuaciones racionales algebraicas. Involucró a los estudiantes en la identificación y corrección de errores en ecuaciones, para lo que se apoyaron en la calculadora científica y los ejemplos de ecuaciones con solución correcta. Esta experiencia destacó tanto la capacidad de los alumnos para reconocer errores específicos, como la necesidad de profundizar en la comprensión de conceptos algebraicos fundamentales. A través de este enfoque, se observó un desarrollo mixto en la aplicación de conocimientos matemáticos, lo que resalta la importancia de incorporar estrategias pedagógicas que promuevan el aprendizaje significativo.

Finalmente, la tercera actividad brindó un espacio valioso para la reflexión y expresión de opiniones sobre el proceso de aprendizaje en matemáticas, al promover la autorreflexión y el reconocimiento de los errores como oportunidades de aprendizaje. Las opiniones de los estudiantes revelaron la complejidad y los desafíos en la resolución de ecuaciones, así como la relevancia de los errores en su proceso educativo.

Esta actividad demostró que el aprendizaje matemático es un proceso dinámico, en el que se busca el crecimiento y madurez en el pensamiento matemático de los estudiantes. No obstante, es necesario tomar el tiempo para reflexionar y analizar los errores que son cometidos e intentar obtener un aprendizaje de ellos (Torre, 2004).

Como último objetivo de la investigación se planteó *determinar el impacto de las actividades diseñadas en el aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita con base en los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria.* Para esto se contabilizó la cantidad total de ejercicios con errores según cada subcategoría, ejercicios sin respuesta y ejercicios resueltos correctamente.

La cantidad de ítems sin respuesta disminuyó de forma considerable y pasó de 82 ítems a 7. Mientras, la cantidad de ítems resueltos de forma correcta pasó de 23 a 95. En cuanto a los errores detectados, la subcategoría de errores más frecuente en el primer cuestionario *E2.1 confundir entre el término con la incógnita y término independiente* disminuyó su presencia en el segundo cuestionario y pasó de aparecer en 20 ocasiones a solamente 3. Aunque aparecieron errores en las subcategorías *E1.2 errores al efectuar operaciones básicas con números racionales y E3.3 falta de verificación en la solución*, se puede deber al bajo índice de respuesta en el primer cuestionario que tuvieron las preguntas en que se detectaron estos errores.

Esto revela una mejoría general en la capacidad de los estudiantes para resolver ecuaciones lineales, detectar y corregir errores, puesto que en el cuestionario pre-test existió gran ausencia de respuestas. Mientras, en el post-test, aunque se detectaron distintos errores en las soluciones mostradas, la cantidad de respuestas obtenidas fue superior con muchas respuestas realizadas de forma correcta. Esto revela cierta mejoría en su entendimiento, lo que se asemeja a los resultados obtenidos por Escudero (2007), Barbarán y Fernández (2014) y Barbieri y Booth (2020), quienes posterior a la incorporación de los errores en los ambientes educativos lograron mejorías notables en la manipulación de expresiones algebraicas.

También se analizó las entrevistas a profundidad, que proporcionaron percepciones valiosas sobre cómo los estudiantes percibieron el uso de errores como una herramienta pedagógica efectiva. Ellos expresaron una actitud positiva hacia los errores como oportunidades de aprendizaje y destacaron la utilidad de las actividades propuestas en el fortalecimiento de su comprensión matemática.

Además, enfatizaron cómo la inclusión de estrategias lúdicas y el uso de materiales manipulativos concretaron un aprendizaje más dinámico y significativo. Por lo tanto, la implementación de estas técnicas pedagógicas no solo fomentó el compromiso y la participación en las actividades, sino que también permitió a los estudiantes abordar y superar sus dificultades de una manera más entretenida y motivadora.

En síntesis, el análisis integral de las pruebas y entrevistas destacó el papel crucial de integrar los errores en el proceso educativo. Este enfoque pedagógico cambió la percepción de los errores de una visión negativa a una constructiva y también tuvo un impacto significativo en el aprendizaje de los participantes.

A su vez, evidenció que la adopción de estrategias didácticas innovadoras, que enfocan los errores como oportunidades para el aprendizaje y desarrollan habilidades críticas y analíticas en matemáticas, resultó una mejora notable en la comprensión y resolución de ecuaciones de primer grado en algunos de los estudiantes. Ellos lograron superar sus dificultades matemáticas y, además, desarrollaron un enfoque más reflexivo y crítico hacia el aprendizaje, lo que evidencia la efectividad de estos métodos en el fortalecimiento de su conocimiento matemático y habilidades de resolución de ecuaciones.

5.2 Limitaciones

La realización de este estudio ha permitido explorar el impacto de la pedagogía del error de Torre (2004) en la solución de ecuaciones lineales. No obstante, como toda investigación, este trabajo enfrenta ciertas limitaciones que es crucial reconocer para contextualizar adecuadamente los resultados obtenidos y proporcionar una base realista para futuras investigaciones. Dichas limitaciones son las siguientes:

- La investigación se desarrolló en un plazo limitado, lo que restringió la profundidad y el alcance del estudio. Este factor afectó particularmente la duración de la intervención pedagógica y limitó la posibilidad de observar cambios a largo plazo en la comprensión y habilidades matemáticas de los estudiantes.
- La falta de acceso a recursos tecnológicos adecuados impidió la implementación de algunas actividades como se había planificado originalmente, lo que restringió la variedad de métodos de enseñanza que se pudieron emplear.
- La concentración en un grupo específico de estudiantes de undécimo año de una institución particular puede limitar la aplicabilidad y profundización de los hallazgos a otros contextos educativos.
- Las restricciones y cambios en la dinámica educativa ocasionados por la pandemia pudieron haber influenciado en la implementación de las actividades y la interacción con los estudiantes.

5.3 Recomendaciones

En este apartado se ofrecen recomendaciones surgidas del estudio, orientadas a entidades educativas, profesores de matemáticas de secundaria y al ámbito de investigación en educación matemática.

5.3.1 Recomendaciones para docentes de matemáticas de secundaria

- Realizar evaluaciones y seguimientos regulares de los errores de los estudiantes para identificar áreas en las que existen dificultades en el aprendizaje, para así reforzar las habilidades matemáticas.
- Diseñar unidades didácticas con intención de integrar el análisis de errores matemáticos en la enseñanza, que utilicen métodos innovadores y recursos tecnológicos para una comprensión clara de conceptos matemáticos.

- Fomentar en los estudiantes una actitud positiva ante los errores que cometen, en lugar de considerarlos como algo perjudicial en el aprendizaje.

5.3.2 Recomendaciones para entidades educativas

- Incorporar el análisis de errores en la enseñanza de matemáticas como estrategia complementaria.
- Diseñar materiales didácticos a disposición de los docentes para el abordaje de ciertos contenidos, donde se promueva la incorporación del análisis de los errores en clase.
- Capacitar a los docentes para el abordaje de estrategias metodológicas que partan del uso de los errores para fortalecer el conocimiento de los estudiantes.

5.4 Líneas de investigación futuras

- Realizar investigaciones que proporcionen evidencia cuantitativa sobre el impacto del análisis de errores en la enseñanza matemática.
- Realizar estudios cuantitativos que midan más a profundidad las dificultades de la población de undécimo año y conjeturar posibles causas y soluciones.
- Desarrollar investigaciones longitudinales que permitan examinar la evolución y prevalencia de errores matemáticos en educación secundaria para comprender patrones de errores, sus causas y los beneficios de incorporarlos en el proceso de aprendizaje.
- Investigar las percepciones y enfoques de los docentes de matemáticas con respecto a los errores en el aula y su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje, para enriquecer estrategias pedagógicas futuras.
- Analizar la eficacia de los programas de formación docente en matemáticas para preparar educadores capaces de identificar, prevenir y corregir errores matemáticos en el aula, que propongan mejoras basadas en los hallazgos.

Referencias

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo* (1ª ed.).Universidad Nacional de Villa María. https://www.academia.edu/26468683/ERRORES_Y_DIFICULTADES_EN_MATEM%C3%81TICA_An%C3%A1lisis_de_causas_y_sugerencias_de_trabajo

Ahumada, A. (2015). *Estudio de caso: Cómo las profesoras de segundo básico de un colegio particular enfrentan los errores, cometidos por sus alumnos, en la resolución de problemas matemáticos* [Tesis de Maestría]. Universidad Católica de Chile. https://repositorio.uc.cl/handle/11534/21573

Alfaro, C., Alfaro, H., Chacón, D. y González, A. (2015). *El razonamiento lógico como medio para fortalecer la habilidad de argumentación en estudiantes de secundaria* [Tesis de Licenciatura]. Universidad de Costa Rica. https://catalogosiidca.csuca.org/Record/UCR.000035677

Álvarez, C. y San Fabián, J. (2012). La elección del estudio de casos en investigación educativa. *Gazeta de Antropología, 28*(1). http://hdl.handle.net/10481/20644

Astolfi, J. (1999). *"Error", un medio para enseñar*. Díada Editora. https://es.scribd.com/document/55636596/El-error-un-medio-para-ensenar

Barbarán, J. y Fernández, J. (2014). El análisis de errores en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una metodología para desarrollar la competencia matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 173-186. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1122

Barbieri, C. y Booth, J. (2020). Mistakes on display: Incorrect examples refine equation solving and algebraic feature knowledge. *Applied Cognitive Psychology, 34*(4), 1-17. https://doi.org/10.1002/acp.3663

Bayardo, M. G. (1987). *Introducción a la metodología de la investigación educativa.* Editorial Progreso

Bolaños, H. y Lupiáñez, J. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *Uniciencia, 35*(1), 1-18. https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.1

Calzado, D. (2004). *Un modelo de formas de organización del proceso de enseñanza-aprendizaje en la formación inicial del profesor* [Tesis Doctoral]. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. https://online.fliphtml5.com/srapt/ntny/

Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, *28*(2), 15-44. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/6009

Chávez, R. (2018). *Competencias para resolver operaciones algebraicas en la prueba de conocimientos básicos que sustentan los aspirantes a ingresar a la Universidad*

San Carlos de Guatemala [Tesis de Maestría]. Universidad Panamericana de Guatemala. http://www.repositorio.usac.edu.gt/9182/1/9182.pdf

Cohen L., Manion L. y Morrison K. (2007). *Research methods in education.* Routledge, Taylor and Francis Group. https://repository.unmas.ac.id/medias/journal/EBK-00127.pdf

Del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 38*(4), 1-13. https://digital.cic.gba.gob.ar/handle/11746/4668

Didáctica Multimedia. (2017a). *Matemáticas 8°. Un enfoque práctico* (1 ed.). Inversiones Orozcan de Orotina. https://www.didacticamultimedia.com/

Didáctica Multimedia. (2017b). *Matemáticas 11°. Un enfoque práctico* (1 ed.). Inversiones Orozcan de Orotina. https://www.didacticamultimedia.com/

Ediciones Lebombo (2015a). *Matemáticas 8°.* (1 ed.). E Digital https://gilbertochava.wixsite.com/edicioneslebombo

Ediciones Lebombo (2015b). *Matemáticas 11°.* (1 ed.). E Digital https://gilbertochava.wixsite.com/edicioneslebombo

Egodawatte, G. y Stoilescu, D. (2015). Grade 11 students' interconnected use of conceptual knowledge, procedural skills, and strategic competence in algebra: A mixed method study of error analysis. *European Journal of Science and Mathematics Education, 3*(3), 289-305. http://scimath.net/articles/33/337.pdf

Escudero, R. (2007). Uso de los errores matemáticos como dispositivo didáctico para generar aprendizaje de la racionalización de radicales de tercer orden. *Zona Próxima, 8*(1), 12-25. https://www.redalyc.org/pdf/853/85300802.pdf

Escuela de Matemática. (2020). *Carta al estudiante del curso de servicio MAT001 Matemática General.* Universidad Nacional, Costa Rica. https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/oferta-academica/cursos-de-servicio/documentacion-digital

Fernández, A. (2013). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas en ESO y Bachillerato. Análisis de un caso práctico* [Tesis de Maestría]. Universidad Internacional de la Rioja. https://reunir.unir.net/handle/123456789/1808

Fernández, H. Morales, J. L. y Quesada, S. (2018). *Análisis didáctico, como fundamentación teórica, en la elaboración de materiales didácticos coherentes con el programa de estudios de matemática de Costa Rica: el caso de la función lineal y de la función cuadrática* [Tesis de Licenciatura]. Universidad Nacional de Costa Rica. https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/estudiantes/trabajos-finales-de-graduacion/documentacion-digital

Gamboa, M. y Fonseca, J. (2017). Los errores en el aprendizaje de las matemáticas. Su importancia didáctica. *Didasc@lia: Didáctica y Educación, 8*(5), 227-246. https://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalia/article/view/681/679

Gamboa, R., Castillo, M. y Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, *19*(1), 104-136. http://dx.doi.org/10.15517/aie.v19i1.35278

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* [Tesis de Maestría]. Universidad de Granada. https://www.researchgate.net/publication/320505917

García, J. (2015). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas* [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/43529

García, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. Lupiáñez, M. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática – 2011*. (pp. 145-155). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. http://funes.uniandes.edu.co/2018/1/GarciaSegoviaLupianez2011.pdf

Gil, J., León, J. y Morales, M. (2017). Los paradigmas de investigación educativa, desde una perspectiva crítica. *Revista Conrado*, *13*(58), 72-74. http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/476

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros. En J. Godino (Ed.), *Didáctica de la Matemática para Maestros* (pp. 5-154). Editorial GAMI. http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(42b), 483-512. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

González, M., Gómez, P. y Restrepo, A. (2015). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación*, *370*(1), 71-95. http://funes.uniandes.edu.co/8450/

Hall, R. (2002). *An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. Philosophy of mathematics education journal*, *15*(1), 1-67. http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome15/errors.htm

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill. https://openlibrary.org/books/OL25444654M/Metodolog%C3%ADa_de_la_investigaci%C3%B3n

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill. https://www.digitalrepositorio.com/items/show/2

Herrera, M. (2010). Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 247-255). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. http://funes.uniandes.edu.co/4547/

Kayani, M. e Ilyas, S. Z. (2014). Is algebra an issue for learning mathematics at pre-college level? *Journal of Educational Research, 17*(2), 100-106. https://search.proquest.com/docview/1786827925?accountid=37045

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). Macmillan Publishing Co, Inc.

Lira, L. y Pérez, L. (7-11 noviembre, 2011). *Problemas de comprensión sobre el planteamiento y solución de problemas en algebra. Un estudio en educación media superior tecnológico* [Ponencia]. En H. Casanova (presidente), XI Congreso Nacional de Investigación Educativa (pp. 1-9). Consejo Mexicano de Investigación Educativa. http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/ponencias.htm

Livio, M. (2013). *Errores geniales que cambiaron el mundo*. Ariel. https://www.popularlibros.com/archivos/9788434409675.pdf

López, M., Molina, E., Contreras, J. y Ruz, F. (2019). Análisis de los errores inferenciales en el ámbito científico. En J. Contreras, M. Gea, M. López y E. Molina (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. (pp. 1-10). http://hdl.handle.net/10481/55233

Lucchini, G., Cuadrado, B. y Tapia, L. (2006). *Errar no es siempre un error.* Fundación Educacional Arauco (Fundar). https://docplayer.es/13491542-Errar-no-es-siempre-un-error.html

Madrid, M., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. (2019). El desarrollo del concepto de ecuación en los libros españoles de matemáticas del siglo XVIII [Ponencia]. En J. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII.* (pp. 403-412). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/23/ActasXXIIISEIEM.pdf

Maldonado, A. (2018). *Estrategia didáctica basada en la caracterización de errores para desarrollar el pensamiento variacional en la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita en estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Santa Ana de San Sebastián de Mariquita* [Tesis de Maestría]. Universidad del Tolima. https://repository.ut.edu.co/entities/publication/da0e08a0-244f-42d0-8ac8-4b0dc09f0c01

Mancera, E. y Basurto, E. (2015). *Errar es un placer: El uso de errores para el desarrollo del pensamiento matemático*. 3D Editorial.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa.* Pearson Educación, S. https://www.academia.edu/35837138/McMillan_J_H_Schumacher_S_2005_Investigacion_educativa_5_ed_LIBRO_INVESTIGACION_EDUCATIVA

Méndez, G., Méndez, E. y López, A. (2018). La enseñanza del algebra y la reprobación. Una experiencia para compartir. *Interconectando Saberes*, *6*(3), 149-169. https://is.uv.mx/index.php/IS/article/view/2581

Meneses G. (2007). *NTIC, interacción y aprendizaje en la universidad* [Tesis Doctoral]. Universidad de Rovira Virgili. https://dialnet.unirioja.es/servlet/dctes?codigo=8281

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de estudio en matemáticas para la educación general básica y el ciclo diversificado.* https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2014). *Programa de estudio educación prescolar.* https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/educacion_preescolar.pdf

Morales, S. (2017). *Errores que presentan estudiantes de undécimo, en el uso del lenguaje algebraico* [Tesis de Licenciatura]. Universidad Pedagógica Nacional. http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/2242

Moreno, I. y Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *EMA*, *2*(3), 247-258. http://funes.uniandes.edu.co/1054/1/30_Moreno1997Secuencia_RevEMA.pdf

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, *18*(1), 3-14. https://doi.org/10.2307/749532

Mulero, J., Segura, L. y Sepulcre, J. (2013). Percepción de nuestros estudiantes acerca de las matemáticas en la vida diaria [Ponencia]. En N. Pellin (Ed), *XI Jornadas de redes de investigación en docencia universitaria: Retos de futuro en la enseñanza superior: docencia e investigación para alcanzar la excelencia académica.* (pp. 2144-2157). Instituto de Ciencias de la Educación (ICE). http://hdl.handle.net/10045/44212

Olivar, S., Flores, W. y Alvarado, F. (2018). Errores algebraicos en tareas de descomposición factorial por estudiantes universitarios de Nicaragua. *Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas,* *1*(1), 9-27. https://doi.org/10.30698/recsp.v1i1.1

Olmedo, N., Galdínez, M., Peralta, J. y Di Bárbaro, M. (3-7 mayo, 2015*). Errores y concepciones de los alumnos en álgebra.* En T. Gutiérrez (Ed), XIV Conferencia Interamericana en Educación Matemática (pp. 1-13). CIAEM. http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/877/367

Parra, E. (2021). *Errores matemáticos en el área de álgebra básica que manifiestan estudiantes del curso Matemática Fundamental, de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional* [Tesis de Licenciatura]. Universidad Nacional de Costa Rica.

https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/estudiantes/trabajos-finales-de-graduacion/documentacion-digital

Pérez, M., Diego, J., Polo, I. y González, M. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA*, *13*(2), 84-103. http://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/v13i2.7613

Pianda, D. (9-11 mayo, 2018). *Categorización de errores típicos en ejercicios matemáticos cometidos por estudiantes de primer semestre de la Universidad de Nariño* [Ponencia]. En XIV Coloquio Regional de Matemáticas y IV Simposio de Estadística (pp. 254-263). Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/4598

Porras, K. y Castro-Rodríguez, E. (2021). Errores manifestados por estudiantes de secundaria al realizar tareas de modelización matemática. *Revista Acta Scientiae, 23*(2), 29-57. http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/6193

Poveda, R. (2019). *Pensamiento funcional de estudiantes de cuarto grado de educación primaria y sétimo grado de educación secundaria* [Tesis de Maestría]. Universidad de Granada. http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.18331.00802

Programa Estado de la Nación (PEN). (2017). *Estado de la Educación 6.* Consejo Nacional de Rectores (CONARE). https://estadonacion.or.cr/informes/

Programa Estado de la Nación (PEN). (2019). *Estado de la Educación 7.* Consejo Nacional de Rectores (CONARE). https://estadonacion.or.cr/informes/

Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS). (2016a). *Matemática 8°: Desarrollando Habilidades* (1 ed.). Editorial PIMAS. https://cursos.pimas.co.cr

Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS). (2016b). *Matemática 11°: Desarrollando Habilidades* (2 ed.). Editorial PIMAS. https://cursos.pimas.co.cr

Publicaciones Porras y Gamboa. (2017a). *Matemática 8º* (2 ed.). Editorial Compas ERV. https://publicacionesporras.com/

Publicaciones Porras y Gamboa. (2017b). *Matemática 11º* . (3 ed.). Editorial Compas ERV. https://publicacionesporras.com/

Ramírez, G., Chavarría, J. y Mora, M. (2010). Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de álgebra: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (pp. 95-103). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. http://funes.uniandes.edu.co/4528/

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* (pp. 69-108). Grupo Editorial Iberoamericano. http://funes.uniandes.edu.co/486/

Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Epsilon*, *38*(1), 185-198. http://funes.uniandes.edu.co/2354/

Rodríguez, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria* [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/41014

Rodríguez, S., Cañadas, M., Molina, M. y Castro, E. (2012). Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico. En J. Sagula (Ed.), *Simposio de Educación Matemática*. (pp. 1214-1234). Edumat. http://funes.uniandes.edu.co/1930/

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos* [Tesis de Doctorado]. Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/35199

Rosas, O. (2013). *Matemática Recreativa como estrategia de enseñanza-aprendizaje en la resolución de ecuaciones algebraicas de problemas literales* [Tesis de Maestría]. Tecnológico de Monterrey. https://repositorio.tec.mx/handle/11285/619609

Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74. http://hdl.handle.net/10481/4441

Ruiz, R. (2018). *Errores que cometen los estudiantes de tercer año de secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable* [Tesis de Maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/13408

Samuel, K., Mulenga, H.., y Angel, M. (2016). An Investigation into Challenges Faced by Secondary School Teachers and Pupils in Algebraic Linear Equations: A Case of Mufulira District, Zambia. *Journal of education and practice*, *7*(26), 99-106. https://eric.ed.gov/?id=EJ1115865

Sánchez, M., Fernández, M. y Díaz, J. (2021). Técnicas e instrumentos de recolección de información: análisis y procesamiento realizado por el investigador cualitativo. *Revista Científica UISRAEL*, *8*(1), 107-121. https://doi.org/10.35290/rcui.v8n1.2021.400

Sandín, M. (2000). Criterios de validez en la investigación cualitativa: De la objetividad a la solidaridad. *Revista de Investigación Educativa, 18*(1), 223-242. https://revistas.um.es/rie/article/view/121561

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, y M. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática.* (pp. 19-52). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/1247/

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, 77*(1), 5-34. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3781349

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al algebra.* Editorial Síntesis

Soto, E. y Escribano, E. (2019*)*. El método estudio de caso y su significado en la investigación educativa. En D. Franco (Ed.), *Procesos formativos en la investigación educativa: diálogos*, *reflexiones, convergencias y divergencias.* (pp. 203-222). Red de Investigadores Educativos Chihuahua AC. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7042305

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones Morata. https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Investigacion-con-estudios-de-caso.pdf

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación* Paidós. https://www.academia.edu/22605912/Metodos_cualitativos_investigacion_Taylor_y_Bogdan

Torre, S. (2004). *Aprender de los errores: El tratamiento didáctico de los errores como estrategias innovadoras*. Magisterio del Río de La Plata. https://www.academia.edu/25112968/APRENDER_DE_LOS_ERRORES

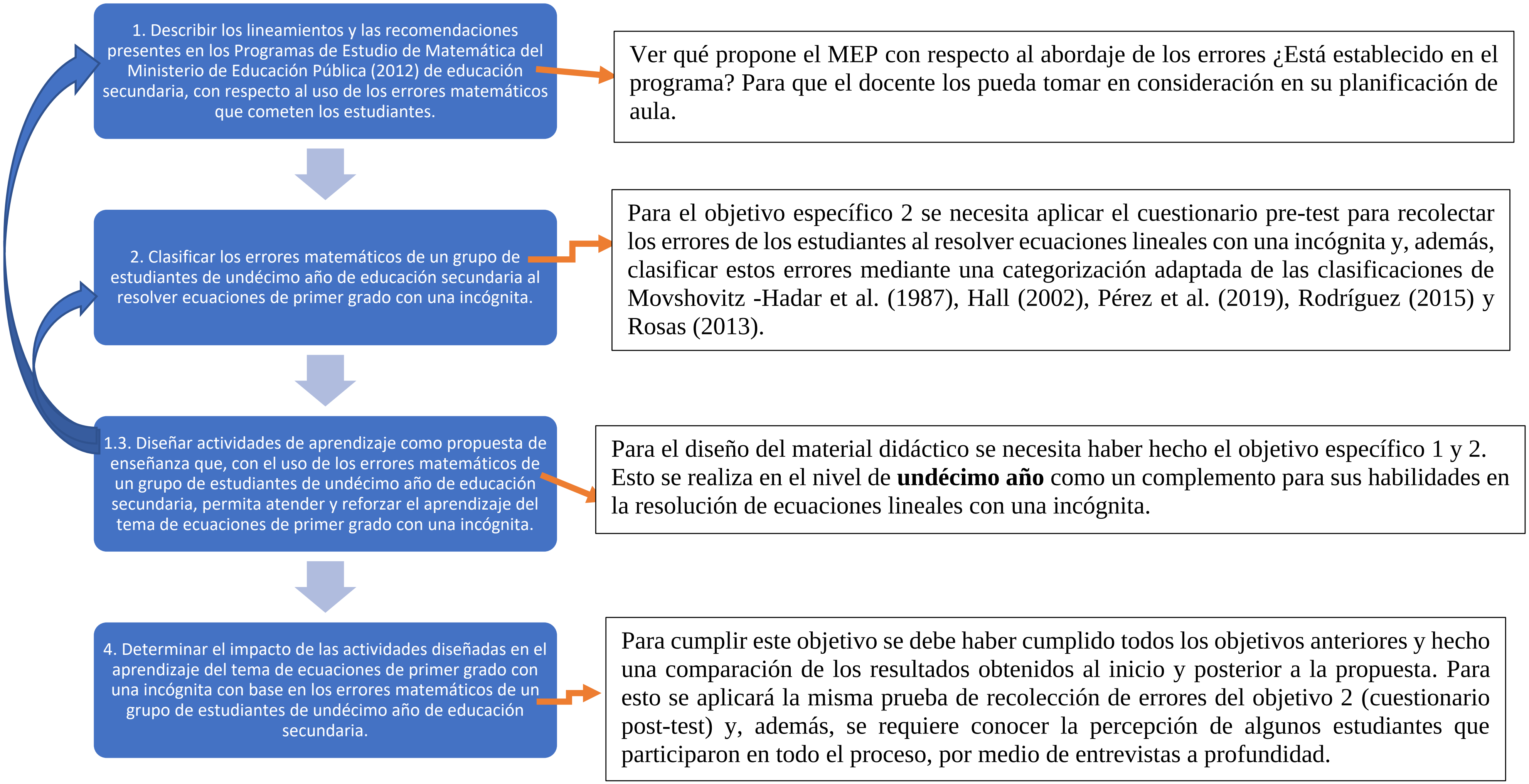
Vasco, D. y Climent, N. (2020). Conocimiento de un profesor de álgebra lineal sobre los errores de los estudiantes y su uso en la enseñanza. *Quadrante*, *29*(1), 97-114. https://doi.org/10.48489/quadrante.23008

Vizcarra, F. y Gómez, S. (2016). El error como oportunidad para reflexionar y tomar decisiones asertivas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia*, *8*(16), 34-42. http://revistas.unam.mx/index.php/rmbd/article/view/57097/50643

Wilhelmi, M., Godino, J. y Lasa, A. (4-6 setiembre, 2014). *Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria* [Seminario]. En M. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 573-582). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/18/ACTAS2014.pdf

Anexos

Anexo 1. Esquema de los objetivos



Anexo 2. Matriz de congruencia metodológica

Objetivo específico	Fuentes de información	Técnicas e instrumentos de recolección de información	Actividades puntuales y específicas para recolectar la información	Análisis de datos
1. Describir los lineamientos y las recomendaciones presentes en los Programas de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública (2012) de educación secundaria, con respecto al uso de los errores matemáticos que cometen los estudiantes.	Programas de Estudio de Matemáticas	Revisión documental Instrumento: Ficha bibliográfica #1 Ficha bibliográfica #2	Se buscó toda mención de error los programas de estudio y sus recomendaciones sobre su incorporación en las clases.	Tomando en cuenta las diferentes percepciones y recomendaciones del uso de los errores mencionados en esta investigación, se hizo una descripción de lo propuesto en los programas de estudio y los referentes teóricos de la investigación.
2. Clasificar los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria al resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Estudiantes de undécimo año	Encuesta Instrumento: Cuestionario pre-test	Se realizará una prueba diagnóstica del tema de ecuaciones lineales. Dicha prueba consta de 9 ejercicios en los que se contemplarán los tipos de ecuaciones estipuladas en el programa de estudios.	A partir de las categorizaciones de los errores presentados en el marco teórico, se diseñarán algunas categorías y subcategorías en las cuales se enmarcarán los errores que cometan los estudiantes en la prueba.

3. Diseñar actividades de aprendizaje como propuesta de enseñanza que, con el uso de los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria, permita atender dificultades y reforzar el aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Estudiantes de undécimo año	Cuestionario pre-test	A partir de los errores recolectados y clasificados del pre-test, se considerarán diferentes errores para ser adaptados a alguna de las actividades a diseñar, las cuales serán adaptaciones de las mencionadas en el marco teórico.	Una vez aplicado el cuestionario pre-test, se clasificarán los errores que cometan los estudiantes al resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, esto para tener claridad de cuáles son esos errores y su frecuencia. Así, a través de ellos y la revisión documental realizada, se diseñará la propuesta de enseñanza mediante actividades destinadas para el aprendizaje.
4. Determinar el impacto de las actividades diseñadas en el aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita con base en los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria.	Estudiantes de undécimo año	Cuestionario post-test Entrevistas a profundidad	Una vez desarrollada la propuesta y ambos cuestionarios, se procederá a coordinar con los estudiantes seleccionados para las entrevistas a profundidad, confirmando la fecha y hora de la actividad. En este caso, dependiendo de la disponibilidad, puede ser en forma virtual mediante alguna plataforma de videollamadas, como Microsoft Teams, Zoom o Google Meet.	Para el análisis de las entrevistas a profundidad se solicitará el permiso para poder grabar el audio y de esa manera, no perder ningún detalle importante de la percepción de los alumnos que pueda ser de interés para la investigación.

Anexo 3. Carta de solicitud de acceso a la institución educativa

Universidad Nacional de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática

Heredia, Costa Rica
Fecha

Estimado(a) director(a) del Colegio ______________________

Mi nombre es Dennis Josué Sequeira Lizano. Soy estudiante actual de Licenciatura en la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional. En este momento estoy llevando a cabo una investigación como parte del Trabajo Final de Graduación, el cual tiene como título: *El uso de los errores matemáticos en la atención de dificultades y el reforzamiento del aprendizaje del tema ecuaciones de primer grado con una incógnita en undécimo año de educación secundaria en Costa Rica*.

Cuyo objetivo principal es elaborar una propuesta didáctica para la atención de dificultades, que promueva el reforzamiento del aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita, tomando como base los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria en Costa Rica, debido a que en algunas investigaciones se reporta que los estudiantes que ingresan a las universidades presentan dificultades en habilidades y conocimientos algebraicos que se desarrollan en educación secundaria, siendo ideal trabajar con estudiantes de undécimo año, por ser este el nivel previo a la educación superior.

Para esto es primordial establecer contacto con un grupo de undécimo año para poder desarrollar la investigación, por lo que con mucho respeto le solicito su colaboración con el acceso a la institución a su cargo para llevar a cabo el proceso. Asimismo, el permiso para que un docente de matemática a cargo de un grupo de este nivel pueda brindar este espacio en su clase para los diferentes procesos que se necesiten realizar y así poder llevar a cabo el propósito del trabajo, ya que el proceso investigativo cuenta con varias etapas.

Sin más por el momento y agradeciendo toda la ayuda que me puedan brindar, se despide

Dennis Josué Sequeira Lizano.
Correo: dennis.sequeira.lizano@est.una.ac.cr

Anexo 4. Consentimiento informado para padres de familia

Universidad Nacional de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática

Heredia, Costa Rica
Fecha:
Estimado(a) padre, madre o encargado(a):

Mi nombre es Dennis Josué Sequeira Lizano. Soy estudiante actual de Licenciatura en la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional. Actualmente, estoy realizando una investigación como parte del Trabajo Final de Graduación. Este trabajo tiene como propósito elaborar una propuesta para reforzar el tema de ecuaciones de primer grado de una incógnita, tomando como base los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de la educación secundaria, debido a que los estudiantes que ingresan a las universidades están presentando dificultades en los conocimientos básicos matemáticos, en especial en álgebra. Por lo que es relevante para este estudio su ayuda como padre de familia en otorgar el permiso para que su hijo participe en nuestro trabajo, dado que el nivel de undécimo año es el nivel previo a la educación universitaria.

Además**,** como resultado de la participación, se pretende reforzar en los estudiantes los conocimientos y habilidades para resolver ecuaciones lineales, por lo que su hijo se verá beneficiado al mejorar su aprendizaje matemático.

Participar en esta investigación no significa para el estudiante ningún riesgo ni físico ni psicológico ni legal. Si no siente comodidad en alguna parte del proceso, puede expresárselo al investigador. La participación en esta investigación es completamente voluntaria.

La información que se obtendrá de los estudiantes es únicamente con propósitos investigativos. Además, en los resultados de la investigación la identidad de los estudiantes es totalmente anónima y confidencial. Si usted desea más información sobre los aspectos del cuestionario, puede comunicarse conmigo al correo dennis.sequeira.lizano@est.una.ac.cr o el teléfono 8496-3464.

Si está de acuerdo con todo lo anterior y aprueba la participación de su hijo en la investigación, debe llenar los siguientes datos:

Nombre y firma del padre de familia: ______________________________________

Nombre del estudiante: ____

Universidad Nacional de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática

Numero de test _____

Test diagnóstico de conocimientos previos en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita

La prueba se encuentra dividida en dos secciones. La primera sección corresponde a preguntas de información general. En la segunda sección encontrará nueve preguntas de desarrollo. En estas se le presentan ecuaciones lineales con una incógnita, las cuales deberá resolver o encontrar su conjunto solución. Es necesario que escriba todos los procedimientos que le permitan obtener la respuesta. Por favor, no borrar ninguno de estos.

Instrucciones generales

- Compruebe que la prueba brindada se encuentre completa.
- Inicie la prueba en el momento que se dé la orden.
- Lea cuidadosamente cada una de las preguntas antes de dar respuesta.
- Cuenta con 45 minutos para realizar el instrumento.
- Trabaje en forma clara y ordenada en cada uno de los instrumentos.
- Puede realizar la prueba con lápiz o lapicero de tinta azul o negra.
- De tener que realizar un ejercicio más de una vez por algún error que haya notado, no lo borre, indique "no revisar" y realícelo en la hoja de borrador adjunta.
- Antes de entregar el instrumento, asegúrese de haber respondido todos los ítems.

I Parte

Nombre y apellidos: ____

Género: __________________

Edad: ____________________

II Parte

Resuelva y brinde el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita.

a) $\boldsymbol{-4x = -24}$

b) $\boldsymbol{7x - 21 = -32}$

c) $\boldsymbol{\sqrt{2} \cdot x + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

d) $\boldsymbol{-27x + 21 = 28 - 4x}$

e) $\boldsymbol{2y – (4y - 5) = 0}$

f) $\mathbf{3 \cdot (-5x + 2) = -5 \cdot (3x + 8)}$

g) $\mathbf{7x - (6x + 6) = 2x - (6 + x)}$

h) $\mathbf{\frac{x}{3} - 7 = \frac{-3}{2}}$

i) $\mathbf{\frac{x-1}{4x-4} = \frac{1}{5}}$

Solucionario de ítems planteados

Ecuación 1:

$$\boldsymbol{-4x = -24}$$

Solución:

$$-4x = -24$$
$$\Rightarrow -4x = -24$$
$$\Rightarrow x = \frac{-24}{-4}$$
$$\Rightarrow x = 6$$
$$\therefore S = \{\,6\}$$

Ecuación 2:

$$\boldsymbol{7x - 21 = -32}$$

Solución:

$$7x - 21 = -32$$
$$\Rightarrow 7x = -32 + 21$$
$$\Rightarrow 7x = -9$$
$$\Rightarrow x = \frac{-9}{7}$$
$$\therefore S = \left\{\frac{-9}{7}\right\}$$

Ecuación 3:

$$\boldsymbol{\sqrt{2} \cdot x + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Solución:

$$\sqrt{2} \cdot x + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{2} \cdot x = \frac{1}{\sqrt{2}} - 3$$
$$\sqrt{2} \cdot x = \frac{1 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\frac{1 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{1 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}$$
$$x = \frac{1 - 3\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore \mathrm{S} = \left\{\frac{1 - 3\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Ecuación 4:

$$\boldsymbol{-27x + 21 = 28 - 4x}$$

Solución:

$$-27x + 21 = 28 - 4x$$
$$\Rightarrow -27x + 4x = 28 - 21$$
$$\Rightarrow -23x = 7$$
$$\Rightarrow x = \frac{7}{-23}$$
$$\Rightarrow x = -\frac{7}{23}$$
$$\therefore \mathrm{S} = \left\{-\frac{7}{23}\right\}$$

Ecuación 5:

$$\mathbf{2y – (4y - 5) = 0}$$

Solución:

$$2y – (4y - 5) = 0$$
$$\Rightarrow 2y - 4y + 5 =$$
$$\Rightarrow -4y + 2y = -5$$
$$\Rightarrow -2y = -5$$
$$\Rightarrow y = \frac{-5}{-2}$$
$$\Rightarrow y = \frac{5}{2}$$
$$\therefore S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

Ecuación 6:

$$\mathbf{3 \cdot (-5x + 2) = -5 \cdot (3x + 8)}$$

Solución:

$$3 \cdot (-5x + 2) = -5 \cdot (3x + 8)$$
$$\Rightarrow -15x + 6 = -15x - 40$$
$$\Rightarrow -15x + 15x = -40 - 6$$
$$\Rightarrow \quad 0 = -46$$
$$\therefore S = \{\ \}$$

Ecuación 7:

$$\mathbf{7x - (6x + 6) = 2x - (6 + x)}$$

Solución:

$$7x - (6x + 6) = 2x - (6 + x)$$
$$\Rightarrow 7x - 6x - 6 = 2x - 6 - x$$
$$\Rightarrow \quad x - 6 = x - 6$$
$$\Rightarrow \quad x - x = -6 + 6$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 0$$
$$\therefore S = \mathbb{R}$$

Ecuación 8:

$$\boldsymbol{\frac{x}{3} - 7 = \frac{-3}{2}}$$

Solución:

$$\frac{x}{3} - 7 = \frac{-3}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{x - 21}{3} = \frac{\mathbf{-3}}{2}$$
$$\Rightarrow 2(x - 21) = 3(-3)$$
$$\Rightarrow 2x - 42 = -9$$
$$\Rightarrow 2x = -9 + 42$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 33$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{33}{2}$$
$$\therefore S = \left\{\frac{33}{2}\right\}$$

Ecuación 9:

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{4x-4}=\frac{1}{5}}$$

Solución:
Primero, el denominador de la fracción debe ser diferente de 0, así

$$4x-4 \neq 0$$
$$4x \neq 4$$
$$x \neq \frac{4}{4}$$
$$x \neq 1$$

Entonces,

$$\frac{x-1}{4x-4}=\frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow \quad 5\cdot(x-1)=1\cdot(4x-4)$$
$$\Rightarrow \quad 5x-5=4x-4$$
$$\Rightarrow \quad 5x-4x=-4+5$$
$$\Rightarrow \quad x=1$$
$$\therefore S=\{\ \}$$

Anexo 6. Fichas bibliográficas para el análisis de documentos

a. *Ficha bibliográfica para el análisis de los Programas de Estudio de Educación Pública*

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Universidad Nacional de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Ficha bibliográfica para el análisis de los Programas de Estudio
de Matemática del Ministerio de Educación Pública</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción del documento</td></tr>
<tr><td>Mención del error</td><td>Interpretación del investigador</td></tr>
<tr><td>1.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td></td></tr>
<tr><td align="center">⋮</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Conclusiones del investigador</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

b. Ficha bibliográfica para el análisis de artículos

Universidad Nacional de Costa Rica ***Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*** ***Escuela de Matemática***	
Ficha bibliográfica para el análisis de artículos	
Título del artículo:	
Año de Publicación:	
Base de datos:	
Cita en APA 7:	
Resumen del artículo:	
Aspectos importantes para considerar dentro del contexto de mi investigación	

Los datos recolectados en las fichas bibliográficas los puede acceder en este enlace o a través del código QR

https://drive.google.com/drive/folders/1cifXtZ5yzTzHhL35o-9N9X41JPUErnCf?usp=drive_link

Anexo 7. Instrumento para la cuantificación de errores algebraicos manifestados por cada estudiante en el cuestionario *pre-test y post-test*, según la categorización determinada

Universidad Nacional de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática

A continuación, se presenta el instrumento que permitirá contabilizar los errores algebraicos que realice cada uno de los estudiantes participantes al resolver las ecuaciones planteadas en el cuestionario pre-test y post-test.

Tabla 9. *Instrumento para la cuantificación de los errores cometidos por los estudiantes al resolver el cuestionario pre-test y post-test según la categorización determinada*

Tipo de error manifestado por el estudiante NÚMERO												
Ítem	E1.1	E1.2	E1.3	E2.1	E2.2	E2.3	E3.1	E3.2	E3.3	PC	NR	Total
Ej_a												
Ej_b												
Ej_c												
Ej_d												
Ej_e												
Ej_f												
Ej_g												
Ej_h												
Ej_i												
Total												

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 8. Instrumento para la cuantificación de errores algebraicos manifestados por el grupo de estudiantes en el cuestionario *pre-test y* post-test según la categorización determinada

Universidad Nacional de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática

A continuación, se presenta el instrumento que permitirá contabilizar los errores algebraicos que el grupo de estudiantes al resolver las ecuaciones planteadas en el pre-test y post-test.

Tabla 10. *Instrumento para la cuantificación de los errores cometidos por el grupo de estudiantes al resolver el cuestionario pre-test y post-test según la categorización determinada*

	Tipo de error manifestado por el grupo de estudiantes											
Ítem	E1.1	E1.2	E1.3	E2.1	E2.2	E2.3	E3.1	E3.2	E3.3	PC	NR	Total
Ej_a												
Ej_b												
Ej_c												
Ej_d												
Ej_e												
Ej_f												
Ej_g												
Ej_h												
Ej_i												
Total												

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 9. Instrumento de validación del pre-test y post-test

Universidad Nacional de Costa Rica
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática

El uso de los errores matemáticos en la atención de dificultades y el reforzamiento del aprendizaje del tema ecuaciones de primer grado con una incógnita en undécimo año de educación secundaria en Costa Rica

Estimada evaluadora y estimado evaluador:

En el marco del proyecto *El uso de los errores matemáticos en la atención de dificultades y el reforzamiento del aprendizaje del tema ecuaciones de primer grado con una incógnita en undécimo año de educación secundaria en Costa Rica,* el cual corresponde a un Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática, se pretende como objetivo principal: *Elaborar una propuesta de enseñanza para la atención de dificultades y promoción del aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita tomando como base los errores matemáticos manifestados por un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria en Costa Rica.*

Para el logro del objetivo anterior se requiere clasificar los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria al resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Dicha información se recolectará mediante un cuestionario de preguntas abiertas (tipo prueba), que incluirán ecuaciones lineales con una incógnita para su resolución. Los conocimientos considerados para la resolución indicada son los propuestos por el Ministerio de Educación Pública.

Para la validación de dicho instrumento se contempla el juicio de expertos, incluidos docentes de secundaria, con un grado académico mínimo de bachillerato, que tengan conocimiento del PEM del MEP (2012), con más de cinco años de experiencia como docentes y que hayan impartido en al menos una ocasión los niveles de octavo y undécimo año. Sin más que mencionar, a continuación, se muestra primeramente el instrumento pre-test y post-test, y posteriormente el instrumento de validación.

Test diagnóstico de conocimientos previos en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita

La prueba se encuentra dividida en dos secciones. La primera sección corresponde a preguntas de información general. En la segunda sección encontrará nueve preguntas de desarrollo. En estas se le presentan ecuaciones lineales con una incógnita, las cuales deberá resolver o encontrar su conjunto solución. Es necesario que escriba todos los procedimientos que le permitan obtener la respuesta. Por favor, no borrar ninguno de estos.

Instrucciones generales

- Compruebe que la prueba brindada se encuentre completa.
- Inicie la prueba en el momento que se dé la orden.
- Lea cuidadosamente cada una de las preguntas antes de dar respuesta.
- Cuenta con 60 minutos para realizar el instrumento.
- Trabaje en forma clara y ordenada en cada uno de los instrumentos.
- Puede realizar la prueba con lápiz o lapicero de tinta azul o negra.
- De tener que realizar un ejercicio más de una vez por algún error que haya notado, no lo borre. Indique "no revisar" y realícelo en la hoja de borrador adjunta.
- Antes de entregar el instrumento, asegúrese de haber respondido todos los ítems.

I Parte

Nombre y apellidos: ____

Género:
( ) Hombre ( ) Mujer ( ) Prefiero no decirlo

Edad: ____________________

II Parte

Resuelva y brinde el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita.

a) $-4x = -24$
b) $7x - 21 = -32$
c) $\sqrt{2}x + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
d) $-27x + 21 = 28 - 4x$
e) $2y - (4y - 5) = 0$
f) $3 \cdot (-5x + 2) = -5 \cdot (3x + 8)$
g) $7x - (6x + 6) = 2x - (6 + x)$
h) $\frac{x}{3} - 7 = \frac{-3}{2}$
i) $\frac{x-1}{4x-4} = \frac{1}{5}$

Nota: En el instrumento que se les brindará a los estudiantes se dispondrá del espacio suficiente para el desarrollo de todos los procedimientos.

Instrumento de validación del pre-test y post-test

Nombre del evaluador: ____

Años de experiencia: ____

Ha impartido los niveles de: ***8° Sí:*** ___ ***No:*** ____ ***11° Sí:*** ____ ***No:*** ____

Instrucciones para completar el instrumento

En el siguiente instrumento se muestra cada uno de los ejercicios tomados en cuenta en el cuestionario *pre-test y post-test*. Para cada uno escriba una equis "X" en el espacio según la siguiente escala:

1. No es pertinente, excluir del instrumento.
2. Parcialmente pertinente, mantener en el instrumento, pero con modificaciones.
3. Totalmente pertinente, incluir en el instrumento sin modificaciones.

Indique si el ejercicio es adecuado o no para los conocimientos que poseen los estudiantes de undécimo año. Además, para cada uno de los ejercicios puede realizar observaciones puntuales y/o sugerencias de forma general.

Ejercicio propuesto	**Valoración del ejercicio**			**El ejercicio es adecuado para los conocimientos que posee un estudiante de undécimo**		**Observaciones**
	1	**2**	**3**	**Sí**	**No**	
$-4x = -24$						
$7x - 21 = -32$						
$\sqrt{2}x + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$						
$-27x + 21 = 28 - 4x$						
$2y – (4y - 5) = 0$						
$3 \cdot (-5x + 2) = -5 \cdot (3x + 8)$						
$7x - (6x + 6) = 2x - (6 + x)$						

Ejercicio propuesto	Valoración del ejercicio			El ejercicio es adecuado para los conocimientos que posee un estudiante de undécimo		Observaciones
	1	2	3	Sí	No	
$\frac{x}{3} - 7 = \frac{-3}{2}$						
$\frac{x-1}{4x-4} = \frac{1}{5}$						
Observaciones generales y sugerencias						

Muchas gracias por su colaboración.

Anexo 10. Respuestas de los instrumentos de validación del pre-test y post-test

Las respuestas obtenidas en el proceso de validación se puedan consultar en el siguiente enlace:
https://drive.google.com/drive/folders/1MgNavqCoOg5B5FuOsdWCMi44YmsMXH-4?usp=sharing

o bien, utilizando el código QR

Anexo 11. Carta al Comité de Evaluación del Liceo de Heredia

Heredia, Costa Rica
24 de mayo de 2022

Estimado Departamento de Coordinación Académica Liceo de Heredia:

Mi nombre es Dennis Josué Sequeira Lizano. Soy estudiante actual de Licenciatura en la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional. En este momento estoy llevando a cabo una investigación como parte del Trabajo Final de Graduación, el cual tiene como título: *El uso de los errores matemáticos en la atención de dificultades y el reforzamiento del aprendizaje del tema ecuaciones de primer grado con una incógnita en undécimo año de educación secundaria en Costa Rica*, cuyo objetivo principal es Elaborar una propuesta de enseñanza para la atención de dificultades y promoción del aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita tomando como base los errores matemáticos manifestados por un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria en Costa Rica, debido a que en algunas investigaciones se reporta que los estudiantes que ingresan a las universidades presentan dificultades en habilidades y conocimientos algebraicos que se desarrollan en educación secundaria, siendo ideal trabajar con estudiantes de undécimo año, por ser este el nivel previo a la educación superior.

Para esto es primordial establecer contacto con un grupo de undécimo año para poder desarrollar la investigación. Para eso se cuenta con el visto bueno del señor director M.Sc. Oscar Morales Quesada y la disposición de la profesora Yessennia Chacón Sanabria, quien ha aceptado que dicha investigación se realice en uno de los grupos a su cargo.

Dicha investigación se realizará en varias etapas, por lo que se requerirá el ingreso a la institución en más de una ocasión para los procesos de recolección de información.

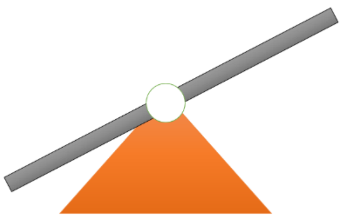
Sin más por el momento y agradeciendo toda la ayuda que me puedan brindar, se despide

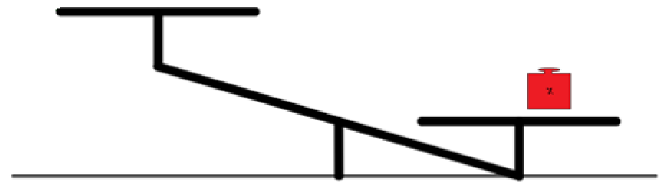
____________________________________.

Dennis Josué Sequeira Lizano
Correo: dennis.sequeira.lizano@est.una.ac.cr

Los documentos firmados y sellados los puede consultar en el siguiente código QR

Anexo 12. Actividad 1 de la propuesta de enseñanza: *A poner en equilibrio la balanza*





Con el juego *A poner en equilibrio la balanza* se pretende que los estudiantes logren identificar los errores de una ecuación lineal ya resuelta e ilustrada mediante una balanza, que muestre dónde pierde su equilibrio al realizar un movimiento erróneo. Para eso, los estudiantes utilizarán el método de balanza para resolver ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. Esto consiste en aplicar una misma operación algebraica a ambos lados de la igualdad, para que esta no pierda su equivalencia o mantenga su equilibrio. Luego, reducir los términos semejantes a ambos lados de la igualdad, obteniendo ecuaciones equivalentes, logrando con la repetición de este proceso resolver la ecuación propuesta al obtener el valor numérico que representa la solución de dicho objeto matemático.

Por su parte, esta se encuentra dividida en tres niveles de complejidad, donde se contemplan las operaciones aritméticas en los diferentes conjuntos estudiados en secundaria, donde los materiales suministrados por el docente son indispensables, además de las reglas que permitirán relacionar el juego *A poner en equilibrio la balanza* con cada uno de los procesos que se realizan para resolver una ecuación lineal con una incógnita.

Objetivo de la actividad: Identificar los errores realizados al resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando el método de balanza.

Contenidos abarcados: Dentro de los ejercicios de la actividad se consideran ecuaciones que posean la solución vacía o infinita y cuya estructura matemática sea:

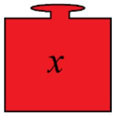
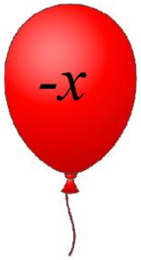
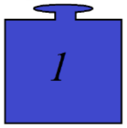
- $ax = c$
- $ax + b = c$
- $ax + b = cx + d$
- $ax \pm (cx \pm b) = d$
- $a(bx \pm c) = d(ex \pm f)$
- $ax \pm (bx \pm c) = dx \pm (ex \pm f)$
- $\frac{x}{c} \pm a = \frac{b}{d}$

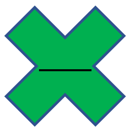
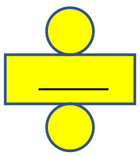
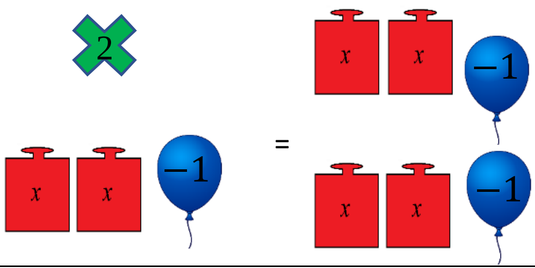
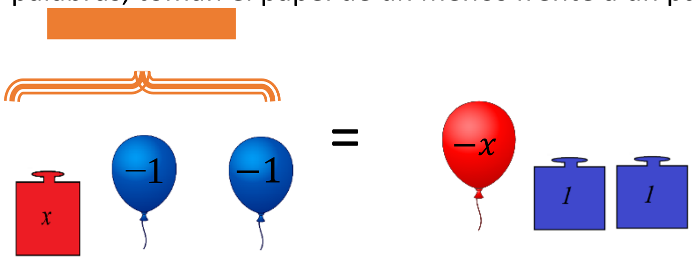
Recursos: Lápiz, lapicero, calculadora científica y el material brindado por el investigador

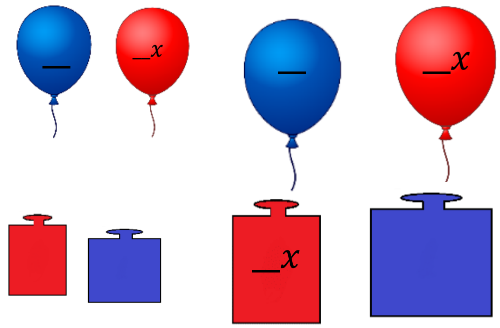
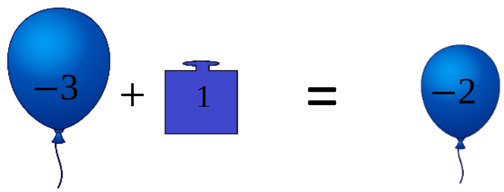
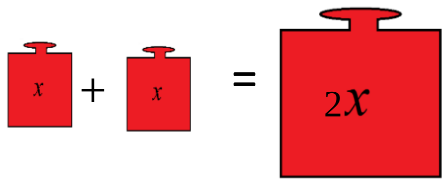
Tiempo aproximado: 2 lecciones (80 minutos)

Fichas de la balanza y su significado

En una balanza se colocan objetos con las siguientes características:

Figura	Significado
	Un peso desconocido, del cual se quiere averiguar sin dejar que la balanza pierda su equilibrio.
	Un globo, que representa una fuerza de la misma magnitud, pero en sentido opuesto de peso anteriormente descrito. Es decir, este globo puede levantar un peso de magnitud x.
	Peso equivalente a una unidad en cualquier unidad de medida de peso.

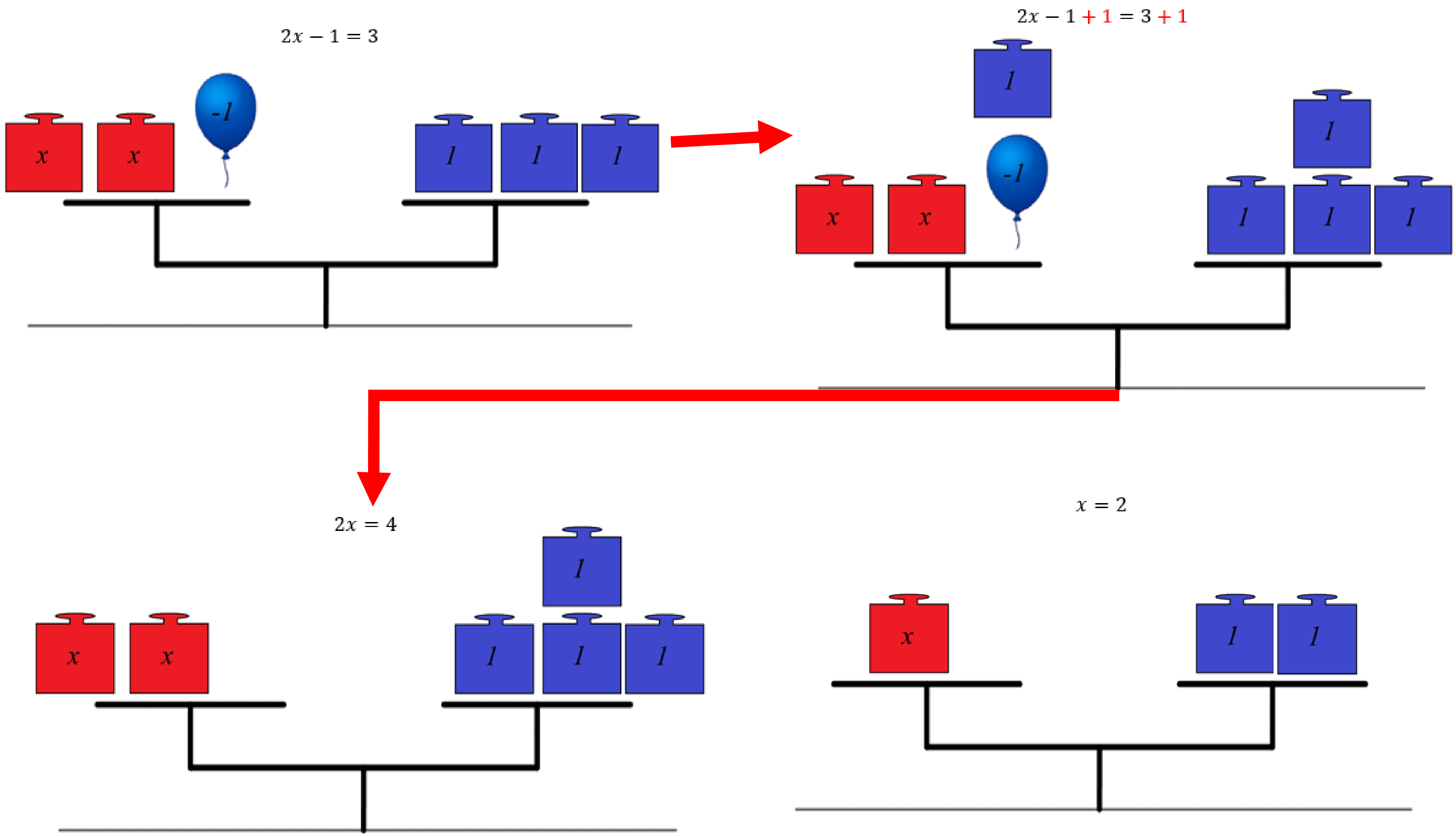
	Un globo, que representa una fuerza de magnitud 1 opuesto de peso descrito anteriormente. Es decir, dicho globo es capaz de levantar un peso de una unidad.
 	Multiplican y dividen la cantidad de fichas de todo el lado de la igualdad donde se encuentre, según la cantidad que se indique dentro del símbolo. 
	Esta ficha permite cambiar que se encuentran bajo la llave por figuras opuestas. En otras palabras, toman el papel de un menos frente a un paréntesis. 

	**Fichas especiales** Dentro de las fichas del juego se tendrán globos y pesas de ambos colores y de diferentes tamaños. Estos servirán para poder escribir cualquier peso a cada una de las fichas. También se pueden cambiar varias figuras pequeñas de un mismo color por una grande, sumando los valores que ellas contengan.
	

Instrucciones generales del juego

Para resolver y encontrar el valor del peso desconocido se requiere quitar la mayor cantidad de elementos de la balanza, hasta que solo quede en un lado un elemento de peso *"x"*, esto sin perder el equilibrio de la balanza en ningún momento y siguiendo las siguientes reglas:

a. Se debe obtener solo elementos de x en uno de los lados de la balanza.
b. Para quitar un elemento de la balanza se debe colocar un peso opuesto, pero en ambos lados de la balanza.
c. Solamente se pueden eliminar pesos semejantes. Esto se puede apreciar con el color de las figuras. Un peso de color rojo solo puede ser levantado por un globo de color rojo. Por ejemplo:


$2x - 1 = 3$
x
x
-1
1
1
1
$2x - 1 + 1 = 3 + 1$
1
x
x
-1
1
1
1
1
$2x = 4$
x
x
1
1
1
1
$x = 2$
x
1
1

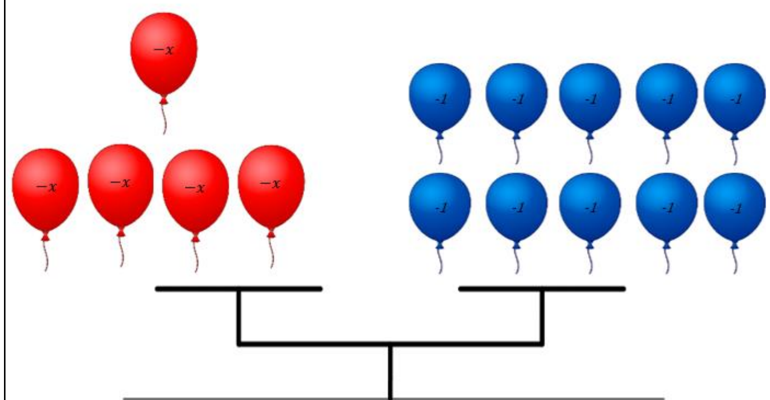
Nombre del estudiante: ____.

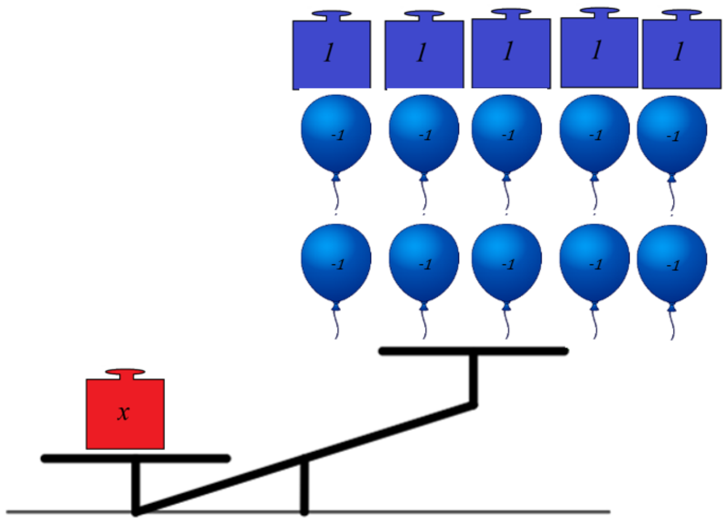
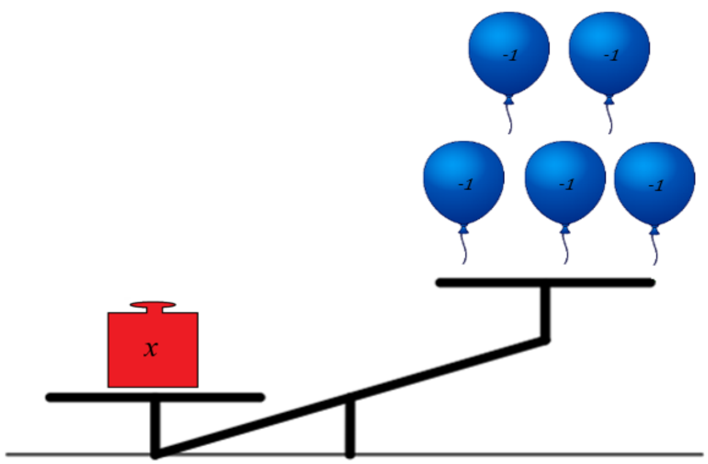
Instrucciones para el desarrollo de la actividad

A continuación, se muestra una serie de imágenes que representan la solución de una ecuación, aplicando el método de la balanza. Sin embargo, en algunos de los pasos se cometen errores, los cuales hacen que la balanza pierda su equilibrio. Con ayuda del material manipulable, resuelva la ecuación con el método de la balanza y escriba la ecuación correctamente. En el espacio en blanco explique cuál fue el error que hizo que la balanza perdiera el balance correcto.

- ✓ En el nivel 1 solamente se trabajará con fichas de valor una unidad para lograr un mejor entendimiento del juego.
- ✓ Para el nivel 2 se requerirá el uso de las fichas especiales con las que podrá multiplicar o dividir las figuras, cambiar una figura por su ficha opuesta y unir en una sola ficha varias de un mismo color, mediante la suma de los valores que tengan escritos.
- ✓ Por último, en el nivel 3 se trabajarán dos ecuaciones con coeficientes fraccionarios o coeficientes irracionales, por lo que es de prioridad el uso fichas especiales para lograr determinar cuál es la solución buscada.

Nivel 1

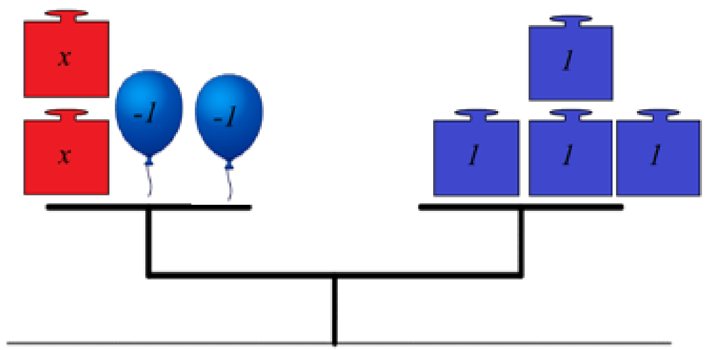
Solución errónea	*Representación en la balanza*	*Espacio para corrección*
Ejercicio 1 $-5x = -10$		

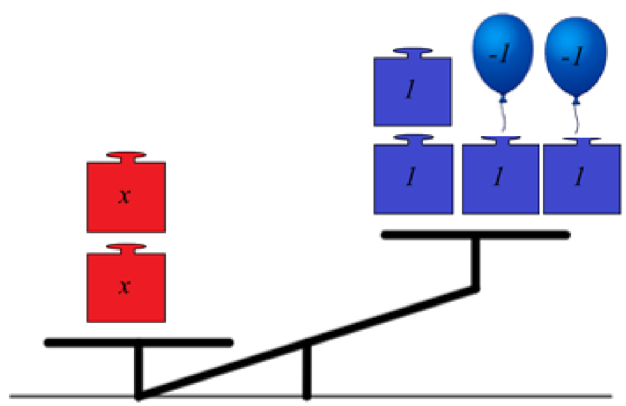
$x = -10 + 5$		
$x = -5$ $\therefore S = \{5\}$		

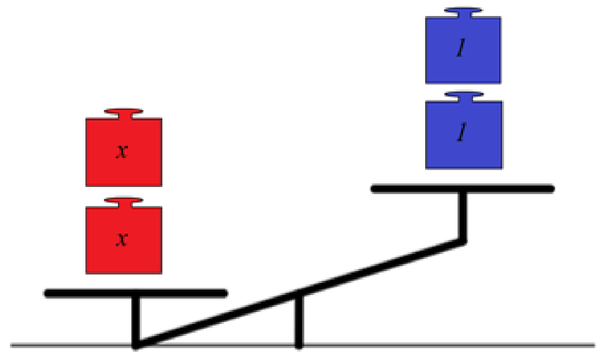
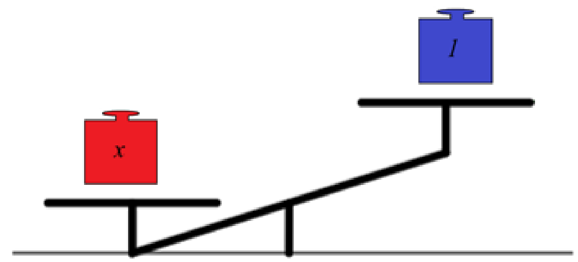
<table>
<tr><th>Solución errónea</th><th>Representación en la balanza</th><th>Espacio para corrección</th></tr>
<tr><td>Nivel 1

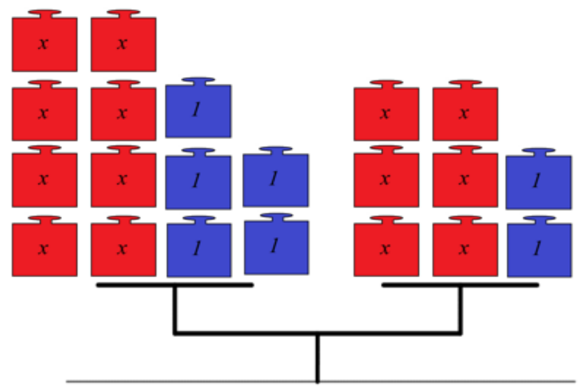
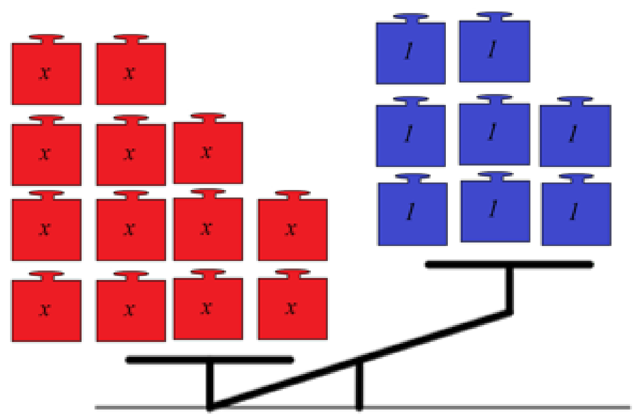
Ejercicio 2

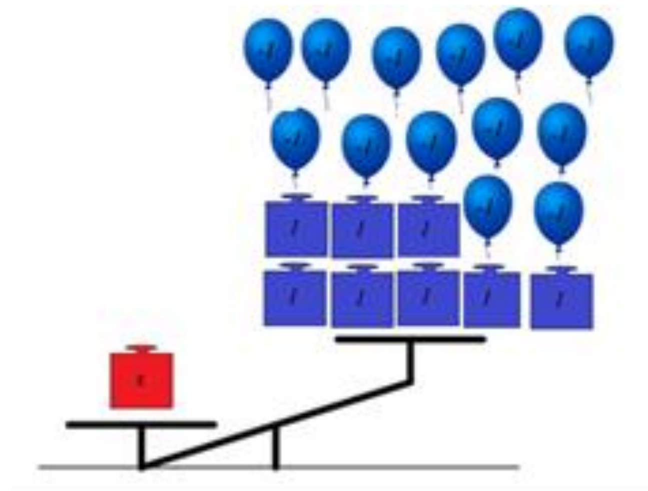
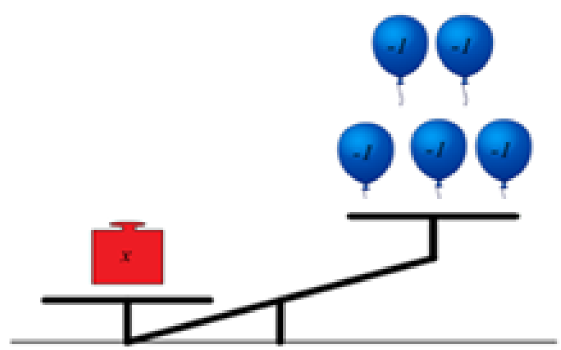
$2x - 2 = 4$

$\Longrightarrow 2x = 4 - 2$</td><td>

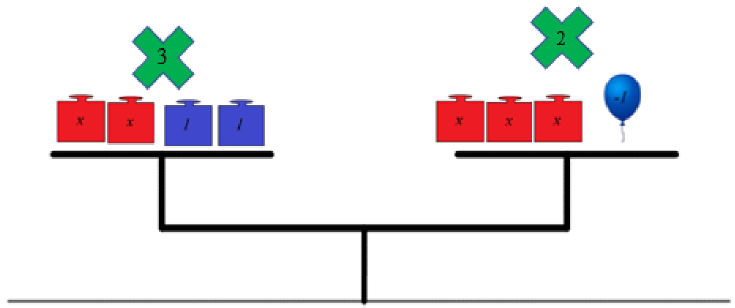

</td><td></td></tr>
</table>

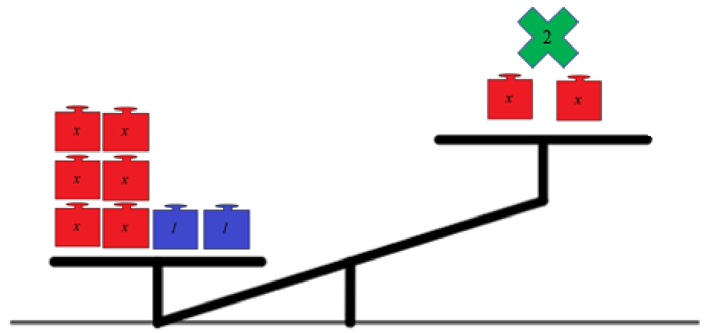
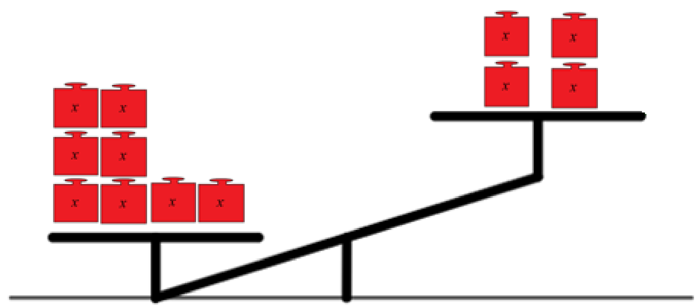
$\Longrightarrow 2x = 2$ $\Longrightarrow x = 1$ $\therefore S = \{1\}$	 	

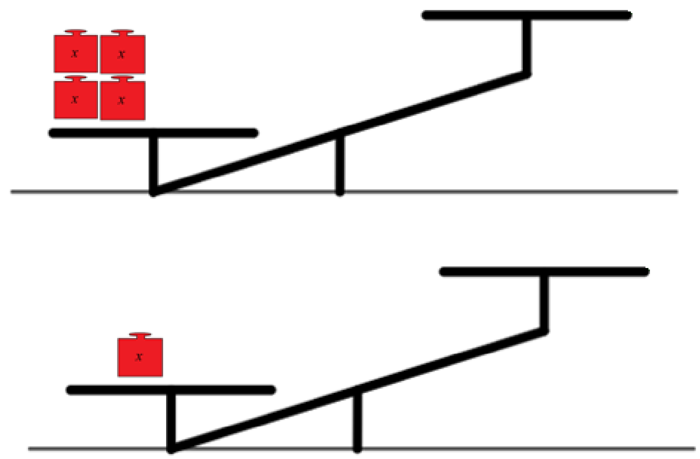
Solución errónea	***Representación en la balanza***	***Espacio para corrección***
Nivel 1 **Ejercicio 3** $8x + 5 = 6x + 2$ $\Longrightarrow 13x = 8$	 	

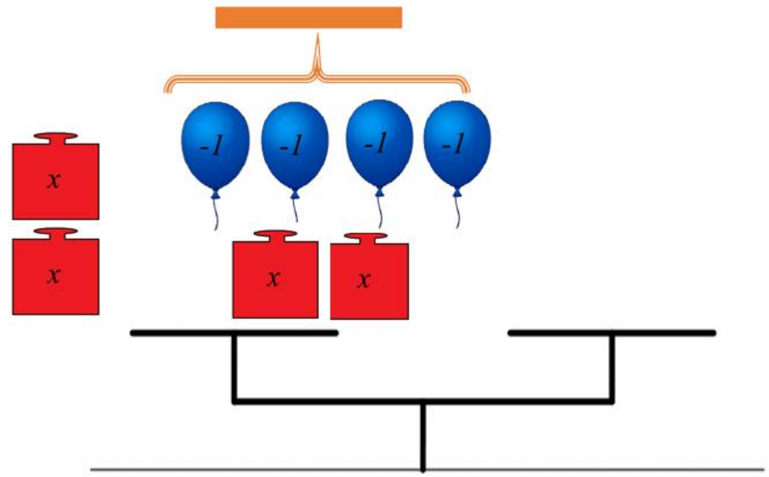
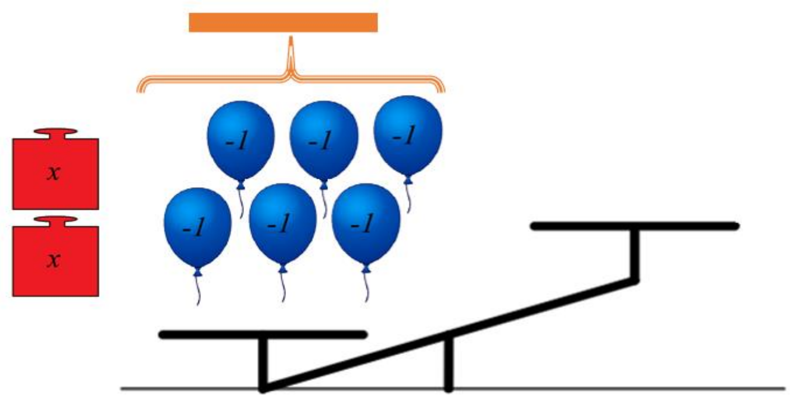
$\Longrightarrow x = 8 - 13$ $\Longrightarrow x = -5$ $\therefore S = \{-5\}$	 	

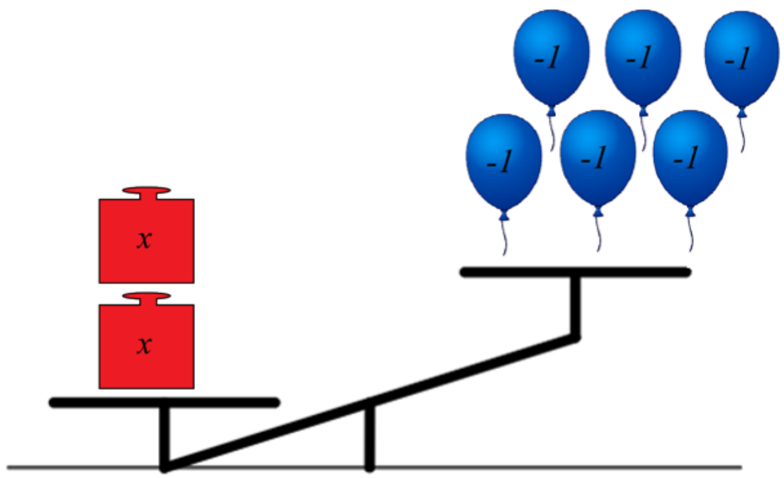
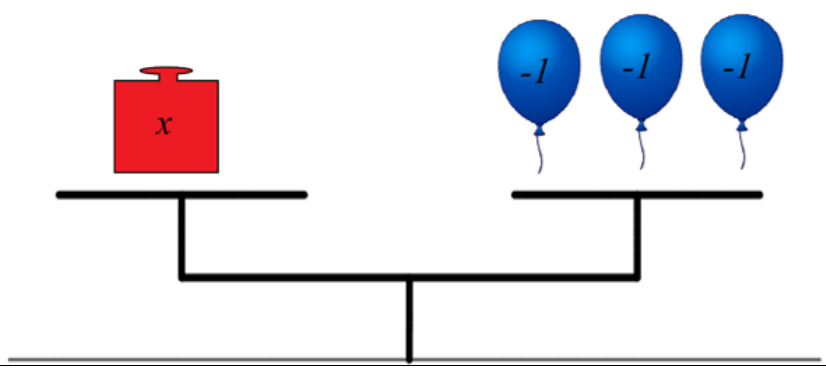
Nivel 2

Solución errónea	***Representación en la balanza***	***Espacio para corrección***
Ejercicio 1 $3 \cdot (2x + 2) = 2 \cdot (3x - 1)$ $\Rightarrow 6x + 2 = 2 \cdot (2x)$		

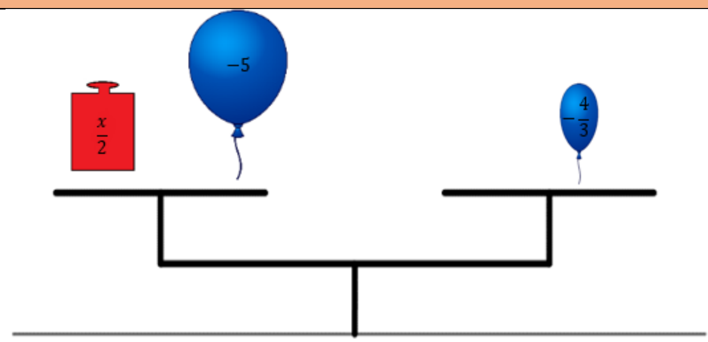
		
$\Rightarrow\ 8x = 4x$ $\Rightarrow\ 4x = 0$		

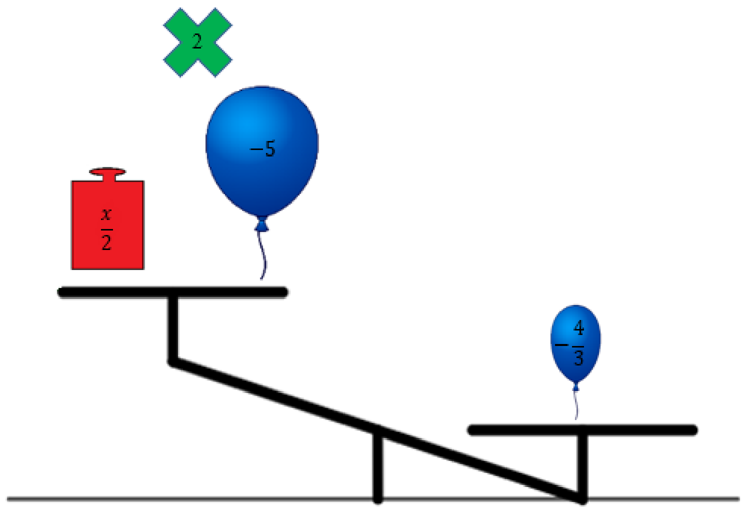
$\Rightarrow \ x = 0$ $\therefore S = \{0\}$		

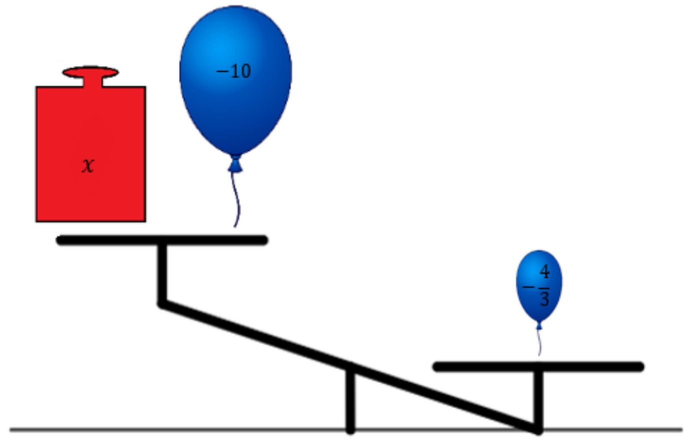
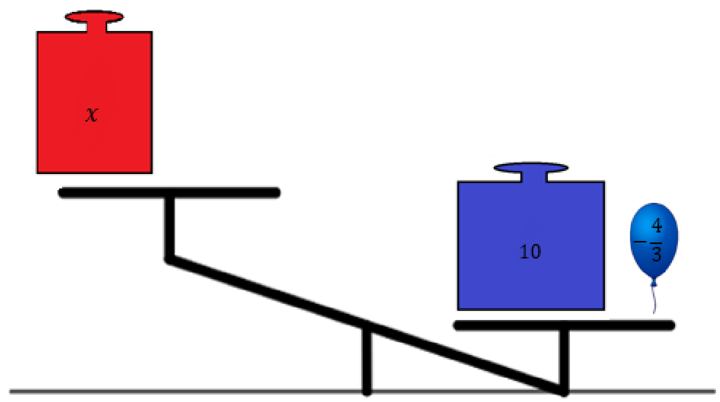
Solución errónea	***Representación en la balanza***	***Espacio para corrección***
Ejercicio 2 $2x-(-4+2x)=0$		
$2x-(-6)=0$		

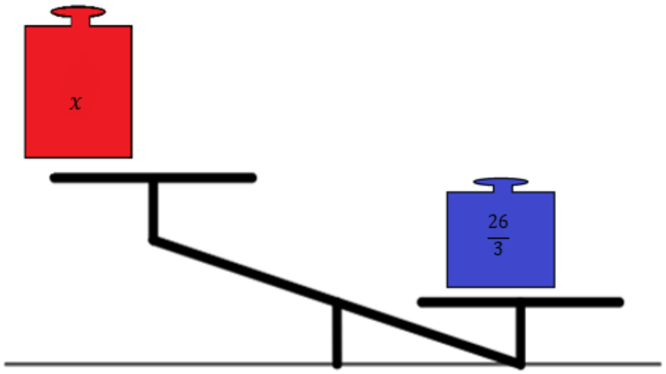
$2x = -6$		
$x = -3$ $\therefore S = \{-3\}$		

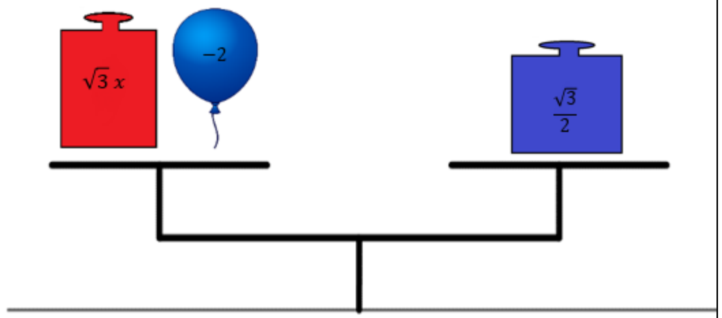
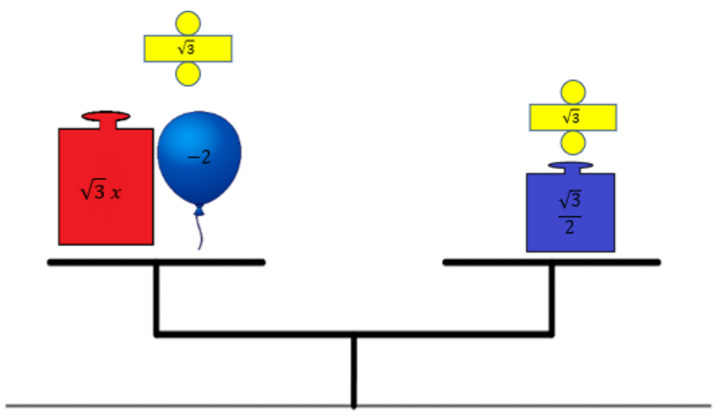
Nivel 3

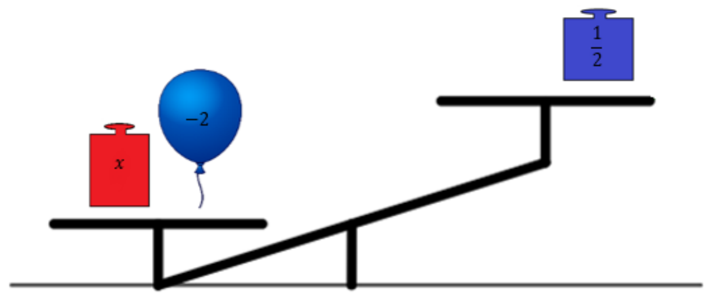
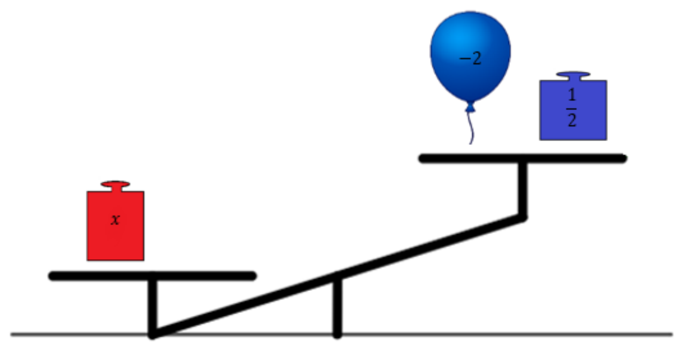
Solución errónea	***Representación en la balanza***	***Espacio para corrección***
Ejercicio 1 $$\frac{x}{2} - 5 = \frac{-4}{3}$$ $$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{x}{2} - 5\right) = \frac{-4}{3}$$		

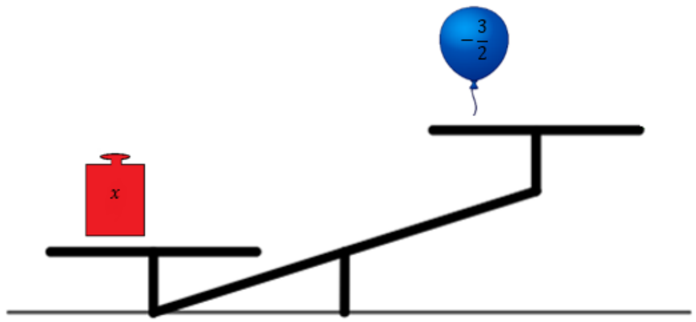
<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow\ \boldsymbol{x - 10 = \frac{-4}{3}}$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

$\Rightarrow x = \dfrac{-4}{3} + 10$	 	

$\Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{26}{3}}$ $\therefore S = \left\{\frac{26}{3}\right\}$		

<table>
<tr><th>Solución errónea</th><th>Representación en la balanza</th><th>Espacio para corrección</th></tr>
<tr><td>Ejercicio 2
$$\sqrt{3}\cdot x-2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow (\sqrt{3}\cdot x-2)\div\sqrt{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\div\sqrt{3}$$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

$\Rightarrow x - 2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2} - 2$	 	

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ $\therefore S = \{-3\}$		

Anexo 13. Actividad 2 de la propuesta de enseñanza: *En búsqueda del error*

Esta actividad consiste en que el docente, a través de fichas, presente varias ecuaciones con su respectiva solución. Sin embargo, en algunos casos la solución puede tener algunos errores. Estas fichas serán distribuidas por todo el salón de clases y los estudiantes deben buscar cuáles son aquellas ecuaciones que poseen error en su solución. Asimismo, determinar cuáles son los procedimientos que se realizan de forma errónea y por qué estos no son correctos.

Objetivo de la actividad: Fortalecer la comprensión del proceso de resolución de ecuaciones racionales algebraicas con una incógnita y su respectivo conjunto solución.

Contenidos abarcados: Ecuaciones lineales del tipo:

$$\frac{ax \pm b}{cx \pm d} = \frac{e}{f}$$

Materiales requeridos por el estudiante: Lápiz, lapicero, calculadora, goma y el material brindado por el investigador

Tiempo aproximado: 1 lección de 40 minutos

Instrucciones generales

1. En grupos de dos personas, busque e identifique entre las ecuaciones distribuidas en el aula dos ecuaciones que posean errores en su solución.
2. Pegue cada una de las ecuaciones encontradas dentro del espacio asignado en las siguientes páginas.
3. De forma colaborativa con su compañero, realice la solución correcta del ejercicio e identifique cuál o cuáles procedimientos de la solución se encuentran erróneos.
4. En el espacio de comentarios y anotaciones, escriba cuáles han sido los errores que ha identificado y comente por qué se considera un error dicho procedimiento.

Ecuación con solución errónea	Solución correcta de la ecuación	Comentarios y anotaciones
Espacio para ecuación 1		
Espacio para ecuación 2		

Estas fichas se deben recortar y pegar sobre un material firme.

$$\frac{6x+3}{x} = \frac{1}{4}$$

Solución: Primero hay que determinar el valor que restringe el denominador

$$x \neq 0$$

Así,

$$\Longrightarrow 4 \cdot (6x+3) = x$$

$$\Longrightarrow 24x + 3 = x$$

$$\Longrightarrow 24x - x = 3$$

$$\Longrightarrow 23x = 3$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3}{23}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{3}{23}\right\}$$

$$\frac{5x-7}{2x-1} = \frac{2}{5}$$

Solución: Primero hay que determinar el valor que restringe el denominador

$$2x - 1 \neq 0$$

$$\Longrightarrow 2x \neq 1$$

$$\Longrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

Así,

$$5 \cdot (5x-7) = 2 \cdot (2x-1)$$

$$25x - 7 = 4x - 2$$

$$18x = 2$$

$$x = \frac{2}{18}$$

$x = 1/9$, cómo $x \neq \frac{1}{2}$

$$\therefore S = \left\{\frac{1}{9}\right\}$$

$$\frac{3x+1}{5x-1} = \frac{5}{6}$$

Solución:

Primero hay que determinar el valor que restringe el denominador

$$5x - 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow 5x \neq 1$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{1}{5}$$

Así,

$$6 \cdot (3x+1) = 5 \cdot (5x-1)$$

$$18x + 6 = 25x - 5$$

$$18x - 25x = -5 - 6$$

$$-7x = -11$$

$$x = \frac{11}{7}$$

$$\therefore S = \left\{-\frac{1}{8}\right\}$$

$$\frac{3x-2}{x}=\frac{1}{2}$$

Solución: Primero hay que determinar el valor que restringe el denominador $x \neq 0$

Así,

$$\Longrightarrow 2 \cdot (3x-2) = x$$

$$\Longrightarrow 6x - 4 = x$$

$$\Longrightarrow 6x - x = 4$$

$$\Longrightarrow 5x = 4$$

$$\Longrightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$$

$$\frac{3x-3}{2x-2}=\frac{1}{4}$$

Solución: Primero hay que determinar el valor que restringe el denominador

$$2x - 2 \neq 0$$

$$\Longrightarrow 2x \neq 2$$

$$\Longrightarrow x \neq 1$$

Así,

$$4 \cdot (3x-3) = 1 \cdot (2x-2)$$

$$12x - 12 = 2x - 2$$

$$12x - 2x = -2 + 12$$

$$10x = 10$$

$$x = 1, \text{cómo } x \neq 1$$

$$\therefore S = \{\ \}$$

$$\frac{7x-3}{3x-6}=\frac{1}{3}$$

Solución: Primero hay que determinar el valor que restringe el denominador

$$3x - 6 \neq 0$$

$$\Longrightarrow 3x \neq 6$$

$$\Longrightarrow x \neq 2$$

Así,

$$3 \cdot (7x-3) = 1 \cdot (3x-6)$$

$$21x - 9 = 3x - 6$$

$$21x - 3x = -6 + 9$$

$$18x = 3$$

$$x = \frac{1}{6}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$$

$$\frac{3x+2}{2x}=\frac{1}{5}$$

Solución: Primero hay que determinar el valor que restringe el denominador

$$2x \neq 0$$

$$\Longrightarrow x \neq 0$$

Así,

$$5 \cdot (3x+2) = 1 \cdot (2x)$$

$$15x + 10 = 2x$$

$$15x - 2x = -10$$

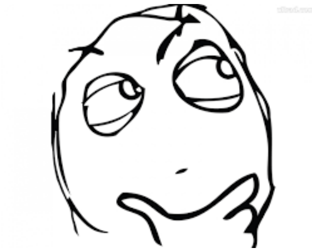
$$13x = -10$$

$$x = \frac{-10}{13}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{-10}{13}\right\}$$

Anexo 14. Actividad 3 de la propuesta de enseñanza: *¿De los errores se aprende?*

En diversas situaciones cotidianas es muy común escuchar la frase "de los errores se aprende". Sin embargo, esto se logra únicamente si analizamos esos errores que estamos cometiendo. Invertir tiempo en reflexionar sobre lo que hacemos incorrectamente y los errores que generamos nos permite identificar nuestros potenciales y debilidades, con un propósito de mejora continua, aumentando así nuestro aprendizaje.



Objetivo de la actividad: Estimular la reflexión y metacognición sobre cómo los errores pueden fortalecer el conocimiento matemático mediante actividades como *A poner en equilibrio la balanza y En busca del error*.

Materiales requeridos por el estudiante: Lápiz o lapicero y el material brindado por el investigador

Duración: 1 lección (40 minutos)

Instrucciones generales

Con sus propias palabras, escriba una pequeña reflexión acerca de lo aprendido en la actividad *A poner en equilibrio la balanza* y *En busca del error*. En ella escriba acerca de los procedimientos matemáticos que realizó para resolver la ecuación, usando la balanza (el orden que siguió, las operaciones matemáticas que realizó en la ecuación según los movimientos permitidos en el juego, la forma de escritura de cada paso y el conjunto solución, entre otros) y cómo la revisión de ejercicios con errores pudo ayudarle a comprender mejor el procedimiento a realizar para resolver una ecuación lineal con una incógnita.

Anexo 15. Instrumento de validación de la propuesta

Nombre del evaluador: ____

El objetivo de este instrumento es recopilar información importante por parte de los evaluadores sobre la propuesta elaborada que involucra *el uso de los errores matemáticos en la atención de dificultades y el reforzamiento del aprendizaje del tema ecuaciones de primer grado con una incógnita en undécimo año de educación secundaria.*

En esta investigación es de gran importancia su opinión, por lo que se le solicita completar este instrumento con total responsabilidad. También, es importante mencionar que toda la información obtenida en este instrumento es totalmente confidencial y únicamente con propósitos investigativos.

Instrucciones para completar el instrumento

Para cada una de las actividades complete la tabla adjunta de acuerdo con su criterio personal, escribiendo una equis (x) en la casilla que crea adecuada.

Actividad 1. *A poner en equilibrio la balanza*

Actividad 2. *En búsqueda del error*

Actividad 3. *¿De los errores se aprende?*

N°	Criterio	De acuerdo	En desacuerdo	Observaciones
1.	La propuesta didáctica causa una buena impresión a simple vista.			
2.	El diseño de esta propuesta didáctica es adecuado.			
3.	Los objetivos de la propuesta están acordes con lo abarcado en cada una de las actividades.			
4.	Las instrucciones de las actividades son claras y entendibles.			
5.	Los ejercicios abarcados en la propuesta están acordes con los conocimientos de un estudiante de undécimo año.			
6.	El tiempo establecido para el desarrollo de cada actividad se considera adecuado.			
7.	Se contempla de forma correcta la inclusión de los errores en la propuesta.			
Otros aspectos por destacar:				

A partir de los criterios, la actividad de la propuesta es:

( ) Aplicable ( ) Aplicable con modificaciones ( ) No aplicable

Nombre y firma del evaluador: ____

Anexo 16. Guía de entrevista a profundidad

Guía para la entrevista

Introducción

Presentación, bienvenida y explicación del proyecto:

Buenas tardes a todos, mi nombre es Dennis Sequeira Lizano y estoy desarrollando un proyecto titulado "El uso de los errores matemáticos en la atención de dificultades y el refuezo del aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita en undécimo año de educación secundaria en Costa Rica". Este proyecto consta de varias etapas en las que los estudiantes de este grupo han participado, como la aplicación de una prueba diagnóstica (pre–test), el desarrollo de la propuesta didáctica basada en los errores encontrados en el pre–test y la aplicación de la misma prueba después del desarrollo de la propuesta didáctica (post-test).

Por su parte, el último objetivo de esta investigación consiste en determinar el impacto de las actividades diseñadas en el aprendizaje del tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita basándose en los errores matemáticos de un grupo de estudiantes de undécimo año de educación secundaria. Esto se logrará mediante la revisión y comparación de los resultados obtenidos en las pruebas diagnósticas realizadas, así como a través de la opinión de cada uno de los estudiantes participantes entrevistados.

¡Desde este momento, se le agradece rotundamente por su colaboración y disposición para participar en este espacio!

Contrato verbal (Aceptación de la grabación):

Antes de iniciar dicha entrevista, es de gran importancia mencionar que esta reunión está siendo grabada en audio y video con la intención de realizar un análisis detallado de todo lo que se converse aquí. Lo anterior se debe a que tomar notas de todo lo que se menciona en la reunión es un proceso complejo, el cual se puede simplificar con una revisión posterior de una grabación de la conversación. Asimismo, toda la información recopilada es únicamente con fines investigativos y la identidad de cada participante es completamente anónima.

Por último, la dinámica a seguir para el desarrollo de este grupo focal consiste en lo siguiente: El investigador será quien abra cada uno de los temas de conversación.

Preguntas de inicio

1. *¿Pueden presentarse y decirnos un poco sobre ustedes?*
2. *¿En alguna ocasión durante su periodo de estudiante habían trabajado la identificación y uso de errores en la resolución de ecuaciones lineales o algún otro tema en secundaria?*

3. *¿Habían utilizado alguna vez los errores de los estudiantes como punto de partida para una propuesta de enseñanza?*
4. *¿Qué les parece esta iniciativa?*

Preguntas centrales

1. *¿Cuál es su opinión sobre el uso de errores en la enseñanza de ecuaciones lineales?*
2. *¿Qué les pareció la actividad "Poner en equilibrio la balanza"?*
3. *¿Cómo les ayudó la actividad "En busca del error" y el uso de materiales manipulables en la identificación y corrección de errores de ecuaciones lineales?*
4. *¿Qué dificultades encontraron durante el desarrollo de la actividad?*
5. *¿Cómo fue su proceso de aprendizaje durante la actividad?*
6. *¿Creen que el uso de materiales manipulables puede ayudar a mejorar el aprendizaje de ecuaciones lineales? ¿Por qué?*
7. *¿Cómo fue su experiencia con la actividad "¿De los errores se aprende?"?*
8. *¿Qué recomendaciones tienen para mejorar la implementación de esta propuesta de enseñanza?*
9. *¿Qué impacto deja la propuesta en su aprendizaje?*

Preguntas finales

1. *¿Hay algo más que quisieran agregar?*
2. *¿Creen que estas actividades pueden ser aplicadas a otros temas o asignaturas?*
3. *¿Consideran que hay algún aspecto importante que no hayamos mencionado?*

Clausura y agradecimientos.

Se agradece su grata colaboración. Su ayuda durante todo este proceso ha sido de gran importancia para desarrollar este proyecto de forma exitosa.

Mis más rotundos agradecimientos y los mejores deseos para cada uno de ustedes, sin ustedes no hubiera sido posible el desarrollo de este proyecto.

Los datos recolectados en la entrevista los puede acceder en este enlace o a través del código QR

https://drive.google.com/drive/folders/11jGDEUTHDE95TrLuV3jYI5BOpjvNGJPP?usp=drive_link