Universidad Nacional

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

El Aprendizaje Basado en Proyectos como propuesta de enseñanza del tema de funciones de varias variables a estudiantes de la carrera Bachillerato en Economía

Trabajo Final de Graduación sometido a consideración del Tribunal como requisito parcial para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática en la modalidad de ***proyecto de graduación***.

Estudiante

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Comité Asesor:

M. Sc. Jeremías Ramírez Jiménez (Tutor)

Dr. Byron Jiménez Oviedo (Asesor)

M. Sc. Christian Páez Páez (Asesor)

Campus Omar Dengo

Heredia, Costa Rica

Fecha (26/06/2024)

Este trabajo final de graduación ha sido aceptado y aprobado por el Tribunal Examinador de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, como requisito parcial para optar al grado de Licenciatura de la Enseñanza de las Matemáticas.

M.Sc. Jesennia Chavarría Vásquez
Representante del Decano Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Romi L.F.

Dr. José Romilio Loría Fernández
Representante de la Dirección Escuela de Matemáticas

Jeremías Ramírez J.

M.Sc. Jeremías Ramírez Jiménez
Tutor

Dr. Byron Jiménez Oviedo
Asesor

M.Sc. Christian Páez Páez **Asesor**

Valeria Mesén Brenes

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes
Estudiante

Índice de contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo I: Introducción

En este capítulo se expone el planteamiento del problema del estudio, y algunas evidencias sobre el estado actual de la investigación en la temática.

1.1. Planteamiento del problema

A continuación, se expone el planteamiento del problema del presente estudio. De este modo, se divide esta sección en los apartados: tema, problema de investigación, justificación y objetivos.

1.1.1. Tema

Diseño de una propuesta para la enseñanza del tema funciones de varias variables mediante el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) en el curso MAT050 Cálculo II para Economía de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA), Sede Central – Campus Omar Dengo.

1.1.2. Problema de investigación

¿Cómo implementar el ABP para la enseñanza del tema funciones de varias variables en el curso MAT050 Cálculo II del plan de formación de la carrera Bachillerato en Economía?

1.1.3. Justificación

A partir de los datos recolectados en las actas de calificaciones elaboradas por la Escuela de Matemática (2018, 2019a, 2019b) de la UNA, en los períodos II ciclo 2018, I ciclo 2019 y II ciclo 2019, solo 46,1% de la población matriculada en el curso MAT003 Cálculo II logró aprobar la asignatura. De igual manera se pueden apreciar condiciones similares en otros cursos de servicio que esta unidad académica ofrece a la comunidad estudiantil. Por ejemplo, en las asignaturas MAT001 Matemática General y MAT002 Cálculo I los porcentajes de aprobación en el mismo período corresponden a 35,7% y 38,1% respectivamente. Por consiguiente, es posible establecer que los cursos de matemática universitarios suelen caracterizarse por un bajo rendimiento académico.

Estos altos índices de reprobación y el bajo rendimiento estudiantil se relacionan con el aumento de la desmotivación escolar. Pues, tal como lo señalan Afzal et al. (2010), el estudiantado logra mantenerse motivado en los procesos de enseñanza-aprendizaje cuando alcanza un buen desempeño académico, y viceversa. En otras palabras, hay una correlación entre el rendimiento estudiantil y la motivación. De modo que se podría tomar ventaja del papel que juega la motivación para mejorar la situación mencionada en el párrafo anterior.

Por otro lado, en la asignatura MAT003 Cálculo II, según el programa de este curso se tiene como finalidad que la población consiga utilizar los conocimientos estudiados en su respectiva área profesional (Escuela de Matemática, 2021b). Sin embargo, únicamente 11,8% de los objetivos específicos de la asignatura hacen referencia a problemas de aplicación, y es con base en estos que se determina el abordaje de los contenidos en las clases. Es decir, existe una vaga relación entre el propósito del curso y la metodología establecida para el mismo.

Al respecto, Castillo et al. (2018) señalan que la universidad debería garantizar las condiciones necesarias para que las personas logren cursar con éxito las asignaturas, esto es, analizar las acciones que se requieran realizar a fin de asegurar su aprendizaje. En tal sentido, durante el II ciclo del año 2021 se aprobó la creación del curso MAT050 Cálculo II para Economía, dada la petición de la Escuela de Economía de realizar modificaciones en la programación de la asignatura MAT003 Cálculo II (Escuela de Matemática, 2021a). Para esta carrera en específico, se sustituyó a partir del año 2022, la asignatura MAT003 Cálculo II por MAT050 Cálculo II para Economía. Lo anterior, con la finalidad de alcanzar los requerimientos de esta en otros cursos de la malla curricular de la carrera de Bachillerato en Economía. Siendo así, sería pertinente considerar nuevas propuestas metodológicas para dicha asignatura de manera complementaria a las estrategias de instrucción que suelen establecer en los cursos de matemática universitarios, por ejemplo, la implementación del ABP.

La implementación del ABP en los procesos de enseñanza–aprendizaje es cada vez más común en las diferentes disciplinas académicas alrededor del mundo. Esto dado a que es una estrategia metodológica que posibilita la creación de salones de clase con un alto nivel de motivación y rendimiento estudiantil (Morgan y Slough, 2013). Adicionalmente, esta metodología impulsa experiencias auténticas enmarcadas dentro de un contexto real, las cuales permiten desintegrar aprendizajes previamente alcanzados para la construcción de nuevos conceptos matemáticos (Capraro y Slough, 2013). Es decir, en caso de llevarse en el curso MAT050 Cálculo II para Economía, podría favorecer la utilización de conocimientos previos, así como la motivación y el rendimiento académico del estudiantado.

Tal como lo exponen Rozhkova et al. (2021), el ABP es una oportunidad real de aplicar los saberes de otros campos en el estudio de la matemática, y viceversa. Lo cual es fundamental si se desea realmente lograr la formación integral de profesionales que se menciona en los programas de estudio de las carreras ofertadas por la UNA. Inclusive, desde la perspectiva del estudiantado, la implementación de esta estrategia metodológica promueve el alcance de un aprendizaje significativo y el entendimiento de la aplicabilidad de los contenidos a la vez (Ng y Chung, 2019). Esto es, existe una actitud positiva de la población estudiantil hacia el uso del ABP en los salones de clase, puesto que le permite involucrarse en la construcción de su aprendizaje y valorar lo aprendido.

Con respecto a la enseñanza del cálculo, en los últimos tres siglos el análisis ha sido un instrumento esencial en la aplicación de las matemáticas a múltiples disciplinas (Zuccheri y Zudini, 2014). No obstante, la mayoría de los estudios realizados sobre la instrucción de este coinciden en las dificultades de las personas para aprender sus nociones básicas, debido a la complejidad y abstracción con que se les presenta los conocimientos. En tal sentido, Cozzens y Roberts (2020) señalan que los cursos universitarios de cálculo deben mostrar la aplicabilidad de los contenidos en otros campos científicos, de forma tal que facilite a la población su comprensión.

En relación con lo mencionado, el tema de funciones de varias variables es muy importante en matemáticas, ya que posee múltiples aplicaciones; el no comprenderle podría dificultar el entendimiento de otros conocimientos y, en consecuencia, afectar el desempeño en otras disciplinas (Kashefi et al., 2020). Tal es el caso en economía, ciencia para la cual la comprensión de esta temática es de gran importancia, en particular por su utilidad para entender las bases de la teoría económica, entre otros usos. Por ello, esta temática es parte de la formación de estudiantes de la carrera de Bachillerato en Economía de la UNA, específicamente a partir del I ciclo 2022, donde se desarrolla en el curso MAT050 Cálculo II para Economía; previo a este período se abordaba en el curso MAT003 Cálculo II, ambos impartidos por la Escuela de Matemática de la misma institución.

De esta forma, debido a que la Escuela de Matemática es partícipe en la preparación profesional de dicha población, es importante que la asignatura se imparta de manera eficaz. En especial porque la Escuela de Economía, encargada de la carrera Bachillerato en Economía, busca el bienestar de la sociedad costarricense; puesto que pretende la formación de profesionales que contribuyan a la mejora del desarrollo y la calidad de vida del país, sobre todo de los sectores más pobres y de exclusión social (Escuela de Economía, 2019).

Por lo tanto, en el presente trabajo de investigación se desarrolló una propuesta didáctica para la implementación del ABP en la enseñanza del tema funciones de varias variables a estudiantes de Economía. Específicamente en el curso MAT050 Cálculo II para Economía impartido por la Escuela de Matemática de la UNA, en la Sede Central – Campus Omar Dengo. Esto mediante la revisión exhaustiva de material bibliográfico referente a la temática en cuestión y la percepción de profesionales en el área.

1.1.4. Objetivos

Objetivo general.

Elaborar una propuesta para la implementación del ABP en la enseñanza del tema funciones de varias variables del curso MAT050 Cálculo II para Economía, a estudiantes de la carrera Bachillerato en Economía de la UNA, Sede Central – Campus Omar Dengo.

Objetivos específicos.

a. Efectuar un análisis conceptual del tema funciones de varias variables en el curso MAT050 Cálculo II para Economía.
b. Realizar un análisis de contenido del tema funciones de varias variables en el curso MAT050 Cálculo II para Economía.
c. Efectuar un análisis cognitivo del tema funciones de varias variables en el curso MAT050 Cálculo II para Economía.

d. Diseñar un análisis de instrucción como propuesta para la implementación del ABP en la enseñanza del tema funciones de varias variables en el curso MAT050 Cálculo II para Economía.

1.2. Antecedentes

A continuación, se ofrecen algunas evidencias que reflejan el estado de la temática en estudio en el momento de la investigación. Para lo cual, tomando en consideración el planteamiento del problema previo, se exponen trabajos realizados alrededor del mundo que aportan información referente al análisis planteado.

Es necesario señalar que no se reportaron investigaciones similares al presente estudio a nivel universitario en el área de las matemáticas. Esto de acuerdo con los resultados de búsquedas en bibliotecas físicas y digitales de las universidades estatales del país, es decir, Universidad de Costa Rica (UCR), UNA, Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR), Universidad Estatal a Distancia (UNED) y Universidad Técnica Nacional (UTN); así como en bases de datos (Dialnet, ERIC, JSTOR, SciELO, Scopus y Springer). De modo que se divide esta sección en los apartados: enseñanza de las matemáticas en la formación de economistas, enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariable, y el ABP en la enseñanza de las matemáticas.

En particular, con relación al primer y segundo apartado no fue posible hallar investigaciones desarrolladas a nivel nacional en las mismas fuentes mencionadas en el párrafo anterior. Sin embargo, respecto al tercero sí se encontraron estudios sobre la implementación del ABP en el país, pero en disciplinas diferentes al campo de interés.

Se recalca la existencia de trabajos acerca de la utilización del aprendizaje basado en problemas para la enseñanza de las matemáticas, estrategia que, si bien posee semejanzas con el ABP, también difiere en algunos aspectos relevantes de la propuesta. Razón por la cual estas publicaciones no fueron tomadas en consideración.

1.2.1. Enseñanza de las matemáticas en la formación de economistas

En este apartado se describen diferentes trabajos de investigación realizados con relación a la enseñanza de las matemáticas en la formación de economistas. Estos estudios fueron desarrollados a nivel universitario en cursos de cálculo pertenecientes a diversas mallas curriculares de carreras de Economía.

En primer lugar, en 1995, 2000, 2005 y 2010 se aplicaron entrevistas a estudiantes de Economía en los Estados Unidos (EUA), con el fin de determinar cómo se enseñaba y evaluaba en los cursos pertenecientes a diferentes mallas curriculares de la carrera de Economía. A partir de la información, Watts y Schaur (2010) realizaron una comparación de los datos obtenidos en el 2010 con años anteriores, lo que les permitió identificar patrones y cambios en la enseñanza en dichas asignaturas.

Los autores encontraron que en todos los periodos más de la mitad del tiempo de los cursos fue destinado a clases magistrales. No obstante, pudieron notar que, aunque fuese relativamente poco su uso, el profesorado comenzó a implementar métodos más constructivistas en las clases, tales como la discusión docente - estudiante acerca de los contenidos en estudio y el trabajo cooperativo entre el estudiantado.

También lograron determinar que las investigaciones sobre los contenidos en estudio, por parte del estudiantado, empezaron a utilizarse en una pequeña porción de los cursos introductorios. Sin embargo, los juegos, las simulaciones y los experimentos se emplearon a modo de estrategia metodológica en reducidas ocasiones, pese al incremento de su popularidad en la época.

Asimismo, se reportó que la mayoría de las personas encuestadas en los cuatro periodos no consideraron importante el aprendizaje del cálculo en el pregrado de la carrera de Economía. Señalándose la existencia de un ligero cambio de esta percepción en la última aplicación de la encuesta, dado a la necesidad de esta rama de las matemáticas para determinados cursos, por ejemplo, aquellos relacionados a la estadística y la econometría.

Desde otra perspectiva, en el 2010, Goodman presentó una investigación en relación con el uso del aprendizaje basado en problemas en la integración de conocimientos matemáticos y contenidos propios del área de economía. Su propósito era proporcionar nuevas herramientas para la enseñanza de las matemáticas a economistas en formación, mediante la utilización de esta estrategia metodológica.

En este sentido, la autora realizó una amplia revisión bibliográfica, de la cual logró obtener una importante cantidad de información sobre metodologías de instrucción constructivistas que pueden emplearse en cursos de matemáticas de la carrera de Economía. De la misma forma, consiguió identificar múltiples modelos matemáticos ya diseñados para la enseñanza en esta disciplina.

En otras palabras, en su trabajo reunió una amplia bibliografía referente a características del aprendizaje basado en problemas y actividades que pueden implementarse si se desea hacer uso de esta estrategia metodológica. La autora presentó los resultados en conjunto con dos ejercicios a modo de ejemplo; el primero acerca del impacto de los impuestos a consumidores y productores, y el segundo con respecto a la manera en que una empresa determina la cantidad de mano de obra por contratar. Estas tareas fueron formuladas con la finalidad de desarrollar habilidades alusivas al cálculo multivariable.

Por otro lado, desde un punto de vista epistemológico, histórico y educacional, Collignon (2015) realizó un estudio sobre la aplicación del cálculo en economía. Esto con el propósito de cambiar la idea de que el entendimiento de la matemática debe separarse de contextos, es decir, pretendía mostrar la importancia de la contextualización de los conocimientos matemáticos para mejorar tanto su comprensión como la de saberes pertenecientes a otras disciplinas. En particular, en el área de economía, en donde la implementación de la modelización matemática permite entender con mayor claridad la teoría.

De este modo, con base en la investigación realizada, el autor logra concluir que, dado a la significante relevancia del estudio del cálculo para entender la economía, en las asignaturas de matemáticas se debe apuntar al uso de actividades que permitan mostrar esta importante característica a la población. Por lo tanto, sugiere la implementación de estrategias metodológicas de enseñanza constructivistas en los cursos de cálculo para la formación de economistas. Las cuales permitan al estudiantado construir el conocimiento a partir de problemas enmarcados en un contexto real.

En resumen, los trabajos expuestos en este apartado permitieron apreciar que, en los últimos años, la implementación de metodologías constructivistas en la enseñanza de las matemáticas a estudiantes de economía ha ganado relevancia alrededor del mundo. Esto debido a las importantes contribuciones que realizan para mostrar a la población la aplicabilidad de los conocimientos en estudio, tanto en la vida cotidiana como en otras disciplinas. Asimismo, los estudios señalaron el reciente aumento en la cantidad de personas que consideran fundamental el cálculo en la formación de economistas. En otras palabras, la información obtenida respaldó la propuesta establecida en la presente investigación.

1.2.2. Enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariable

En este apartado se describen diferentes trabajos de investigación realizados en relación con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo multivariable a nivel universitario. Los estudios consideran concepciones del estudiantado sobre la temática, limitantes en la resolución de problemas y características de su instrucción.

Kashefi et al. (2012) estudiaron el rendimiento de 62 estudiantes de ingeniería de la institución Islamic Azad University Kermanshah con el fin de conocer el impacto de la modalidad presencial mixta en el aprendizaje del cálculo multivariable. La población que participó de la investigación se inscribió voluntariamente en un curso sobre la temática impartido por una de las personas autoras; el cual tuvo una duración de 14 semanas e implicaba 2 horas de asistencia a clases presenciales y 1 hora de participación en actividades virtuales semanalmente.

La información se recolectó de las asignaciones realizadas en la asignatura y de entrevistas semiestructuradas en donde parte del estudiantado explicó el razonamiento detrás de las soluciones propuestas. Los datos registrados evidenciaron la presencia de obstáculos en el aprendizaje del cálculo multivariable relacionados a los conocimientos previos, el entendimiento de los conceptos y la habilidad de comunicarse a través de lenguaje matemático. Asimismo, estos demostraron que la implementación de la modalidad presencial mixta es beneficiosa, puesto que proporciona a las personas las herramientas tecnológicas necesarias para lograr superar las limitantes que se mencionaron.

Harel (2013), en un intento por investigar acerca de la necesidad intelectual y apoyar la idea de que la resolución de problemas justifica el estudio de la matemática, realizó un acercamiento al análisis de dificultades en el aprendizaje del cálculo multivariable. Para ello, llevo a cabo un análisis documental y organizó sus hallazgos en apartados destinados a indicar las premisas en las cuales reside el término necesidad intelectual, establecer una definición concreta, explicar las categorías y los roles de las necesidades intelectuales en el currículo de matemática y, finalmente, caracterizar estas últimas.

En los resultados, se centró la atención a obstáculos relacionados con la enseñanza de funciones de dos variables. Este explicó que en la instrucción del cálculo en varias variables se ignora la importancia de la aproximación lineal para la derivación y la demostración de su aplicabilidad en tareas cotidianas. Asimismo, destacó el entendimiento inadecuado de los conceptos y la construcción de representaciones mentales erróneas. El autor conjeturó sobre posibles consecuencias a causa de las problemáticas mencionadas y sugirió despertar en las y los estudiantes la necesidad intelectual con el uso de contextos reales.

De acuerdo con los datos obtenidos de 20 entrevistas realizadas a estudiantes matriculados en un curso de cálculo multivariable en EUA, Dorko y Weber (2014) lograron determinar las formas en que el estudiantado generaliza los conocimientos aprendidos sobre el cálculo de una variable al cálculo de varias variables. Esto mediante un estudio de caso de los conceptos de dominio y rango.

Del estudio se lograron encontrar tres perspectivas diferentes a través de las cuales se entienden los conceptos, así como evidencia de que la población generaliza los conocimientos a partir del establecimiento de relaciones entre situaciones y objetos. Esto permitió concluir que el profesorado debería utilizar saberes previos relacionados con el cálculo de una variable para mejorar la comprensión de nuevos conceptos pertenecientes al cálculo multivariable.

Sheikh (2015) desarrolló un experimento con el propósito de identificar la incidencia de la visualización en la conceptualización y la resolución de problemas en el estudio del cálculo en varias variables. Para lo cual este analizó el desempeño de dos grupos inscritos en un curso de análisis multivariado, el primero conformado por 24 estudiantes y el segundo por 26 estudiantes. El autor se aseguró de que con ambas agrupaciones se utilizaran las mismas notas de clase, explicaciones y tareas, con la única excepción de que a la primera se le asignaron seis actividades adicionales que pretendían el desarrollo de la visualización con ayuda de herramientas tecnológicas.

La información se obtuvo de evaluaciones aplicadas tanto al inicio como al final del curso. Los resultados arrojados por las primeras pruebas confirmaron que no existían diferencias significativas en el conocimiento de las personas, no obstante, las últimas valoraciones demostraron una ventaja significativa por parte del primer grupo. Esto se consideró como resultado de las habilidades de visualización que logró alcanzar la agrupación que realizó los trabajos adicionales. Además, el autor destacó el gran obstáculo que supone para el estudiantado una visualización errónea en el estudio del cálculo multivariable y las posibles consecuencias de un predominante uso de las representaciones algebraicas.

Untarti y Badu (2019) desarrollaron una investigación mixta (cualitativa y cuantitativa) con la finalidad de identificar errores cometidos frecuentemente por estudiantes de un curso de análisis en varias variables durante la resolución de problemas. Para ello decidieron aplicar una prueba sobre el tema funciones de varias variables a 41 estudiantes de esta asignatura en los años 2017 y 2018, y entrevistaron a 3 personas de la población considerada.

En el análisis de los resultados de su trabajo reportaron que los errores cometidos con mayor frecuencia se relacionan con el entendimiento de los conceptos matemáticos evaluados; por ejemplo, la integral y la derivada parcial de una función de varias variables. Lo que señalan en su estudio es una importante dificultad por considerar si se desea utilizar la resolución de problemas, ya que podría obstaculizar el desarrollo de las actividades. Además, mencionaron que en la evaluación se cometieron errores de hecho y de procedimiento.

Por último, Martínez-Planell y Trigueros (2021) llevaron a cabo una rigurosa revisión de material bibliográfico sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo multivariable; específicamente, de 51 trabajos de investigación publicados entre los años 1980 y 2020. Esto con el objetivo de describir los resultados de varias investigaciones realizadas alrededor del mundo acerca del aprendizaje del concepto de funciones de dos variables, así como de las estrategias metodológicas relacionadas con la enseñanza de la temática.

Los hallazgos del trabajo sugieren que el entendimiento de las funciones de una variable incide, directamente, en lo que la población concibe sobre las funciones de dos variables. Razón por lo cual, se recomendó tomar este resultado en consideración al introducir el tema funciones de varias variables, señalándose claramente las diferencias entre los tipos de funciones durante su enseñanza. De la misma manera, se propuso la implementación de gráficas y apoyos visuales para mejorar la comprensión del estudiantado.

En conclusión, los trabajos establecen que las personas tienden a generalizar los conceptos del cálculo en una variable al cálculo en varias variables. De modo que es posible tomar ventaja de dicha característica a fin de favorecer la comprensión del último mencionado. Por consiguiente, la información arrojada por los estudios apoyó el uso de estrategias metodológicas que permiten desintegrar conocimientos previos con el objetivo de construir nuevos saberes, tal como lo hace el ABP. Asimismo, las investigaciones brindaron elementos necesarios para la elaboración de la propuesta didáctica que desarrolló; tales como, dificultades comunes en el aprendizaje del cálculo multivariable y tipos de representaciones que se necesitan usar en la enseñanza de esta temática.

1.2.3. El aprendizaje basado en proyectos en la enseñanza de las matemáticas

En este apartado se describen algunos estudios realizados con respecto a la implementación del ABP en la enseñanza de las matemáticas. Es necesario señalar que los primeros dos trabajos corresponden a propuestas de aplicación de la metodología en secundaria, de las cuales solo la primera fue llevada a cabo para su validación. Mientras que la tercera investigación es un análisis de la utilización del ABP a nivel universitario.

En primer lugar, Flores y Juárez (2017) realizaron una investigación, bajo la metodología estudio de caso, sobre el desarrollo de competencias matemáticas de geometría y trigonometría mediante un proyecto enmarcado en un contexto real. Específicamente, competencias relacionadas con la formulación y resolución de problemas, y la argumentación de las soluciones planteadas haciendo uso de múltiples representaciones. Lo anterior en una institución de educación secundaria en México, con una población de 32 estudiantes de primer nivel de secundaria.

El problema planteado hizo referencia a la situación problemática de un puente en la comunidad en que se localizaba el colegio, el cual, dado a diversas razones, se había convertido en un peligro para las personas. La actividad implicó que, a partir de múltiples observaciones de la estructura y los conocimientos adquiridos en clase, el estudiantado debía establecer una posible solución y elaborar una maqueta que permitiera al resto de la clase comprender su propuesta.

Esto permitió a la población vincularse con su entorno a través del análisis de la realidad por medio de aplicaciones matemáticas. Según mencionan las autoras, se identificaron saberes de esta ciencia en el contexto dado. Asimismo, se concluyó que gracias a la implementación del ABP se alcanzó un aprendizaje significativo e, inclusive, se desarrollaron habilidades genéricas, lo que estimuló el trabajo colaborativo y modificó, en gran medida, actitudes negativas al inicio de la actividad.

Desde otra perspectiva, en el año 2020, Reyes presentó una unidad didáctica a modo de propuesta para la enseñanza del tema expresiones algebraicas a estudiantes de secundaria, basándose en el uso de la estrategia metodológica ABP. Esta se diseñó a partir de la revisión de material bibliográfico y fue validada por medio de una matriz de Fortalezas, Oportunidades, Debilidades y Amenazas (FODA). La propuesta tuvo la limitante de que no fue puesta en práctica dentro de un salón de clases real.

El trabajo consistió en una unidad didáctica titulada “Expresiones algebraicas, un lenguaje para la vida” fundamentada en el uso de la metodología de enseñanza ABP. Se planteó un proyecto que constó de tres fases organizadas en 12 sesiones de 60 minutos cada una. En la primera se solicita a la población realizar una indagación en línea sobre las aplicaciones de la temática en contextos de la vida real; en la segunda se le pide elaborar un póster con la información encontrada haciendo uso de herramientas tecnológicas, para, finalmente, presentar los datos al resto de la clase.

A partir de la investigación bibliográfica realizada, el autor logró determinar que el ABP permite motivar al estudiantado, crear salones de clase con alto desempeño académico y favorece un aprendizaje significativo. Además, rescató que gracias a la implementación de esta estrategia metodológica es posible crear una conexión entre la persona estudiante y el mundo real. Sin embargo, también encontró algunas limitantes de su uso, como lo son la cantidad de tiempo que conlleva el desarrollo de un proyecto y la complejidad de su evaluación por parte del profesorado.

Aunado a lo anterior, Rozhkova et al. (2021) llevaron a cabo un estudio acerca de la utilización del ABP en un curso introductorio de matemáticas a nivel universitario en EUA. Esto con base en observaciones de cuatro grupos de estudiantes de primer año, los cuales formaron parte de múltiples sesiones en que el profesorado implementó esta estrategia de instrucción.

Los resultados obtenidos permitieron demostrar que esta metodología evita la monotonía y el aburrimiento en las aulas, lo cual posibilita al estudiantado desarrollar autoconciencia de su aprendizaje. Asimismo, evidenciaron que el ABP es una oportunidad real para que la población estudiantil utilice los conocimientos previamente adquiridos en otras asignaturas, con la finalidad de lograr una mejor comprensión de los nuevos.

En concreto, de acuerdo con lo expuesto por las investigaciones en este apartado con relación a la implementación del ABP en la enseñanza de las matemáticas, fue posible identificar algunas pautas básicas para su utilización. Esto permitió establecer un plan de trabajo claro en la elaboración de la propuesta del presente trabajo de investigación. De igual forma, los resultados arrojados por los estudios respaldaron positivamente la selección de esta metodología de enseñanza, señalando que, en caso de utilizarla, podría ayudar a mejorar el rendimiento académico y la motivación del estudiantado.

Capítulo II: Marco teórico

En este capítulo se exponen los fundamentos teóricos que sostienen la investigación desarrollada. Es decir, con respecto al ABP se realiza una aproximación histórica de la utilización de proyectos como estrategia metodológica y del término ABP, se señala los principios para su implementación, los tipos de proyecto según la participación del estudiantado en la planificación de la asignación y los pasos base a seguir en el planeamiento de un proyecto. En relación con el análisis didáctico, se definen conceptos fundamentales dentro de la propuesta, en especial aquellos concernientes a las fases que se planean llevar a cabo en el presente trabajo. Por último, en cuanto al tema de funciones de varias variables, se puntualizan los contenidos matemáticos vinculados en el instrumento que se pretende elaborar.

2.1. *Aprendizaje basado en proyectos*

En esta sección se realiza una aproximación histórica de la utilización de proyectos como estrategia metodológica en los procesos de enseñanza – aprendizaje, al igual que de la concepción del término ABP. Del mismo modo, se establece, en relación con el método de proyectos, los principios por considerar en el diseño de estos, las diferentes modalidades de trabajo y los pasos a seguir durante su planificación.

2.1.1. Aproximación histórica

En primer lugar, los proyectos se comenzaron a utilizar como estrategia metodológica a finales del siglo XVI. De acuerdo con Burlbaw et al. (2013) aproximadamente en el periodo 1590 – 1765 estos eran empleados por escuelas de Arquitectura en Europa. Específicamente, se le asignaba al estudiantado avanzado un problema de diseño sobre una construcción, como el de una catedral o plaza (Mosquera, 2010). En donde, se entiende como problema el planteamiento de una situación desconocida a la persona para la que se requiere encontrar una solución, la cual se espera obtenga a través de conocimientos adquiridos con anterioridad.

Por otra parte, en los años comprendidos entre 1765 y 1880, la implementación de esta estrategia metodológica se popularizó en Europa (Burlbaw et al., 2013). Ya que, como lo menciona Mosquera (2010), los proyectos se convirtieron en métodos de instrucción regulares para estudiantes de ingeniería en Francia, Alemania y Suiza. Lo cual permitió que, durante la misma época, el uso de proyectos en los procesos de enseñanza – aprendizaje se extendiera hasta llegar a América.

En 1880 – 1918 los proyectos se utilizaron tanto en la formación manual como en escuelas públicas de EUA (Burlbaw et al., 2013). De hecho, según menciona Mosquera (2010), la estrategia metodológica “pasó de ser un método regular de enseñanza en el entrenamiento manual a la educación técnica y luego a la enseñanza de las ciencias en general” (p. 5). Se debe entender en este contexto *formación manual* como el desarrollo de habilidades para el trabajo con las manos en madera y metal, y *educación técnica* como la preparación académica de personas en labores de ciencias aplicadas y tecnología moderna, que van más allá de oficios calificados, pero están por debajo de los grados universitarios.

Luego, en el periodo de 1918 – 1965, la propuesta de proyectos como estrategia metodológica se volvió a definir de acuerdo con nuevos criterios (Mosquera, 2010). Se extendió hasta llegar a países de América Latina y, nuevamente, Europa, mientras perdía popularidad en EUA dado a una serie de críticas que recibió el método por docentes progresistas.

Adicionalmente, es importante indicar que en esta época se estableció por primera vez el concepto de ABP, con base en trabajos realizados por William H. Kilpatrick en 1918, quien es considerado el padre del método de proyectos. El ABP se presentó como una metodología de enseñanza cuyo fin era el alcance del aprendizaje por medio de la planeación, implementación y evaluación de proyectos situados en contextos reales (Ciro, 2012).

A propósito, en 1921, Kilpatrick define proyecto como una actividad determinada con una finalidad dominante, que fija los objetivos de acción, orienta el procedimiento de trabajo y fomenta su realización a través de impulsos. Es decir, es una tarea diseñada de forma tal que motive al estudiantado a efectuarla, bajo el supuesto de mejorar una realidad establecida. Por esta razón, teniendo en cuenta lo señalado por el autor, se considera que la motivación es una herramienta fundamental en el ABP.

Asimismo, es necesario destacar que durante esta época la utilización de proyectos como estrategia metodológica se dotó de fundamentación teórica (Mosquera, 2010). Aproximadamente en el mismo periodo se establecieron los principios teóricos del aprendizaje basado en problemas, los cuales coinciden con los del ABP. No obstante, ambos enfoques se distinguen pues difieren tanto en su alcance como en el desarrollo del trabajo.

El aprendizaje basado en problemas se limita a la propuesta de una tarea que debe analizarse con el fin de señalar las herramientas necesarias para realizarla (Capraro y Slough, 2013). En otras palabras, no requiere que se lleve a cabo la asignación, solamente que se identifique el procedimiento ideal para abordarla. Mientras que un proyecto se establece en relación con uno o varios problemas por resolver; implica la búsqueda de su respuesta a través de la organización e investigación, en vez de únicamente estimular el pensamiento (Burlbaw et al., 2013).

Por último, de 1965 en adelante el planteamiento de los proyectos como estrategia metodológica sufrió modificaciones. Particularmente, en la década de los 70, el método se redefinió según nuevos criterios, está vez en relación con la idea de currículo abierto y educación comunitaria (Ciro, 2012). Para lo cual, se entiende currículo abierto como un plan de estudios que se ajusta a la población y el contexto en que se desarrolla, y educación comunitaria como un enfoque de enseñanza dirigido a las personas dentro de su comunidad.

De la misma manera, en este periodo se ha desarrollado una variedad de estudios sobre la propuesta, en los que es posible identificar importantes conceptualizaciones del término ABP. Enfoque al cual se le estableció, en pocas palabras, como la asignación de uno o más problemas reales que el estudiantado puede resolver a través de métodos derivados de la investigación, o inclusive conocimientos previos que este haya adquirido.

Según Capraro y Slough (2013) esta perspectiva utiliza proyectos ricos en contexto e información adicional (gráficos, imágenes, especificaciones, generalizaciones, etc.), lo que mejora la calidad del aprendizaje y aumenta la participación de la población en la construcción de su aprendizaje. Es una alternativa formativa que da la posibilidad a la persona de comprender el contexto laboral en que desea desenvolverse, partiendo de los conocimientos propios de una disciplina para lograr una formación integral (Ciro, 2012).

Además, el ABP es una metodología que luego de la redefinición del método de proyectos en los años 1970, se difundió alrededor del mundo. En consecuencia, su implementación en América Latina en los últimos años ha incrementado, considerablemente, en corrientes de educación basadas en experiencias prácticas del estudiantado para la generación del conocimiento (Ciro, 2012). Lo anterior puesto que, tal como se mencionó, la finalidad de este enfoque es la consecución de una meta por medio de la investigación.

2.1.2. Principios de diseño

A continuación, se describen los principios que se deben considerar para la implementación de proyectos como estrategia metodológica. En donde es necesario señalar que estos han sufrido diferentes transformaciones a lo largo de la historia, en función del currículo y las teorías de educación vigentes. Razón por la cual los siguientes postulados responden a lo establecido por el enfoque constructivista.

Hacer los conocimientos visibles.

En primer lugar, es necesario señalar que el ABP es una metodología constructivista, esto es, supone que los procesos de enseñanza-aprendizaje giran en torno a la persona estudiante. En tal sentido, visibilizar los conocimientos se refiere a que la organización de los proyectos permita que el aprendizaje sea constructivista, y los factores académicos, sociales y contextuales influyan en su adquisición (Ciro, 2012). Es decir, el diseño de la asignación debe dar la posibilidad al estudiantado de construir su propio aprendizaje utilizando información del medio que lo rodea.

Por otro lado, la visualización de los conocimientos también se relaciona con el uso de contenidos significativos para la población y la selección de problemas situados en un contexto real. En otras palabras, corresponde a la utilización de problemas reales personalmente relevantes para el estudiantado, con el fin de movilizar y conectar los nuevos contenidos con otros previamente estudiados (Slough y Milam, 2013). En este contexto, la motivación es una herramienta fundamental en el ABP, la cual despierta el interés de realizar la investigación para encontrar posibles soluciones (Ciro, 2012).

Visibilizar el pensamiento del estudiantado.

El principio de visibilizar el pensamiento del estudiantado hace referencia a la consideración de mecanismos, en el diseño del proyecto, que permitan entender el razonamiento detrás de la solución que se establezca. Es decir, busca comprender el análisis realizado por la persona al utilizar sus conocimientos en la resolución del problema (Slough y Milam, 2013). Esto porque es necesario que de la asignación se obtenga un producto posible de evaluar. Dado que, como lo menciona Ciro (2012), debe surgir un trabajo que explique los resultados, lo aprendido, la manera que se abordaron las dificultades y las fortalezas y debilidades de la propuesta establecida.

Promover el aprendizaje cooperativo.

En el diseño de un proyecto, es fundamental tomar en consideración aquellos objetivos pedagógicos transversales que este tipo de asignación plantea alcanzar desde sus inicios (Ciro, 2012). Comúnmente, estos corresponden a finalidades intrínsecas de la educación, que usualmente se mencionan en los programas de estudio, y hacen alusión al desarrollo personal, intelectual, moral y social del estudiantado. Así, la implementación del ABP supone que las y los estudiantes interactúen entre sí para la construcción del conocimiento. Es decir, el diseño de espacios de trabajo adecuados que permitan a la población realizar la actividad en conjunto, y a su vez aprender normas básicas de la convivencia en sociedad (Slough y Milam, 2013).

Fomentar la autonomía y el aprendizaje para la vida.

Primeramente, fomentar la autonomía alude al desarrollo de habilidades en el estudiantado que permitan la resolución de tareas, sin la necesidad de una continua intervención docente. Es decir, los proyectos deben estimular la capacidad de resolver dificultades de forma independiente e identificar errores durante el proceso de solución, con el fin de solventarlos y lograr que la persona tome decisiones correctas por su propia cuenta (Ciro, 2012).

Por otra parte, fomentar el aprendizaje para la vida se refiere a la selección de contenidos con una aplicación significativa en la vida del estudiantado. De modo que los proyectos deben dar la posibilidad a la persona de reconocer las relaciones entre los temas en estudio y la cotidianidad (Ciro, 2012). Esto es, propiciar que la población visualice la necesidad de los contenidos en el desarrollo de determinadas tareas.

En consecuencia, en la implementación del ABP es preciso diseñar investigaciones que permitan al estudiantado encontrar la información adecuada para dar solución al problema, proceso que debe acompañarse de una supervisión docente constante con intervención mínima (Ciro, 2012). Esto contribuye a que la población adquiera las habilidades necesarias para adueñarse de su propio proceso de aprendizaje, y sea entonces capaz de abordar una variedad de problemáticas amplia e independientemente.

2.1.3. Tipos de proyectos

En la actualidad, es posible identificar alrededor del mundo diferentes categorías de proyectos. Por lo cual, es necesario señalar que, para seleccionar un tipo, se debe considerar el nivel de control en la asignación que se le dará al estudiantado. Por tanto, de acuerdo con lo antes mencionado, se describirán cinco modalidades de proyectos que pueden considerarse.

Laboratorio tradicional.

El laboratorio tradicional pretende la verificación de hechos a partir de conocimientos factuales que han sido introducidos a la población con anterioridad (Slough y Milam, 2013). En donde se entiende conocimiento factual como aquella información proporcionada al estudiantado con el fin de que se aprenda en forma literal; por ejemplo, el vocabulario y las fórmulas. Para lo cual, en este caso, se supone que el profesorado controla en la planificación del proyecto el tema, los problemas, los recursos y materiales por utilizar, los procedimientos a seguir, la manera de analizar los datos y los resultados que se obtendrán.

Principiante.

Al igual que en el caso anterior, este tipo de proyecto pretende la verificación de hechos a partir de conocimientos factuales, sin embargo, supone que la población obtenga la información por medio de investigaciones (Slough y Milam, 2013). Es decir, los contenidos se introducen durante el desarrollo de la asignación y no con anterioridad. Así, en el proyecto principiante, el profesorado controla en la planificación el tema, los problemas, los recursos y materiales por utilizar y los procedimientos a seguir; mientras el estudiantado se encarga de la manera de analizar los datos y los resultados que se obtendrán.

Principiante informado.

Este tipo de proyecto pretende la construcción de conocimientos conceptuales a partir de conocimientos factuales que la persona posee (Slough y Milam, 2013). Entendiéndose conocimiento conceptual como aquella información proporcionada a la población con el fin de que se extraigan las ideas principales y reconozcan las propiedades esenciales de un contenido. En otras palabras, no debe ser aprendida en forma literal y se espera un aprendizaje más complejo que el de los casos anteriores. Así, en el proyecto principiante informado, el profesorado controla en la planificación el tema, los problemas y los recursos y materiales por utilizar; mientras el estudiantado se encarga de los procedimientos a seguir, la manera de analizar los datos y los resultados que se obtendrán.

Experto.

Este tipo de proyecto pretende la resolución de problemas a partir de conocimientos factuales y conceptuales que la persona posee (Slough y Milam, 2013). En donde el profesorado posee únicamente el control del tema en la planificación; mientras que el estudiantado se encarga de los problemas, los recursos y materiales por utilizar, los procedimientos a seguir, la manera de analizar los datos y los resultados que se obtendrán. Es decir, la población posee un alto grado de independencia en la organización del trabajo. Razón por la cual es importante destacar que se necesita amplia experiencia en el desarrollo de las otras modalidades para poder alcanzar este nivel.

Investigador.

Al igual que en el caso anterior, este tipo de proyecto pretende la resolución de problemas a partir de conocimiento factuales y conceptuales que la persona posee (Slough y Milam, 2013). Sin embargo, la modalidad investigador da al estudiantado total control de la planificación del trabajo. Es decir, selecciona el tema, los problemas, los recursos y materiales por utilizar, los procedimientos a seguir, la manera de analizar los datos y los resultados que se obtendrán; mientras el profesorado supervisa constantemente su planteamiento y asume un rol de guía. Por tanto, una vez más, es importante señalar que para alcanzar este nivel la población necesita amplia experiencia en el desarrollo de las otras modalidades.

2.1.4. Planificación de un proyecto

La planificación de un proyecto puede variar según el campo en que se lleve a cabo. No obstante, en la mayoría de las ocasiones se suelen seguir los pasos que se describen a continuación. Estos se desarrollan de manera lineal, aunque se pueden repetir en ciclo hasta alcanzar los resultados deseados.

Primer paso – Identificar la problemática, las limitaciones y las características deseadas.

El primer paso corresponde a la definición de la problemática, las posibles limitaciones y las características deseadas en el producto final del proyecto, con el propósito de establecer clara y concisamente los objetivos del trabajo (Morgan y Slough, 2013). Se señala que los problemas describen la problemática del trabajo (Ciro, 2012); la cual, como se mencionó antes, debe ser real y de interés personal para el estudiantado.

Además, se entiende por limitaciones aquellas circunstancias que puedan dificultar el desarrollo de la asignación, y por características deseadas las cualidades que se espera distingan los resultados de la tarea. Estas últimas indican los criterios de calidad que los resultados deben cumplir y, por ende, las directrices básicas a seguir en la realización del proyecto (Ciro, 2012).

Segundo paso – Describir el proyecto y los objetivos.

El segundo paso corresponde a la formulación de los objetivos del proyecto, ya que estos permiten describir detalladamente en qué consiste la asignación y cuál es su finalidad (Ciro, 2012). Para esto se toman en cuenta las herramientas necesarias para satisfacer las posibles limitantes durante su ejecución y las características deseadas en el producto final. Además, se establece una guía para el estudiantado en el desarrollo de la propuesta.

Tercer paso – Crear un cronograma de trabajo.

El tercer paso corresponde a la creación de un cronograma de trabajo que permita organizar las actividades que se pretenden llevar a cabo. Este debe incluir las instrucciones para la ejecución del proyecto, considerando el orden de las tareas y el tiempo que se requiere para su ejecución, así como metas a corto y largo plazo (Ciro, 2012). Por lo tanto, es necesario tomar en cuenta los pasos que el estudiantado suele seguir en el desarrollo de actividades. Al respecto, Morgan y Slough (2013) proponen los siguientes: identificación del problema, elaboración de investigaciones, creación de una lista de ideas, evaluación de los razonamientos planteados, construcción del modelo, evaluación del prototipo y la comunicación y reflexión de los resultados obtenidos.

Cuarto paso – Descripción de la evaluación.

El cuarto paso corresponde a la formulación de los criterios de evaluación del proyecto; los cuales hacen referencia a indicadores que el profesorado considerará con el fin de determinar el logro de los objetivos planteados. Es decir, se debe especificar la forma en que se valorará el desempeño de la población, tomando en cuenta el aprendizaje alcanzado y el producto final obtenido. Por ende, resulta esencial señalar que esta propuesta de trabajo no prepara al estudiantado para la realización de una prueba escrita tradicional (Capraro y Slough, 2013). Así, en busca de una valoración adecuada de la asignación, se recomienda la utilización de múltiples técnicas de evaluación alternativas y de índole cualitativa (Slough y Milam, 2013).

Con base en la información expuesta en esta sección, se identifican las directrices que guían la utilización del ABP en la propuesta didáctica elaborada en el presente trabajo. Para empezar, el análisis de la evolución del método de proyectos permitió establecer una noción clara de la definición del término ABP, y de los elementos que constituyen dicha metodología de enseñanza. Además, los principios que fundamentan el diseño de proyectos precisaron las pautas generales seguidas para el uso de estos como estrategia metodológica.

Las modalidades descritas en el apartado hicieron posible la selección de la categoría aplicable a la población y el contexto dado; al igual que el reconocimiento de los objetivos por alcanzar en cuanto a la dificultad de la asignación y el nivel de independencia del estudiantado en su puesta en práctica, esto con el fin de asegurar su progreso a través de los diferentes niveles. Por último, se tomaron en consideración los pasos indicados para la elaboración del proyecto que forma parte de los resultados en esta investigación.

2.2. Análisis didáctico

En esta sección se establece la concepción del término análisis didáctico adoptada por diferentes investigaciones desde 1997; además, se definirán aquellos elementos clave de sus propuestas. Posteriormente, se identifican los componentes de un análisis didáctico, describiendo en cada una de las subsecciones de este apartado las fases desarrolladas en el presente trabajo. Por último, se determina la posición asumida con respecto a los análisis realizados para la enseñanza del tema funciones de varias variables a estudiantes de Economía.

Primeramente, en el estudio de la didáctica de la matemática, Puig (1997) menciona que el análisis didáctico es "el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos" (p. 63). Entendiéndose como contenido aquellos temas que se desean estudiar en una asignatura determinada.

Por su parte, Rico (1997) considera que el análisis didáctico corresponde a un método mediante el cual se aborda la preparación y programación de unidades didácticas. En este sentido, una unidad didáctica se concibe como "una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de objetivos específicos" (Segovia y Rico, 2001, p. 87).

En investigaciones en el campo de la Educación Matemática, Gómez (2002) menciona que "el contenido matemático es el eje central del análisis didáctico" (p. 262). En la misma área, este autor establece, en el 2007, que el análisis didáctico es una herramienta que permite explorar, profundizar y trabajar los significados de los contenidos escolares; con el fin de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza-aprendizaje. En este contexto, se entiende como contenido escolar a los conocimientos y las habilidades que se desea que el estudiantado adquiera por medio de los procesos de enseñanza-aprendizaje. En consecuencia, los contenidos matemáticos escolares se refieren a los conocimientos y habilidades que se espera la población alcance en la asignatura de matemáticas.

Según Lupiáñez y Rico (2008) el análisis didáctico es un procedimiento en forma de ciclo que se repite hasta lograr describir adecuadamente cómo el profesorado debería diseñar, poner en práctica y evaluar actividades de enseñanza-aprendizaje. Rico y Fernández-Cano (2013) lo complementan al mencionar que el análisis didáctico se basa en la fundamentación, dirección y sistematización de la planificación curricular para llevar a la práctica los procesos de enseñanza y evaluación de los aprendizajes.

Para este trabajo, de acuerdo con lo señalado en párrafos anteriores, se considera el análisis didáctico como un procedimiento cíclico mediante el cual cada docente debería, idealmente, analizar el tema funciones de varias variables; con el fin de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza-aprendizaje. Este está compuesto por cinco componentes: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de evaluación (Rico y Fernández-Cano, 2013).

A continuación, se describen las concepciones de análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción, las cuales corresponden a las fases desarrolladas en la presente investigación.

2.2.1. Análisis conceptual

Para empezar, es importante señalar que Rico (1997) organiza el conocimiento matemático en dos campos, el conceptual y el procedimental. Entendiéndose conocimiento matemático como todo aquello que una persona sabe o percibe de un objeto matemático determinado. Este, desde un punto de vista conceptual, puede ser ordenado en tres niveles: hechos, conceptos y estructuras conceptuales.

Los hechos son las unidades más básicas de información que permiten registrar acontecimientos (Rico, 1997). Estos se pueden dividir en cuatro tipos. Los términos corresponden a hechos que registran la información a través de palabras; las notaciones, por medio de símbolos o signos; los convenios, son acuerdos para comunicar el conocimiento; y los resultados son conexiones entre términos. Por otra parte, los conceptos se refieren a la unión y las relaciones entre hechos, mientras las estructuras conceptuales se refieren a la conglomeración y enlace de conceptos (Rico, 1997).

El conocimiento matemático, desde la perspectiva procedimental, se refiere a procedimientos empleados para dar solución a una tarea. Este, de igual forma, puede ser organizado en tres niveles: destrezas, razonamientos y estrategias. Las destrezas manipulan y transforman los hechos por medio de normas matemáticas; los razonamientos representan los vínculos entre conceptos para establecer conclusiones; y las estrategias procesan las uniones y conexiones establecidas entre los conceptos de la estructura conceptual (Rico, 1997).

Aunado a lo anterior, en la práctica es posible identificar tres tipos de razonamientos: deductivo, inductivo y analógico. El primero hace referencia a hechos verdaderos asumidos por la persona; el segundo, a conjeturas que establece sobre posibles resultados, y el tercero alude a comparaciones entre objetos para establecer características en común (Rico, 1997).

Dicho esto, Rico y Fernández-Cano (2013) conciben el análisis conceptual como un estudio de los múltiples significados de un contenido matemático escolar, las posibles relaciones entre términos involucrados y los niveles subjetivos (creencias), intersubjetivos (concepciones) y objetivos (conceptos) de cada campo conceptual. Es decir, los autores suponen esta fase como una herramienta que posibilita la delimitación de ideas y nociones de un objeto matemático, a través de un análisis de su origen e historia.

Por otro lado, Valenzuela et al. (2018) establecen que a partir del análisis conceptual se logra interpretar los procesos mentales y psicológicos de elementos determinados, así como transformar los conceptos en piezas teóricas claras. Dicho de otro modo, las autoras consideran esta fase como un instrumento metodológico que permite seleccionar una definición adecuada del contenido matemático, a través del estudio de los múltiples significados existentes, que luego se convierte en una base teórica sólida para el trabajo.

En consecuencia, en el presente trabajo de investigación se entiende como análisis conceptual el estudio de las definiciones asignadas al tema de funciones de varias variables desde diferentes perspectivas y niveles. Mediante el cual se delimitó su definición, a partir de significados, explicaciones, ejemplos, e inclusive contraejemplos, atribuidos a este a lo largo de su historia.

2.2.2. Análisis de contenido

El análisis de contenido es el reconocimiento y la descripción ordenada de significados de una estructura matemática desde la perspectiva de las matemáticas escolares (Gómez, 2002). En el desarrollo de esta fase, se toma en consideración la información obtenida en el análisis conceptual y se recopilan aquellas definiciones apropiadas para la instrucción matemática del objeto seleccionado.

Según Lupiáñez y Rico (2008) es un procedimiento mediante el cual se identifican, organizan y seleccionan los significados de un tema matemático que se consideran importantes en la planificación de su instrucción. Lo cual, los autores Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013) complementan al mencionar que el análisis de contenido tiene como finalidad detallar la estructura matemática según una visión real de su implementación en el aula.

Por consiguiente, en este trabajo se define el análisis de contenido como el estudio de las definiciones planteadas en el análisis conceptual, el cual permitió determinar aquellos significados relevantes en la instrucción del tema de funciones de varias variables y profundizar en estos. Esta fase se organiza en tres tipos de significados, los cuales se describen a continuación.

Estructura conceptual.

La estructura conceptual se refiere a un grupo de conceptos e inclusive procedimientos relacionados entre sí, que se utilizan para describir las funciones de varias variables.

Sistemas de representación.

Los sistemas de representación son convenios establecidos a través de un conjunto de reglas matemáticas con el fin de representar de diferentes formas un concepto (Gómez, 2002). Esto incluye para efectos de la presente investigación, distintas nociones de las funciones de varias variables partiendo de la identificación de sus propiedades. Así, tal como lo menciona Valverde (2012), se permite indicar una mejor versión del objeto a partir de sus características.

Fenomenología.

El análisis fenomenológico describe aquellos fenómenos asociados a un concepto (Puig, 1997). Entendiéndose el término fenómeno como un hecho que puede ser percibido por medio de los sentidos o inteligencia. De esta forma, se identifican aspectos matemáticos importantes de un fenómeno dentro de un problema, relacionando propiedades de las funciones de varias variables a través de los sistemas de representación. Es decir, se delimitan las situaciones en donde estas poseen un uso y es posible probar su funcionalidad (Lupiáñez, 2013).

Los fenómenos pueden organizarse mediante contextos, subestructuras y situaciones. En primer lugar, los contextos corresponden a grupos de fenómenos que comparten una misma característica estructural desde un punto de vista matemático (Cañadas et al., 2016). Por ejemplo, situaciones utilizadas para aproximar, contar, medir o relacionar objetos. Por otra parte, las subestructuras son partes de una estructura conceptual ordenadas según sus propiedades (Cañadas et al., 2016).

Las situaciones responden a medios donde una estructura matemática tiene un uso regular (Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza, 2013). Dicho de otro modo, corresponden a escenarios que permiten mostrar claramente la funcionalidad de las funciones de varias variables. Este tipo de fenómenos pueden clasificarse como situaciones personales, educativas, laborales u ocupacionales, públicas y científicas. Sin embargo, para efectos de esta investigación, se consideraron únicamente medios laborales u ocupacionales; los cuales se sitúan en el ambiente de trabajo del que se espera estudiantes de Economía vayan a formar parte.

2.2.3. Análisis cognitivo

En primer lugar, Gómez (2002) señala que el análisis cognitivo describe hipótesis sobre el posible desempeño del estudiantado al enfrentarse a las actividades de enseñanza-aprendizaje. Estas se establecen a partir de estudios sobre la enseñanza del contenido, cuyos resultados pueden derivarse de la experiencia docente, evaluaciones diagnósticas u otras investigaciones. De la misma forma, el mismo autor agrega que esta fase busca identificar, detallar y caracterizar las tareas por realizar, así como los errores que podrían aparecer durante el proceso, las dificultades que subyacen de estos y, en consecuencia, los obstáculos que sería necesario superar.

Las tareas son retos asignados a la persona con el fin de que esta demuestre su conocimiento a partir de conceptos y procedimientos, al igual que un medio para establecer en qué medida se han logrado los objetivos planteados (Lupiáñez, 2013). Es decir, son trabajos que implican una demanda cognitiva al estudiantado y se relacionan, para la presente investigación, con el tema funciones de varias variables; estos, a su vez permiten alcanzar las expectativas de aprendizaje.

Las expectativas de aprendizaje se comprenden como capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, técnicas y destrezas que se espera la población adquiera, desarrolle y utilice (Lupiáñez, 2013). Estas delimitan las habilidades específicas que se espera las y los estudiantes dominen en relación con las temáticas en estudio para su nivel educativo. Tal como lo menciona Lupiáñez (2013), las expectativas de aprendizaje en matemáticas aluden a los usos reconocibles y deseables de los conocimientos, que pueden observarse e inferirse a partir de las actuaciones del estudiantado en las tareas asignadas.

Por otra parte, los errores corresponden a respuestas incorrectas brindadas por el estudiantado al respecto de una cuestión matemática, y se obtienen durante la aplicación de tareas (Lupiáñez, 2013). Por su parte, las dificultades son agrupaciones de errores que comparten características similares. Por consiguiente, los obstáculos se refieren a conjuntos de dificultades que se convierten en conocimientos erróneos adquiridos por la persona, los cuales según Socas (1997) se manifiestan en forma de errores.

En este contexto, la investigación priorizó el análisis cognitivo al identificar, en primer lugar, los objetivos específicos de enseñanza del tema de funciones de varias variables a estudiantes de Economía. Este enfoque tiene como objetivo principal delimitar la forma en que se aborda dicho tema en el curso MAT050 Cálculo II para Economía. Además, buscó identificar posibles limitaciones en el aprendizaje, considerando el nivel de conocimiento alcanzado por la población estudiantil hasta el momento.

Así, en esta fase también se diseñaron las tareas, tomando en consideración la información recolectada. Para lo cual, se tienen en cuenta los siguientes componentes de una tarea propuestos por Flores et al. (2013):

a. Las instrucciones de la asignación.

b. Los objetivos de la asignación.
c. Los recursos y materiales que se planean utilizar.
d. Las capacidades que se esperan desarrollar.
e. El contenido matemático en cuestión.
f. La división del estudiantado en subgrupos de trabajo (si es necesario).
g. La interacción deseada entre docente – estudiante y pares.

En el contexto anterior, los recursos corresponden a medios que apoyan la ejecución de una tarea y fueron diseñados inicialmente con una finalidad ajena a la enseñanza de contenidos escolares. Mientras los materiales también asisten en el desarrollo de una asignación y se elaboraron con propósitos educativos.

2.2.4. Análisis de instrucción

El análisis de instrucción consiste en la identificación y descripción de las tareas que pueden utilizarse en el diseño de las actividades de enseñanza – aprendizaje (Gómez, 2002). Al respecto, una actividad de enseñanza – aprendizaje se define como el conjunto de tareas asignadas al estudiantado con el fin de lograr un aprendizaje deseado. Esta se basa en el contenido descrito en el análisis conceptual y examinado en el análisis de contenido, con el objetivo de alcanzar los objetivos señalados en el análisis cognitivo, tomando en consideración los posibles errores, dificultades y obstáculos identificados (Gómez, 2002). Es decir, el análisis de instrucción parte del estudio de la información obtenida en las fases anteriores.

Según Flores et al. (2013) este análisis se centra en la enseñanza y pretende la descripción de los medios que se emplean para lograr los objetivos establecidos. De modo que esta fase, además de suponer el diseño de las actividades de enseñanza – aprendizaje, también busca especificar su ejecución. Al respecto, Valenzuela et al. (2018) mencionan que el análisis de instrucción consiste en la transformación y adaptación de los datos obtenidos en análisis anteriores, con el propósito de determinar cómo y cuándo se lleva a cabo la implementación de estos.

Por consiguiente, este análisis implica el estudio de las tareas diseñadas en la fase anterior para agruparlas de acuerdo con el momento de la instrucción (inicio, desarrollo o cierre) en que se desee implementarlas. A propósito, Gómez (2002) establece los siguientes lineamientos para realizar las clasificaciones de dichos trabajos:

a. La comprensión del estudiantado.
b. El conocimiento alcanzado hasta entonces.
c. El desafío que se desea la asignación represente para el estudiantado.
d. La complejidad del aprendizaje que se desea lograr.

Esta organización de asignaciones debe dar paso a la conformación de actividades de enseñanza-aprendizaje coherentes con la información de los otros análisis. Así como, al establecimiento de las secuencias de tareas, que corresponden a un plan de trabajo para la persona con un orden didáctico adecuado (Valenzuela et al., 2018).

Por otra parte, la descripción de la actuación del profesorado sobre la ejecución de las actividades consiste en la organización de las clases; tomando en consideración los momentos por desarrollar, así como los materiales y recursos que se necesitarán. Para lo cual, en la planificación de las sesiones se contemplan los siguientes elementos propuestos por Flores et al. (2013):

a. El nombre y número de la sesión.
b. Los objetivos de aprendizaje por desarrollar en la sesión.
c. El contenido en cuestión de la sesión.
d. La relación de la sesión con clases previas o posteriores.
e. Lista de tares en orden de desarrollo.

De esta forma, en el presente trabajo de investigación, se considera el análisis de instrucción como un estudio cuidadoso de las tareas diseñadas en la fase anterior, con el objetivo de organizarlas en los diferentes momentos de la instrucción. Del mismo modo en que también establece el ordenamiento detallado de las sesiones que se emplearán para la enseñanza del tema de funciones de varias variables, con base en la propuesta diseñada en este estudio.

2.3. Conceptos asociados al tema de funciones de varias variables

En esta sección se precisan resumidamente los conceptos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables para su instrucción en el curso MAT050 Cálculo II para Economía. Estos representan la información base sobre la que se realizó el análisis didáctico llevado a cabo, en el cual se profundizó con un estudio detallado de las múltiples definiciones y representaciones a dichos conocimientos.

Función de varias variables

Sean n un número entero positivo, $\mathbb{R}^n$ un espacio numérico n-dimensional y $A \subseteq \mathbb{R}^n$. La relación $f: A \to \mathbb{R}$ que asocia cada n-tupla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ con un único número real $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ recibe el nombre de función de n variables (Stewart et al., 2021). En donde al conjunto A se le denomina dominio real de f y al conjunto que contiene todos los números reales $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ asociados a una n-tupla se le llama ámbito de f. Esta relación es la que posibilita la creación de la representación matemática de un fenómeno, lo anterior con la finalidad de predecir posibles resultados y, entonces, identificar condiciones óptimas para el mismo.

Derivada parcial de primer orden

Sean i un número entero positivo y $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La derivada parcial de primer orden de f respecto de x_i se denota de la manera $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y viene dada por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots,\ x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

siempre que el límite exista (Stewart et al., 2021). Este resultado permite determinar la razón de cambio de f respecto de x_i, es decir, la medida en que x_i se modifica en relación con las otras variables (Larson y Edwards, 2010).

Al considerar $n = 2$ y definir f de la manera $f(x, y) = z$, es posible interpretar geométricamente su derivada parcial. Para ello se toma $y = y_0$, con lo cual $f(x, y_0) = z$ es la curva formada por la intersección de la curva $f(x, y) = z$ y el plano $y = y_0$, y se tiene que

$\frac{\partial f\ (x_0,y_0)}{\partial x}$ corresponde a la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (Larson y Edwards, 2010). Similarmente, al tomar $x = x_0$, se define la interpretación geométrica correspondiente a $\frac{\partial f\ (x_0,y_0)}{\partial y}$.

Derivada parcial de segundo orden

Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$, tal que las funciones $\frac{\partial f\ (x_0,y_0)}{\partial x}: A \to \mathbb{R}$ y $\frac{\partial f\ (x_0,y_0)}{\partial y}: A \to \mathbb{R}$ existen. Si las derivadas parciales de primer orden de las funciones señaladas están bien definidas, se les conocen como las derivadas parciales de segundo orden de f. De acuerdo con Larson y Edwards (2010), estas vienen dadas tal como se muestra a continuación.

a. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$
b. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
c. $\frac{\partial^2 f}{\partial yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$
d. $\frac{\partial^2 f}{\partial yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

Las derivadas parciales de segundo orden de f pueden interpretarse geométricamente en relación con las derivadas parciales de primer orden de f, tal como se explicó anteriormente. Asimismo, se han utilizado en el establecimiento de criterios de clasificación de los extremos relativos de una función, por ejemplo, el criterio de la segunda derivada o del Hessiano Orlado para funciones de dos variables. El concepto de *extremo relativo* se describe en seguida.

Extremo relativo

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in f$. Se dice que f posee un mínimo relativo en (x_0, y_0) si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) cerca de (x_0, y_0), así como se dice que f posee un máximo relativo en (x_0, y_0) si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) cerca de (x_0, y_0) (Larson & Edwards, 2010). Es decir, los extremos relativos corresponden a los puntos de A en que $f(x, y)$ alcanza los valores más grandes y pequeños. Asimismo, para clasificar los extremos relativos en máximo, mínimo o punto de ensilladura (máximo en una dirección y mínimo en otra dirección), se hace uso de los criterios relacionados con las segundas derivadas parciales (Stewart et al., 2021).

Punto crítico

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in f$. El punto (x_0, y_0) se denomina punto crítico si $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$, o bien, si $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ no existen (Larson y Edwards, 2010). En otras palabras, este corresponde a un punto en el cual la derivada se anula o el límite no está bien definido, y su identificación permite el establecimiento de los posibles candidatos a extremos relativos de la función.

Optimización

La optimización se refiere a la búsqueda de la mejor manera posible de realizar una tarea (Real Academia Española, s.f., definición 1). Al considerarse el caso de las personas profesionales en economía, lo anterior se refiere a la habilidad de establecer modelos que les permitan analizar problemas en el campo e, idealmente, darles una solución. Estos modelos, en la mayoría de las ocasiones, se representan por medio de relaciones matemáticas, por lo cual la optimización en la formación de economistas pretende el dominio de conocimientos matemáticos y el desarrollo de la habilidad de aplicarlos en economía.

Específicamente, en los cursos de cálculo multivariable, optimizar se refiere a la capacidad de identificar extremos relativos de una función de varias variables con el fin de determinar condiciones ideales para modelos económicos que se hayan establecido (Klein, 2014). Por lo tanto, para efectos de esta investigación, se le considera como la acción que va desde la modelización de un fenómeno determinado por medio de una función de varias variables, hasta la identificación de los puntos críticos y extremos por medio de criterios que involucran el cálculo de sus derivadas parciales.

Capítulo III: Marco metodológico

En este capítulo, se exponen los procedimientos seguidos para el desarrollo de la presente investigación. Específicamente, se describe el diseño del estudio, las fuentes de información, las técnicas de recolección de datos y los métodos utilizados para analizarlos.

3.1. Diseño de la investigación

En el presente trabajo, se tomó como referencias las creencias y las teorías referentes al paradigma naturalista, el cual asume que tanto la persona encargada de la investigación como la población considerada, son las responsables de dar significado al objeto de estudio (Erlandson et al., 1993). Por tanto, en este caso se buscó diseñar una propuesta para la implementación del ABP en la enseñanza del cálculo multivariable a personas inscritas en la carrera Bachillerato en Economía, con base en ideas de estudiantes y de profesionales en el área, así como de información derivada de la revisión de material bibliográfico especializado.

Por otro lado, el estudio desarrollado se enmarcó en lo establecido por el enfoque cualitativo de investigación, de modo que buscó alcanzar el entendimiento de fenómenos del mundo real, sin que los valores de la persona a cargo de este manipularan el objeto de interés (Patton, 1990). Es decir, estaba orientado a la descripción, comprensión e interpretación de los datos que se obtuvieron. Pues como lo mencionan Hastie y Hay (2012), esta perspectiva investigativa es una forma interpretativa de análisis social que pretende comprender la realidad desde la visión de la población tomada como referencia.

La propuesta no pretendía la generalización de los resultados, ya que estos se limitan a estudiantes del curso MAT050 Cálculo II para Economía de la UNA, en la Sede Central – Campus Omar Dengo. En otras palabras, se realizó un estudio subjetivo y particularista, característico del enfoque cualitativo (Rodríguez, 2003). Procedimiento interactivo en donde cada una de las fases del análisis didáctico se complementó; sometiendo a una triangulación la información del análisis conceptual, el análisis de contenido y el análisis cognitivo, con el objetivo de confrontar y someter a control recíproco los datos necesarios para la elaboración del análisis de instrucción.

Finalmente, en la confección del trabajo se utilizó el método de investigación basado en el diseño. Este corresponde a una metodología flexible y sistemática destinada al beneficio de la práctica educativa por medio del análisis, desarrollo e implementación de propuestas metodológicas sensibles al contexto (Wang y Hannafin, 2005). Esto con el fin de contribuir en un proceso de mejora de las condiciones de aprendizaje en los cursos de servicio que la Escuela de Matemática brinda a otras unidades académicas de la UNA.

En relación con lo anterior, se identificaron las variables en estudio, que se describen más adelante, para desarrollar un perfil que caracteriza la propuesta. Se inició con el establecimiento de un plan general de trabajo e instrumentos no definidos totalmente, los cuales se adecuaron a lo largo del proceso en función de la dinámica y el contexto. Además, se desarrolló de modo tal que se logró adaptarle en el escenario considerado al diseño de otras investigaciones sobre la temática, así como la generación de pautas para la implementación de esta nueva propuesta. Lo último dando la posibilidad de que se pueda adaptar en entornos con condiciones de enseñanza y aprendizaje semejantes.

3.2. Fuentes de información

En el presente trabajo, con el fin de obtener la información necesaria para la elaboración de la propuesta, se tomó en cuenta tanto fuentes documentales como la opinión de estudiantes y docentes de Matemática y Economía. En primer lugar, para la realización del análisis conceptual, análisis de contenido y análisis cognitivo, se utilizó el programa del curso MAT050 Cálculo II para Economía empleado en el I ciclo del año 2022, así como el material de apoyo (presentaciones y listas de ejercicios) utilizado por el profesorado en la asignatura durante el mismo período. Del mismo modo, se consideraron libros de texto que abordan la temática en estudio.

Los libros de texto se conciben como documentos físicos o digitales diseñados con el propósito de asistir el desarrollo del currículo en las clases. Estos incluyen aspectos relevantes para la instrucción de los saberes que componen las áreas temáticas, por ejemplo, precisan su historia, brindan explicaciones y ejemplos, plantean actividades e incluso posibles evaluaciones, entre otros. Lo anterior siguiendo un orden lógico de ideas adecuado a la población a la cual están dirigidos.

A continuación, se describen los criterios de inclusión utilizados para seleccionar los libros de texto que formaron parte de la investigación.

a. El libro de texto pretende la enseñanza del cálculo en varias variables a estudiantes de Economía.
b. El libro de texto incluye conceptos asociados al cálculo en varias variables que aparecen en la carta a la persona estudiante del curso MAT050 Cálculo II para Economía.
c. El libro de texto está disponible puede consultarse de manera digital o física.
d. El libro de texto fue publicado a partir del año 2012.

En el proceso de selección, se consultaron las bibliotecas digitales y físicas de las universidades estatales del país, así como se realizaron búsquedas en bases de datos. Las fuentes documentales con elementos teóricos de mayor relevancia para la investigación, esto es, que tomaban en consideración la metodología del aprendizaje basado en la resolución de problemas, fueron priorizadas con el fin de seleccionar la cantidad de libros de texto deseada.

Por otra parte, con el objetivo de diseñar el análisis de instrucción, se entrevistó al estudiantado y a profesionales en las áreas de matemática y economía de la Sede Central en el Campus Omar Dengo de la UNA. En concreto, se buscó determinar el criterio de seis estudiantes, cuatro docentes de la Escuela de Matemática y dos docentes de la Escuela de Economía en relación con los resultados obtenidos en los análisis anteriores, además de discutir la posible distribución e implementación de las tareas matemáticas escolares en los diferentes momentos del proceso de enseñanza – aprendizaje.

A continuación, se describen los criterios de inclusión utilizados para seleccionar el profesorado de la Escuela de Matemática que formó parte de la investigación.

a. El profesorado laboró en la Escuela de Matemática en la Sede Central – Campus Omar Dengo de la UNA en el I ciclo 2022.
b. El profesorado impartió el curso MAT003 Cálculo II en los períodos I ciclo o II ciclo de los años 2018, 2019, 2020 o 2021.
c. Se excluyeron como participantes a las personas académicas que forman parte del comité asesor de este estudio.

En el proceso de selección del profesorado de la Escuela de Matemática, una vez identificada la población, se procedió a realizar un muestreo aleatorio simple para determinar las cuatro personas participantes en la investigación. A cada a docente se le consultó sobre la disposición y disponibilidad para colaborar en el estudio por medio de correo electrónico; una vez confirmada la anuencia a participar en el estudio, se procedió a coordinar las reuniones para realizar las entrevistas por el mismo medio.

A continuación, se describen los criterios de inclusión utilizados para seleccionar el profesorado de la Escuela de Economía para formó parte de la investigación.

a. El profesorado laboró en la Escuela de Economía en la Sede Central – Campus Omar Dengo de la UNA en el I ciclo 2022.
b. El profesorado impartió al menos uno de los siguientes cursos en los períodos I ciclo 2021 o II ciclo 2021:
   - ECF411 Econometría I
   - ECF412 Microeconomía III
   - ECF413 Macroeconomía III
   - ECF415 Economía Ambiental
   - ECF416 Econometría II
   - ECF417 Macroeconomía de Economías Abiertas
   - ECF418 Formulación y Evaluación de Proyectos
   - EFC419 Modelos Multisectoriales
   - ECF420 Economía Ecológica
   - ECF421 Econometría III
   - ECF422 Teorías del Desarrollo
   - ECF423 Comercio Internacional
   - ECF424 Economía del Sector Público
   - ECF425 Temas de Economía del Desarrollo
   - ECF426 Práctica Profesional Supervisada
   - ECF450 Taller de Investigación.

Esto con el propósito de garantizar que el profesorado tuviera conocimiento de la aplicabilidad del tema funciones de varias variables al área de economía, en contextos adecuados para estudiantes de dicha disciplina. Lo anterior, puesto que las asignaturas enlistadas previamente tienen como requisito la aprobación del curso MAT050 Cálculo II para Economía, en el cual la temática es estudiada por esta población.

En el proceso de selección del profesorado de la Escuela de Economía, una vez identificada la población se procedió a seleccionar por conveniencia las dos personas participantes en la investigación. A cada a docente se le consultó sobre la disposición y disponibilidad para colaborar en el estudio por medio de correo electrónico; una vez confirmada la anuencia a participar en el estudio, se procedió a coordinar las reuniones para realizar las entrevistas por el mismo medio.

A continuación, se describen los criterios de inclusión utilizados para seleccionar el estudiantado que formó parte de la investigación.

a. El estudiantado estaba empadronado en la carrera Bachillerato en Economía en la Sede Central – Campus Omar Dengo de la UNA en el I ciclo 2022.
b. El estudiantado aprobó el curso MAT050 Cálculo II para Economía en el I ciclo 2022.

Esto con el objetivo de asegurar que las y los estudiantes considerados en el estudio tuvieran una comprensión adecuada del tema de funciones de varias variables. Lo anterior, puesto que se partió de la premisa de que al aprobar la asignatura MAT050 Cálculo II para Economía se garantizaba un dominio suficiente del tópico.

En el proceso de selección del estudiantado, tras la identificación de la población objetivo, se llevó a cabo una selección por conveniencia de seis estudiantes para la investigación. Cada persona se contactó mediante correo electrónico con el fin de determinar su disposición y disponibilidad para colaborar en el estudio. Una vez obtenida su confirmación, se procedió a coordinar las entrevistas utilizando el mismo medio de comunicación para coordinar los detalles.

3.3. Técnica de recolección de información

En el presente trabajo de investigación, se consideraron las técnicas de recolección de información que se describen a continuación. Estas se seleccionaron de acuerdo con los objetivos planteados en el Capítulo I y la teoría del análisis didáctico señalada en el Capítulo II. En concreto, para la elaboración del análisis conceptual, análisis de contenido y análisis cognitivo se desarrolló un análisis documental apoyado de fichas bibliográficas, y en el caso del análisis de instrucción se realizaron entrevistas semiestructuradas a estudiantes de la carrera Bachillerato en Economía y docentes de la Escuela de Matemática y Escuela de Economía.

3.3.1. Análisis documental

En el trabajo se llevó a cabo un análisis documental con la finalidad de elaborar el análisis conceptual, análisis de contenido y análisis cognitivo. Este es un estudio cuidadoso de la información presente en los documentos seleccionados, que se basa en la utilización de fichas bibliográficas para lograr dicho propósito (Bernal, 2010). Las fichas bibliográficas son herramientas que hacen posible recopilar, organizar y almacenar los datos de interés obtenidos al consultar las fuentes documentales (Huergo-Tobar, 2015).

Aunado a lo anterior, por medio del análisis documental se extrajo, en relación con la temática, definiciones, conceptos, terminología básica, procedimientos, representaciones, aplicaciones, objetivos de enseñanza, limitantes en el aprendizaje y tareas matemáticas escolares. No obstante, a fin de realizar un trabajo de calidad, se siguió la recomendación de Bernal (2010) de utilizar simultáneamente otra técnica de recolección de información para contrastar y complementar los datos. Por lo tanto, se efectuaron entrevistas semiestructuradas a estudiantes de la carrera Bachillerato en Economía y docentes de la Escuela de Matemática y de la Escuela de Economía.

3.3.2. Entrevistas semiestructuradas

Las entrevistas semiestructuradas corresponden a una serie de preguntas formuladas con el objetivo de obtener información de personas a través del establecimiento de un contacto directo (Bernal, 2010). En el caso de esta investigación, el acercamiento se realizó tanto de manera presencial como virtual, y se solicitó la debida autorización (ver Anexo 1) para grabárseles y luego transcribir las respuestas, que fueron de uso exclusivo del estudio. Además, es importante señalar que el guion de la entrevista es un instrumento flexible, es decir, da espacio a la formulación de nuevas interrogantes durante el desarrollo de esta (Bernal, 2010). Lo anterior con la finalidad de profundizar en aspectos de interés para el estudio.

La finalidad de la realización de entrevistas semiestructuradas en el trabajo correspondía a la valoración de la idoneidad de las tareas matemáticas escolares recopiladas en el análisis documental, las cuales se pretendía utilizar en la propuesta de proyecto. Del mismo modo, en estas se identificaron mejoras en el planteamiento de las mismas, lo que permitió la elaboración de las actividades de enseñanza-aprendizaje. Adicionalmente, se consultó al profesorado sobre la distribución de las sesiones de clase que se requieren durante la ejecución del proyecto. En otras palabras, la implementación de esta técnica de recolección de la información hizo posible el diseño del análisis de instrucción.

3.4. Recolección de la información

En la presente investigación, con la finalidad de recoger los datos necesarios para el diseño de la propuesta, se siguió el procedimiento descrito a continuación. Este se estableció en relación con las técnicas de recolección de la información señaladas en el apartado anterior. En consecuencia, también se describen los instrumentos de recolección de la información asociados a cada una de ellas. Por lo tanto, en lo que respecta al análisis documental, se detallan con mayor precisión las fichas bibliográficas, y en el caso de las entrevistas semiestructuradas, se abordan las guías de entrevista.

En primer lugar, las fichas bibliográficas se utilizaron en el manejo de los datos requeridos para la elaboración de las primeras tres fases del análisis didáctico, los cuales se obtuvieron de las fuentes documentales seleccionadas. Este instrumento de recolección de información se asocia al análisis documental y en seguida es caracterizado detalladamente.

3.4.1. Fichas bibliográficas

Del mismo modo en que se señaló previamente, las fichas bibliográficas son herramientas que hicieron posible la recopilación, la organización y el almacenamiento de la información presente en las fuentes documentales consultadas; lo que resultó indispensable en la confección del análisis conceptual, análisis de contenido y análisis cognitivo. En otras palabras, estas corresponden a documentos digitales y físicos en los que se recolectó y sistematizó los datos necesarios para concretar el estudio.

En este trabajo, la ficha bibliográfica está constituida por dos partes. La primera dirigida a la recopilación de la información general del documento, es decir, el título, las personas autoras, el tipo de documento (programa de curso, material de apoyo utilizado por docentes o libro de texto), la fecha de publicación y la fecha de consulta. La segunda destinada a la recolección de los datos de interés en relación con el contenido matemático de la fuente.

La segunda parte de la ficha bibliográfica se dividió en tres subsecciones correspondientes a cada uno de los primeros análisis por realizar. En resumen, la herramienta se confeccionó a la luz de la información en el Capítulo II sobre las primeras tres componentes del análisis didáctico. La validación de esta se determinó a partir de una revisión exhaustiva por parte del comité asesor de la presente investigación. Asimismo, el instrumento puede ser consultado en la sección de anexos, específicamente, corresponde al Anexo 1. Las fichas bibliográficas completadas para cada análisis están disponibles en la misma sección, identificadas como Anexo 2.

En segundo lugar, tal como se mencionó con anterioridad, la aplicación de las entrevistas semiestructuras tenía dos finalidades; la validación de los resultados obtenidos en el análisis conceptual, análisis de contenido y análisis cognitivo, así como la recolección de datos necesarios para el diseño del análisis de instrucción. Por consiguiente, estas se llevaron a cabo en dos momentos, cada uno orientado a uno de los propósitos señalados.

En el primer momento de las entrevistas, tanto el estudiantado como el profesorado evaluó la pertinencia de las tareas matemáticas escolares planteadas con base en la información del análisis documental. Asimismo, se recibieron sugerencias en busca de una mayor adecuación a los objetivos establecidos para estas. Del mismo modo, se discutió sobre posibles limitantes en el aprendizaje de la temática. En el segundo momento, se realizó una revisión de las correcciones efectuadas, se determinó la organización de las actividades de enseñanza-aprendizaje y se identificó aspectos de la actuación docente durante la ejecución de la propuesta.

Por otra parte, cabe rescatar que se hizo uso de guías de entrevista para moderar el desarrollo de las entrevistas. Este instrumento de recolección de información se describe en seguida.

3.4.2. Guía de entrevista

La guía de entrevista corresponde a un guion que toma en consideración el tema por tratar, el tipo de entrevista por realizar y las personas que se entrevistarán (Bernal, 2010). Es decir, es un escrito breve, ordenado y digital o físico en donde se concentran las ideas principales que orientan el desarrollo del acercamiento.

Este instrumento de recolección de información es susceptible a modificaciones durante su puesta en práctica en concordancia con las respuestas de las personas entrevistadas. En tal sentido, es posible cambiar el formato, orden y protocolo prestablecido de la guía de entrevista. Además, en caso de considerarse necesario y con el objetivo de profundizar en la información recogida, se puede ahondar en los ejes temáticos a través de la formulación de nuevas interrogantes en el transcurso de la aplicación.

En el presente estudio, las guías de entrevista para el estudiantado y profesorado fueron creadas de conformidad con lo expuesto en el Capítulo II acerca del análisis de instrucción, así como de los resultados obtenidos del análisis documental. Además, estas fueron sometidas a una revisión exhaustiva por parte de docentes especializados en estadística de la Escuela de Matemática de la UNA, quienes tomaron en consideración los objetivos del estudio en cuestión y de las entrevistas en el mismo, con la finalidad de determinar la validez del instrumento.

La única recomendación de fondo hecha por los profesionales consistía en la inclusión de preguntas abiertas en caso de respuestas afirmativas a las preguntas cerradas del instrumento. Esto se sugería con el propósito de obtener más información para enriquecer el trabajo y evaluar con precisión la idoneidad de las tareas matemáticas escolares seleccionadas.

El consentimiento informado para las entrevistas y la guía utilizada durante su realización están disponibles en la sección de anexos, concretamente en el Anexo 3 y el Anexo 4. Las transcripciones de las respuestas obtenidas en cada entrevista se adjuntan en el Anexo 5.

Por último, es importante mencionar que como parte de la propuesta se formuló un proyecto bajo la modalidad de laboratorio tradicional. Lo cual significa que este se encuentra orientado a la verificación de hechos con base en conocimientos introducidos previamente en las sesiones de clase. Lo anterior, debido a que de esta manera se lograría relacionar el ABP con las otras metodologías planteadas en el curso MAT050 Cálculo II para Economía. Asimismo, a través de los análisis que se llevó a cabo fue posible desarrollar adecuadamente la planificación de este, describiendo en el análisis de instrucción la actuación del profesorado deseada y sugerencias para una posible evaluación de la asignación.

3.5. Análisis de la información

En este estudio, la información recolectada se analizó mediante un análisis didáctico de las fuentes documentales y un análisis descriptivo de las entrevistas semiestructuradas. El análisis didáctico es un procedimiento por medio del cual se estudiaron con detalle aspectos relacionados al cálculo en varias variables. Lo anterior, con el propósito de diseñar, llevar a la práctica y evaluar las actividades de enseñanza-aprendizaje. En la presente investigación, únicamente se planeó desarrollar las primeras cuatro componentes que integran el método, es decir, análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción.

En la investigación se consideraron las categorías y los indicadores señalados en la Tabla 1. Estos se establecieron en concordancia con los objetivos específicos del estudio y los descritos en el Capítulo II en relación con el análisis didáctico. Es importante mencionar que lo propuesto inicialmente fue complementado por categorías e indicadores emergentes que surgieron durante la recolección de la información.

Tabla 1

Categorías e indicadores de análisis de información

Categoría	Definición	Indicador
Análisis conceptual	Profundización en los significados de los conceptos asociados al cálculo en varias variables, así como en las propiedades de estos.	Definiciones Propiedades
Análisis de contenido	Estudio de la estructura conceptual, los sistemas de representación y los aspectos fenomenológicos del tema funciones de varias variables.	Hechos Conceptos Procedimientos Sistemas de representación Contextos
Análisis cognitivo	Identificación de los objetivos de la enseñanza del tema funciones de varias variables, así como de las limitantes y oportunidades en el aprendizaje de este.	Objetivos Obstáculos Tareas matemáticas escolares
Análisis de instrucción	Organización y especificación de las tareas matemáticas escolares y el establecimiento de un ordenamiento detallado de las sesiones que se emplearán para la enseñanza del tema funciones de varias variables.	Actividades de enseñanza - aprendizaje Recursos Materiales Actuación del profesorado

Nota. Elaboración propia basada en Análisis didáctico y metodología de investigación de Rico y Fernández-Cano (2013).

Adicionalmente, tal como se mencionó, se llevó a cabo un análisis descriptivo de la información recolectada en las entrevistas semiestructuradas. El cual pretendía corroborar la pertinencia de los datos recopilados en el análisis conceptual, análisis de contenido y análisis cognitivo; así como sintetizar la información requerida en la elaboración del análisis de instrucción.

En concreto, se validaron las tareas matemáticas escolares resultantes de las primeras tres fases del análisis didáctico, y se complementó la información recolectada en relación con las posibles limitantes en la ejecución de estas. Además, se determinó el ordenamiento de las actividades de enseñanza-aprendizaje y se caracterizó la actuación docente deseada.

Lo anterior, permitió someter a un proceso de triangulación las fases del análisis didáctico. En donde triangulación hace referencia a la utilización de formas alternativas y complementarias para la obtención de los datos (Silvio, 2009). Esto posibilitó el estudio de los datos desde diferentes perspectivas teóricas para garantizar su validez y confiabilidad.

Capítulo IV: Análisis didáctico

En este capítulo se presenta el análisis didáctico del tema de funciones de varias variables, resultado del análisis documental y las entrevistas semiestructuradas realizadas.

4.1. Análisis conceptual

En seguida, se realiza un estudio detallado de los significados asignados a los conceptos relacionados con el tema de funciones de varias variables, lo anterior desde diferentes perspectivas y niveles. Para ello se desarrolla una revisión exhaustiva de los libros de texto *Calculus: Early Transcendentals* y *Mathematical Methods for Economics*, así como del material de apoyo utilizado por el profesorado en el curso MAT050 Cálculo II para Economía en el período I ciclo 2022.

En el caso de los libros de texto, se seleccionaron documentos disponibles de forma digital, los cuales guardan una cercana relación con los principios de diseño que establece el ABP (hacer los conocimientos visibles, visibilizar el pensamiento del estudiantado, promover el aprendizaje cooperativo y fomentar la autonomía y el aprendizaje para la vida). En cuanto al material de apoyo del curso, se tomaron como referencia documentos elaborados por docentes para la presentación de los conceptos al estudiantado y listas de ejercicios diseñadas con el propósito de ponerlos en práctica.

Asimismo, es necesario señalar que los conceptos que aparecen a continuación se seleccionaron con base en lo expuesto en la carta a la persona estudiante, documento semejante a un plan de estudios, del curso MAT050 Cálculo II para Economía. De acuerdo con esta, los siguientes términos deben discutirse en la asignatura con la finalidad de alcanzar la optimización en varias variables. Las definiciones se organizan por concepto y cronológicamente de acuerdo con la fecha de publicación, según la fecha de publicación del documento consultado.

Función de varias variables

- Una función multivariable es aquella que tiene más de una variable como argumento (Klein, 2014).
- Una función f de n variables corresponde a una regla que asigna un único número real denotado $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a cada n-tupla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reales de un conjunto D (Stewart et al., 2020).
- Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, con n un entero positivo. Se define $f: A \to \mathbb{R}$ como una función de n variables, si f es una relación que asocia a cada n-tupla $a \in A$ un único elemento $b \in B$, donde $f(a) = b$ (Sequeira y Ramírez, 2022).

Dominio real de funciones de varias variables

- El conjunto D de la definición de función de n variables corresponde al dominio de f (Stewart et al., 2020).
- Al conjunto A, de la definición de función de n variables, se le denomina dominio de f y se suele denotar como D_f (Sequeira y Ramírez, 2022).

Derivadas parciales de primer orden

- La derivada parcial de una función $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con respecto al argumento x_i se denota $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ y viene dada por $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta_{x_i} \to 0} \frac{f\left(x_1, \dots, x_i + \Delta_{x_i}, \dots, x_n\right) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta_{x_i}}$, siempre que el límite exista (Klein, 2014).
- Sea f una función de n variables, la derivada parcial de primer orden con respecto a la i-ésima variable x_i viene dada por el límite $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$, siempre que este exista (Stewart et al., 2020).
- Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de n variables, f posee n derivadas parciales de primer orden dadas por $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, donde $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$ (Sequeira y Ramírez, 2022).

Derivada de segundo orden

- La derivada parcial de segundo orden determina la medida en que la derivada parcial de primer orden de una función multivariable con respecto a un argumento cambia al realizar una pequeña variación en este, o bien, al realizar una pequeña variación en el otro argumento (Klein, 2014).
- De acuerdo con Stewart et al. (2020), dada f una función de dos variables cuyas derivadas parciales de primer orden f_x y f_y también corresponden a funciones de dos variables, las derivadas parciales de primer orden de estas últimas corresponden a las derivadas parciales de segundo orden de f y se denotan de la siguiente manera:
    - $(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
    - $(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
    - $(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
    - $(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

- Sea $f: A \to \mathbb{R}$ de dos variables tal que sus derivadas parciales existen, y a su vez las derivadas parciales de estas también existen. Las derivadas parciales de orden dos de f son:
    - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \coloneqq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, con notación alternativa: f_{xx}
    - $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \coloneqq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, con notación alternativa: f_{yy}
    - $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \coloneqq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, con notación alternativa: f_{xy}
    - $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \coloneqq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, con notación alternativa: f_{yx}

  Adicionalmente, a las derivadas f_{xy} y f_{yx} se les conoce como las derivadas mixtas o cruzadas (Sequeira y Ramírez, 2022).

Regla de la cadena

- Si los argumentos de una función diferenciable $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son a su vez funciones diferenciables de las variables $t_1, \dots, t_m$ tales que $x_1 = g^1(t_1, \dots, t_m)$, $x_2 = g^2(t_1, \dots, t_m)$, …, $x_n = g^n(t_1, \dots, t_m)$, donde $g^i(t_1, \dots, t_m)$ es la i-ésima función multivariable, entonces $\frac{\partial y}{\partial t_i} = f_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + f_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + f_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$ con $f_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$ (Klein, 2014).
- Sea f una función de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ diferenciable, tal que cada x_j es una función de m variables $t_1, t_2, \dots, t_m$ diferenciable. Entonces f es una función m variables $t_1, t_2, \dots, t_m$ y $\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$ con $i = 1, 2, \dots, m$ (Stewart et al., 2020).
- De acuerdo con Sequeira y Ramírez (2022), dada $z = f(u, v)$ una función diferenciable tal que $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$ son funciones para las cuales existen las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$. Entonces, z es una función de x y y, y además:
    - $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$
    - $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$

Extremos locales

- Sea f una función de dos variables, f posee un máximo local en (a, b) si $f(x, y) \leq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b) y el número $f(a, b)$ se denomina valor máximo local. Si $(x, y) \geq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b), entonces f posee un mínimo local en (a, b) y $f(a, b)$ se denomina valor mínimo local (Stewart et al., 2020).
- Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables y $P = (x_0, y_0)$ un punto que pertenece a su dominio. Se dice que f alcanza un máximo relativo o máximo local en P, si existe una región abierta B de A, que contiene a P, tal que: $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall(x, y) \in B$ (Sequeira y Ramírez, 2022).
- Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables y $P = (x_0, y_0)$ un punto que pertenece a su dominio. Se dice que f alcanza un mínimo relativo o mínimo local en P, si existe una región abierta B de A, que contiene a P, tal que: $f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \forall(x, y) \in B$ (Sequeira y Ramírez, 2022).

Punto de ensilladura

- Si las derivadas parciales f_{11} y f_{22} poseen signos opuestos (una es positiva y la otra es positiva) en un punto estacionario, este se conoce como punto de ensilladura (Klein, 2014).
- Sea (a, b) es un punto crítico de f tal que este no corresponde a un máximo local o mínimo local de f. Al punto (a, b) se le conoce como un punto de ensilladura de f (Stewart et al., 2020).
- Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables y $P = (x_0, y_0)$ un punto que pertenece a su dominio. Se dice que f alcanza un punto silla o punto de ensilladura en P, si para toda región abierta B de A, que contiene a P, se cumple que existen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B$ tales que $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_O) < f(x_2, y_2)$ (Sequeira y Ramírez, 2022).

Extremos absolutos

- De acuerdo con Stewart et al. (2020), dado (a, b) un punto del dominio D de una función f de dos variables se tiene que $f(a, b)$ corresponde a:
  - Un valor máximo absoluto de f en D si $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo (x, y) en D.
  - Un valor mínimo absoluto de f en D si $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todo (x, y) en D.

Criterio de la matriz Hessiana

- Si la función $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ posee un punto estacionario $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ y la matriz Hessiana evaluada en este es definida negativa, entonces en $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ se alcanza un máximo local de y (Klein, 2014).
- Si la función $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ posee un punto estacionario $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ y la matriz Hessiana evaluada en este es definida positiva, entonces en $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ se alcanza un mínimo local de y (Klein, 2014).
- Si la función $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ posee un punto estacionario $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ y la matriz Hessiana no es definida positiva ni definida negativa, entonces $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ corresponde a un punto de ensilladura de y (Klein, 2014).
- De acuerdo con Sequeira y Ramírez (2022), considérese $f: A \to \mathbb{R}$ una función de n variables con derivadas parciales de segundo orden continuas en A, con A abierto. Supóngase además que P es una n-tupla de A tal que $\nabla f(P) = 0$. Entonces, considerando $H_f(P)$ la matriz Hessiana evaluada en P y $\Delta_n(P)$ el determinante de la matriz Hessiana evaluado en P, se cumple que:
    - Si $H_f(P)$ es definida positiva, entonces f alcanza un mínimo relativo en P.
    - Si $H_f(P)$ es definida negativa, entonces f alcanza un máximo relativo en P.
    - Si $H_f(P)$ no es definida positiva ni definida negativa, entonces:
        - Si $\Delta_n(P) \neq 0$, entonces P es un punto silla de f.
        - Si $\Delta_n(P) = 0$, entonces el criterio no define.

Método de los multiplicadores de Lagrange

- El problema de optimización con restricciones correspondiente al Lagrangiano se resuelve al solucionar el sistema de ecuaciones que se obtienen de las derivadas parciales de primer orden de este con respecto a cada uno de los argumentos de la función objetivo igualadas a cero y la restricción de igualdad $\left(\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial_{x_1}} = 0, \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial_{x_2}} = 0, \dots, \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial_{x_n}} = 0, g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_m\right)$ (Klein, 2014).

- De acuerdo con Stewart et al. (2020), para encontrar los valores máximos y mínimos de $f(x, y)$ de acuerdo con la restricción $g(x, y) = k$ se debe [asumiendo que estos valores extremos existen y las primeras derivadas parciales de g son distintas de cero en la superficie $g(x, y) = k$]:
    - Encontrar los valores de x, y y λ que satisfacen las siguientes ecuaciones:
    - $f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad g(x, y) = k.$
    - Evaluar f en todos los puntos (x, y) obtenidos en el paso anterior. El punto en donde se obtenga el valor más grande se alcanza un valor máximo de f; en el valor más pequeño un valor mínimo de f.
- De acuerdo con Stewart et al. (2020), para encontrar los valores máximos y mínimos de $f(x, y)$ de acuerdo con la restricción $g(x, y) = k$ y $h(x, y) = c$ se debe:
    - Encontrar los valores de x, y, λ y μ que satisfacen las siguientes ecuaciones: $f_x = \lambda g_x + \mu h_x$, $f_y = \lambda g_y + \mu h_y$, $g(x, y) = k$ y $h(x, y) = c$.
    - Evaluar f en todos los puntos (x, y) obtenidos en el paso anterior. El punto en donde se obtenga el valor más grande se alcanza un valor máximo de f; en el valor más pequeño un valor mínimo de f.
- La idea del método de los multiplicadores de Lagrange es definir una nueva función L, que considera la información de f y g (restricción) a la vez. De esta forma, los extremos relativos de f que satisfacen que $g(x, y) = 0$, son determinados al hallar los extremos relativos de L, mediante la búsqueda de sus puntos críticos (Sequeira y Ramírez, 2022).

Criterio de la segunda derivada

- Si la función $y = f(x_1, x_2)$ posee un punto estacionario (x_1^*, x_2^*), $f_{11}(x_1^*, x_2^*) < 0$ y $f_{11}(x_1^*, x_2^*) f_{22}(x_1^*, x_2^*) > (f_{12}(x_1^*, x_2^*))^2$, entonces la función alcanza un máximo local en este punto estacionario (Klein, 2014).
- Si la función $y = f(x_1, x_2)$ posee un punto estacionario (x_1^*, x_2^*), $f_{11}(x_1^*, x_2^*) > 0$ y $f_{11}(x_1^*, x_2^*) f_{22}(x_1^*, x_2^*) > (f_{12}(x_1^*, x_2^*))^2$, entonces la función alcanza un mínimo local en este punto estacionario (Klein, 2014).
- Si las derivadas parciales f_{11} y f_{22} poseen signos opuestos (una es positiva y la otra es negativa) en un punto estacionario, este se conoce como punto de ensilladura (Klein, 2014).

- De acuerdo con Stewart et al. (2020), si se supone que las derivadas parciales de segundo orden de f son continuas en un disco de centro (a,b) y $f_x(a,b)=0$ y $f_y(a,b)=0$ y se define $D=D(a,b)= f_{xx}\,(a,b)\,f_{yy}\,(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2$, se tiene que:
    - Si $D>0$ y $f_{xx}\,(a,b)\ >\ 0$, entonces $f(a,b)$ es un valor local mínimo.
    - Si $D>0$ y $f_{xx}\,(a,b)\ <\ 0$, entonces $f(a,b)$ es un valor local máximo.
    - Si $D<0$, entonces (a,b) es un punto de ensilladura.
- De acuerdo con Sequeira y Ramírez (2022), si se considera $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dos variables con derivadas parciales de segundo orden continuas en A, con A abierto. Suponiéndose además que $P=(x_0,y_0)$ es un punto de A tal que $\nabla f(x_0,y_0)=0$ y que el determinante de la matriz Hessiana $H_f(x_{01}y_0)$ se denota de la forma $\Delta(P)$. Entonces, se cumple que:
    - Si $\Delta(P)>0$, entonces:
        - Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)>0$, entonces f alcanza un mínimo relativo en P.
        - Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)<0$, entonces f alcanza un máximo relativo en P.
    - Si $\Delta(P)<0$, entonces P no es un extremo relativo de f, ya que es un punto silla.
    - Si $\Delta(P)=0$, entonces el criterio no define. Es decir, P podría ser un extremo relativo o no serlo, pero no es posible establecer una conclusión a través de este criterio.

Criterio del Hessiano orlado

- Si se considera el Lagrangiano de una función objetivo de n variables sujetas a m restricciones y el determinante de la matriz Hessiana orlada evaluada en un punto estacionario determinado tiene el mismo signo que $(-1)^n$ y los $n-m$ menores principales alternan el signo, en este punto estacionario se alcanza un máximo (Klein, 2014).
- Si se considera el Lagrangiano de una función objetivo de n variables sujetas a m restricciones y el determinante de la matriz Hessiana orlada evaluada en un punto estacionario determinado y los $n-m$ menores principales tienen el mismo que $(-1)^m$, en este punto estacionario se alcanza un mínimo (Klein, 2014).

- Si las condiciones descritas en los dos puntos anteriores no se cumplen para menores principales no nulos, el punto estacionario no representa un valor mínimo ni un valor máximo de la función (Klein, 2014).
- De acuerdo con Sequeira y Ramírez (2022), si consideran $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función de n variables tal que todas sus derivadas parciales de segundo orden son continuas en A, $g_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1,2, \dots, m$ restricciones (funciones al menos con las primeras derivadas parciales continuadas) tal que $m < n$ y P un punto crítico del Lagrangiano, se cumple que:
    - Si $(-1)^m \Delta_i(P) > 0$ para $i = m + 1, \dots, n$, entonces en P se alcanza un mínimo relativo de f sujeto a $g_i(x_1, \dots, x_n)$ para $i = 1, \dots, m$.
    - Si $(-1)^i \Delta_i(P) > 0$ para $i = m + 1, \dots, n$, entonces en P se alcanza un máximo relativo de f sujeto a $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Finalmente, es necesario señalar que también se recopilaron caracterizaciones de los conceptos descritos, así como definiciones complementarias. Estas pueden ser consultadas en las fichas bibliográficas que se adjuntan en la sección de anexos (Anexo 2).

4.2. Análisis de contenido

En seguida, se realiza un estudio de las definiciones recopiladas en el análisis conceptual con la finalidad de identificar aquellas caracterizaciones importantes para el tema de funciones de varias variables. La información se organiza en la estructura conceptual (campo conceptual y campo procedimental), los sistemas de representación y el análisis fenomenológico.

En la estructura conceptual se señalan los conceptos y los procedimientos que se relacionan entre sí durante el estudio de la temática. En el segundo organizador, se mencionan las maneras en que dichos conceptos pueden ser representados y se citan ejemplos. De acuerdo con la información extraída de las fuentes documentales, se describen representaciones numéricas, algebraicas, verbales, gráficas, tabulares e icónicas. Finalmente, en el análisis fenomenológico se enlistan los fenómenos que permiten mostrar le aplicabilidad en diferentes escenarios de los conceptos asociados al tema de funciones de varias variables.

4.2.1. Estructura conceptual

4.2.1.1. Campo conceptual.

En la Tabla 2, se enlistan los conocimientos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables. Adicionalmente, se les clasifica en los niveles: hechos, conceptos y estructuras conceptuales.

Tabla 2

Campo conceptual del tema funciones de varias variables

<table>
<tr><th>Nivel</th><th>Conocimiento matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Hechos</td><td>Términos
Número real / constante, regla matemática, función, tupla, variable, espacio numérico, conjunto, dominio, rango / ámbito, gráfica, punto, curva de nivel, curva, límite, ecuación, diferenciabilidad, vector, función vectorial, vector gradiente, punto crítico, extremo local, punto de ensilladura, extremo absoluto, continuidad, disco, restricción, conjunto acotado, conjunto cerrado y conjunto compacto.</td></tr>
<tr><td>Notaciones
f, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $z = f(x, y)$, D, D_f, $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, f_{x_i}, $(f_x)_x$, f_{xx}, f_{11}, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $(f_x)_y$, f_{xy}, f_{12}, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\left(f_y\right)_x$, f_{yx}, f_{21}, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\left(f_y\right)_y$, f_{yy}, f_{22}, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, H_L, Δ_i, L, $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - c_i\right)$.</td></tr>
<tr><td>Convenios
Dado $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, se utilizan las notaciones $z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ y $z = f(x)$, siempre que no haya posibilidad de confusión.

En el caso de $n = 2$, se puede escribir $z = f(x, y)$ en lugar de $z = f(x_1, x_2)$, mientras que para $n = 3$ se suele escribir $w = f(x, y, z)$ en vez de $z = f(x_1, x_2, x_3)$.

El término “proyectadas” significa que cada curva de nivel C_k, la cual se encuentra a una altura k respecto al plano xy, es trasladada desde $z = k$ hasta $z = 0$.</td></tr>
</table>

Nivel	Conocimiento matemático
	La derivada parcial de una función multivariable con respecto a uno de sus argumentos se encuentra aplicando las reglas de derivación en una variable y tratando todos los otros argumentos de la función como constantes. Al determinante de la matriz Hessiana, es decir, $\Delta(x,y) \coloneqq \det(H_f(x,y))$, se le conoce como el Hessiano de f.
	Resultados El dominio de definición es el conjunto de los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x,y)$ produce valores en $\mathbb{R}$. Si f es una función de n variables, entonces esta posee n^m derivadas parciales de orden m, siempre que estas existan. Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función polinomial de grado total m, entonces todas sus derivadas parciales también son funciones polinomiales y, por tanto, las derivadas parciales de orden superior a $m+1$ son todas cero. Teorema de Schwarz Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, con A un conjunto abierto. Más aún, sea $P = (x_0, y_0) \in A$ un extremo relativo de f. Si f posee derivadas parciales continuas en A, entonces se cumple que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Si f es una función de n variables, se tiene que $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un punto crítico, si $\nabla f(P) = 0$. Si $f: A \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables cuyas derivadas parciales de orden dos son continuas en un punto $(x_0, y_0) \in A$, entonces las derivadas parciales cruzadas f_{xy} y f_{yx} son iguales en (x_0, y_0). Esto implica que la matriz Hessiana $H_f(x_0, y_0)$ es una matriz simétrica. En el caso que $\Delta(P) > 0$, no puede ocurrir que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 0$. Si $\Delta_k(x) > 0$ para cada $k = 1,2, \dots, n$, entonces se dice que $H_f(P)$ es una matriz definida positiva. Si $(-1)^k \Delta_k(P) > 0$ para cada $k = 1,2, \dots, n$, entonces se dice que $H_f(P)$ es una matriz definida negativa. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de n variables, con A un conjunto compacto. Entonces f posee un máximo y un mínimo absolutos en A.
Conceptos	Función de varias variables, dominio real de funciones de varias variables, derivada parcial de primer orden, derivada parcial de segundo orden, regla de la cadena, extremos locales, punto de ensilladura, extremos absolutos, criterio

Nivel	Conocimiento matemático
	de la matriz Hessiana, método de los multiplicadores de Lagrange, criterio de la segunda derivada y criterio del Hessiano Orlado.
Estructuras conceptuales	Optimización en varias variables

Nota. Elaboración propia.

La información expuesta en la Tabla 2 permitió establecer conclusiones importantes para el desarrollo de la propuesta. En primer lugar, hizo posible la identificación de los conceptos de menor nivel complejidad (términos), en comparación a los conceptos asociados a al tema de funciones de varias variables (conceptos), que la persona estudiante debe de conocer para lograr un adecuado entendimiento. Asimismo, facilitó el reconocimiento de reglas (convenios), propiedades de los conceptos (resultados) y representaciones (notaciones) por considerar para lograr una comunicación adecuada de los conocimientos matemáticos. En último lugar, señaló las consecuencias de la consideración de relaciones entre los conceptos y las caracterizaciones de estos (estructuras conceptuales).

4.2.1.2. Campo procedimental.

En la Tabla 3, se enlistan los procedimientos relacionados con los conocimientos matemáticos asociados al tema funciones de varias variables. Adicionalmente, se les clasifica en los niveles: destrezas, razonamientos y estrategias.

Tabla 3

Campo procedimental del tema funciones de varias variables

Nivel	Procedimiento
Destrezas	Evaluar un punto en el criterio de una función de n variables. Dibujar un boceto del dominio de una función de n variables a mano y por medio de un programa computacional.

Nivel	Procedimiento
	Identificar puntos de una función de n variables en todas sus representaciones.
Razonamientos	Encontrar el dominio de una función de n variables. Dibujar un boceto de la gráfica de una función de 2 variables a mano y por medio de un programa computacional. Aproximar puntos de una función de n variables a través de su mapa de contorno. Dibujar un boceto de las curvas de nivel de una función de n variables para determinados valores de la constante k. Dibujar un boceto de las curvas de nivel de una función de n variables. Encontrar las derivadas parciales de una función de n variables. Utilizar la regla de la cadena para determinar la derivada parcial de una función de n variables compuestas. Interpretar geométricamente las derivadas parciales de una función de n variables. Identificar el vector gradiente de una función de n variables. Identificar puntos críticos de una función de n variables. Identificar los extremos locales de una función de n variables. Utilizar el criterio de la segunda derivada para determinar los extremos locales de una función de n variables, o bien, los puntos de ensilladura. Identificar extremos absolutos de una función. Identificar los extremos locales de una función de n variables sujetas a una o varias restricciones por medio del método de los multiplicadores de Lagrange.
Estrategias	Modelar problemas de contextos reales que involucran funciones multivariables.

Nivel	Procedimiento
	Resolver problemas en contextos reales que involucran funciones de n variables.

Nota. Elaboración propia.

La información expuesta en la Tabla 3 permitió establecer conclusiones importantes para el desarrollo de la propuesta. Específicamente, hizo posible la identificación de procedimientos que se deben emplear para la resolución de problemas sobre los conocimientos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables. Estos se agruparon de acuerdo con la demanda cognitiva que suponen para la persona estudiante; lo cual facilitó la selección de tareas matemáticas escolares que conforman el proyecto, de manera que el nivel de complejidad de la asignación sea apropiado.

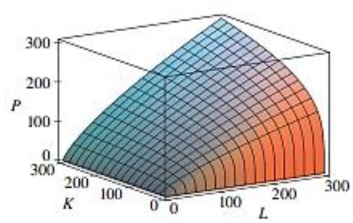
4.2.2. Sistemas de representación

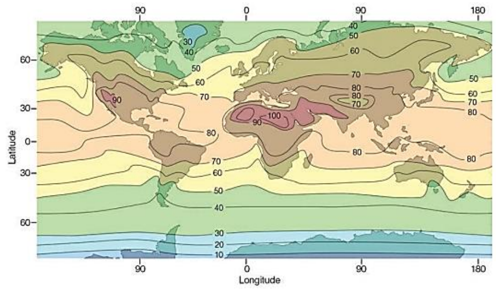
En la Tabla 4, se enlistan los sistemas de representación (numéricas, algebraicas, verbales, gráficas, tabulares e icónicas) relacionados con los conocimientos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables. Adicionalmente, se cita al menos una ejemplificación de cada representación.

Tabla 4

Sistemas de representación de los conocimientos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables

Representación	Ejemplificación
Numérica	*n-tuplas* (1,2), con $n = 2$ (1,2,3), con $n = 3$
Algebraica	$f: A \to \mathbb{R}$, con $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (función de n variables) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ (función de Cobb-Douglas)

<table>
<tr><th>Representación</th><th>Ejemplificación</th></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>Los datos de una encuesta a un gran número de personas permiten a profesionales en economía examinar las posibles determinantes de los salarios de estas. La economía laboral sugiere que el salario de una persona depende de diversos factores, por ejemplo, la educación, el desarrollo profesional en capacitaciones y los años de experiencia en el trabajo. Sin embargo, por medio del instrumento de medición se busca determinar si existe discriminación de acuerdo con factores como el sexo y la raza, manteniendo constante el efecto de los otros factores en el salario final (interpretación de la derivada parcial de una función como razón de cambio).</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>A continuación, se muestra una representación gráfica de la función de producción Cobb-Douglas.

</td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td>Los economistas Charles Cobb y Paul Douglas utilizaron información publicada por el gobierno de los Estados Unidos para crear la tabla de datos que les permitió modelizar el crecimiento de la economía en el período 1899-1920. A continuación, se presenta una porción de dicha tabla.
<table>
<tr><th>Año</th><th>Valor de la producción</th><th>Horas de trabajo por persona</th><th>Valor del equipo utilizado</th></tr>
<tr><td>1899</td><td>100</td><td>100</td><td>100</td></tr>
<tr><td>1900</td><td>101</td><td>105</td><td>107</td></tr>
<tr><td>1901</td><td>112</td><td>110</td><td>114</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Icónica</td><td>A continuación, se presenta una representación icónica de la aplicación de mapas de contorno, específicamente mostrando el mapa global de la</td></tr>
</table>

Representación	Ejemplificación
	temperatura promedio cerca del nivel del mar en el mes de julio (°F). 

Nota. Elaboración propia.

La información expuesta en la Tabla 4 permitió establecer conclusiones importantes para el desarrollo de la propuesta. Específicamente, hizo posible la identificación de los convenios matemáticos que existen para representar los conocimientos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables. Lo cual facilitó la selección de diferentes maneras de representarlos, que fueron tomados en consideración durante la elaboración del proyecto, con la finalidad de que la persona estudiante alcanzará un mejor entendimiento de estos.

4.2.3. Análisis fenomenológico

A continuación, se enlistan los fenómenos relacionados con los conocimientos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables. Es decir, se describen las situaciones que pueden ser utilizadas para mostrar al estudiantado la aplicabilidad de estos en el ámbito científico y profesional. No obstante, es importante señalar que para el desarrollo de la propuesta de proyecto únicamente se tomaron en consideración las situaciones que se sitúan en contextos económicos.

- Maximización del beneficio total de una empresa monopolista que ofrece sus servicios a diferentes grupos de consumidores (al mismo precio y a diferentes precios).
- Maximización del beneficio total de una empresa monopolista de acuerdo con la cantidad de dinero invertido en publicidad.

- Maximizar el beneficio total de una empresa de acuerdo con la cantidad de dinero que tanto esta como sus rivales invierten en publicidad.
- Maximizar los ingresos de un gobierno de acuerdo con los niveles de inflación.
- Maximizar los ingresos de un gobierno de acuerdo con la cantidad de impuestos.
- Maximizar la remuneración económica de una persona de acuerdo con su nivel de educación y la cantidad de años de experiencia laboral.
- Maximizar la producción de una empresa de acuerdo con la cantidad de horas de trabajo por persona y de capital invertido en el equipo (materiales, maquinaria e instalaciones).
- Maximizar el beneficio total de una empresa de acuerdo con la cantidad de ventas por región.
- Maximizar la producción total de una empresa de acuerdo con la capacidad de producción de cada una de sus plantas.
- Maximizar la productividad de una persona de acuerdo con la cantidad de horas de trabajo y de ocio.
- Maximizar la cantidad de productos que se pueden adquirir de acuerdo con un presupuesto dado.
- Minimizar el costo final de un proceso determinado para una empresa mediante la identificación de condiciones óptimas.
- Minimizar la cantidad de materiales requeridos para la elaboración de un objeto (figura geométrica 2D o 3D) mediante la identificación de las dimensiones óptimas de este.
- Identificar zonas con alturas extremas en formas de relieve.
- Diseñar la estructura de edificios de manera que se alcance a mantener una temperatura específica.

4.3. Análisis cognitivo

En el presente apartado, se realiza un estudio de los objetivos de la enseñanza a estudiantes de la carrera Bachillerato en Economía de los conocimientos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables. Lo anterior con la finalidad de delimitar el abordaje de estos en el curso MAT050 Cálculo II para Economía. Asimismo, se desarrolla una descripción de las posibles limitaciones de acuerdo con las habilidades alcanzadas por el estudiantado hasta el momento.

De modo que, se adecuan algunas de las oportunidades de aprendizaje (tareas matemáticas escolares), presentes en las fuentes documentales consultadas, tomando en consideración la información que se mencionó previamente. Es decir, para la elaboración de este apartado se analizaron los documentos (libros de texto y material de apoyo del profesorado) señalados en el análisis conceptual, así como la carta a la persona estudiante del curso MAT050 Cálculo II para Economía del período I ciclo 2022.

4.3.1. Expectativas de aprendizaje

A continuación, se señalan los objetivos de la enseñanza de los conocimientos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables a estudiantes de la carrera Bachillerato en Economía. Lo anterior se establece de acuerdo con lo mencionado en la carta a la persona estudiante del curso MAT050 Cálculo II para Economía.

- Conocer los cocimientos matemáticos asociados al cálculo en varias variables.
- Aplicar los conocimientos matemáticos asociados al cálculo en varias variables en la resolución de problemas económicos.
- Plantear problemas de optimización haciendo utilización de funciones de varias variables.

4.3.2. Limitaciones en el aprendizaje

A continuación, se señalan las posibles limitaciones que se pueden presentar en la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos matemáticos asociados al tema de funciones de varias variables. Las anteriores se establecen tomando en consideración la opinión de docentes de la Escuela de Matemática y de la Escuela de Economía de la UNA, y se fundamentan en el no alcance, al menos de manera satisfactoria, de las competencias matemáticas que se espera la población haya desarrollado hasta el momento. Para ello, se les clasifica según el área temática en: álgebra, cálculo y geometría.

Tabla 5

Competencias matemáticas no alcanzadas satisfactoriamente según área temática

Área temática	Competencias matemáticas no alcanzadas satisfactoriamente
Álgebra	Factorizar expresiones algebraicas haciendo uso de diversos métodos. Simplificar expresiones algebraicas haciendo uso de diversos métodos. Aplicar conocimientos básicos de los números reales en la resolución de ecuaciones. Conocer las funciones exponencial y logarítmica, así como las propiedades y aplicaciones de estas.
Cálculo	Comprender el conocimiento matemático de límite de funciones reales en una variable real. Calcular correctamente límites de funciones reales en una variable real. Comprender el conocimiento matemático de derivada de una función real en una variable real. Resolver problemas que involucren el cálculo de derivadas de funciones reales en una variable real. Aplicar los criterios de segunda derivada y n-ésima derivada para determinar valores extremos de funciones reales en una variable real. Resolver problemas que requieran optimizar funciones reales.
Geometría	Aplicar conocimientos básicos de la geometría analítica del plano en la solución de problemas.

Nota. Elaboración propia.

4.3.3. Oportunidades de aprendizaje

A continuación, se enlistan las tareas matemáticas escolares extraídas y adecuadas de las fuentes documentales consultadas. Es decir, de los libros de texto descritos en el análisis documental y del material de apoyo utilizado por el profesorado en el curso MAT050 Cálculo II para Economía. Las modificaciones corresponden a las respectivas traducciones al idioma español y la organización de estas de modo que estas sigan un ordenamiento lógico. Adicionalmente, estas se organizan, en caso de ser necesario, de acuerdo con el contexto económico en el que se sitúen.

Modelo Cobb – Douglas.

En el año 1928, los economistas Charles Wiggins Cobb (1875 – 1949) y Paul Howard Douglas (1892 – 1976) presentaron los resultados de un estudio a través del cual modelizaron el crecimiento de la economía estadunidense en el período 1899 – 1922. En este se buscó establecer un enfoque simplificado de la economía en el que la producción (el costo monetario de todos los productos que se producen en un año) era determinada por la cantidad de trabajo (el número total de horas trabajadas por persona en un año) y el capital invertido (el costo monetario de la maquinaria, el equipo y los edificios utilizados).

El modelo, al que actualmente se le denomina función de producción Cobb – Douglas, demostró alcanzar un alto nivel de precisión. Lo anterior pese a ser evidente que otros factores, distintos a la cantidad de trabajo y el capital invertido, también influían en el desarrollo económico del país. Este viene dado por la función de varias variables:

$$P(L,K) = bL^{a}K^{1-a}. \ (*)$$

En donde P se refiere a la producción, L a la cantidad de trabajo y K al capital invertido.

La información que se presenta en la Tabla 7 es derivada de datos publicados por el gobierno de los Estados Unidos. Para la elaboración de la tabla los economistas tomaron como base el año 1899 y, por ende, a las variables P, L y K de este se les asignó el valor de 100. Mientras que los valores para las variables de los otros años se expresaron como porcentajes de los valores de 1899.

Tabla 6

Producción, cantidad de trabajo y capital invertido en el período 1899 - 1922

Año	*P*	*L*	*K*
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226

Año	***P***	***L***	***K***
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

Nota. Tomado de Stewart et al. (2020).

Si se consideran variables x y y tales que $x = ln\left(\frac{L}{K}\right)$ y $y = ln\left(\frac{P}{K}\right)$, la función (*) puede expresarse de la forma $ln\left(\frac{P}{K}\right) = lnb + aln\left(\frac{L}{K}\right)$. Es decir, es posible representar (*) como la ecuación lineal $y = ax + lnb$.

(Tarea matemática escolar #1) Utilice la información de la Tabla 7 para crear una nueva tabla de valores para las variables x y y en el período 1899 – 1922. De acuerdo con la información obtenida, considere el método de mínimos cuadrados para encontrar la recta de regresión lineal que pasa por los puntos (x, y) y, de esta manera, expresar la función de producción de Cobb – Douglas de la forma $P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

Asimismo, se tiene que la derivada parcial $\frac{\partial P}{\partial L}$ representa la razón en que la producción cambia en relación con la cantidad de trabajo y se le denomina productividad marginal del trabajo. De manera análoga, $\frac{\partial P}{\partial K}$ recibe el nombre de productividad marginal del capital. A continuación, se utilizan estas derivadas parciales para demostrar cómo (*) se deriva de las siguientes suposiciones que Cobb y Douglas establecieron en relación con la economía.

- Si la cantidad de trabajo o el capital invertido desaparecen, entonces la producción también desaparecerá.
- La productividad marginal del trabajo es proporcional a la cantidad de producción por unidad de trabajo (P/L).
- La productividad marginal del capital es proporcional a la cantidad de producción por unidad de capital (P/K).

(Tarea matemática escolar #2) Si la segunda afirmación se expresa de la manera $\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$ con α constante y K se mantiene constante ($K = K_0$), esta ecuación diferencial parcial se convierte en una ecuación diferencial ordinaria $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}L} = \alpha \frac{P}{L}$. Resuelva esta ecuación diferencial separable para probar que $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$, en donde C_1 se escribe $C_1(K_0)$ porque puede depender del valor de K_0. De manera similar, compruebe que si L se mantiene constante $(L = L_0)$ entonces $P(L, K) = C_2(L_0)K^{\beta}$. Concluya que $P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$ donde b es una constante independiente de L y K. Cobb y Douglas asumieron que $\alpha + \beta = 1$, de manera que obtuvieron la ecuación (*). En este caso, si la cantidad de trabajo y el capital invertido incrementan por un factor m, ¿por cuál factor incrementa la producción?

(Tarea matemática escolar #3) Los economistas utilizaron la función $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ para modelar la economía estadounidense en el período 1899 – 1922. Encuentre la productividad marginal del trabajo y la productividad marginal del capital del año 1920 ($L = 194$,

$K = 407$) e interprete los resultados. En este año, ¿qué hubiese beneficiado más a la producción, un aumento en la cantidad de trabajo o en el capital invertido?

(Tarea matemática escolar #4) Tomando en consideración (*) tal que b y a son constantes positivas y $a < 1$, suponga que m es el costo de unidad de trabajo, n es el costo de unidad de capital y p es la cantidad de dólares que la compañía tiene presupuestado gastar.

1. Maximice la producción P sujeta a la restricción $mL + nK = p$.
2. Demuestre que la producción máxima se obtiene cuando $L = \frac{ap}{m}$ y $K = \frac{(1-a)p}{n}$.
3. Suponga que la producción se expresa de la forma $bL^{a}K^{1-a} = Q$ en donde Q es constante. ¿Cuáles son los valores de L y K que minimizan la función del costo $C(L, K) = mL + nK$.

Presupuesto de publicidad para una empresa no monopolista.

Los beneficios de dos empresas fabricantes de cigarrillos, Cambells (C) y Marlbury (M), dependen de los presupuestos publicitarios de las propias empresas y de los presupuestos publicitarios de sus respectivos rivales de la siguiente manera:

$$\Pi_C = 1000A_C - A_C^2 - A_M^2$$

$$\Pi_M = 1000A_M - A_M A_C - A_M^2$$

En estas ecuaciones, Π_C y A_C representan los beneficios y el presupuesto de publicidad de Cambells, así como Π_M y A_M representan los beneficios y el presupuesto de publicidad de Marlbury.

- (Tarea matemática escolar #5) Suponga, inicialmente, que cada empresa toma el presupuesto de publicidad de su rival como un parámetro exógeno. Encuentre el presupuesto de publicidad óptimo para cada empresa. Además, encuentre los beneficios de cada una. Demuestre que este nivel representa los beneficios máximos.
- (Tarea matemática escolar #6) Suponga que las empresas se fusionan y, aunque se mantienen las marcas separadas, las personas a cargo de la unión seleccionan un A_C y A_M con el fin de maximizar $\Pi = \Pi_C + \Pi_M$. Determine A_C y A_M. ¿Los beneficios son

mayores previo o luego de la unión? (En lugar de resolver para Π, identifique si A_C y A_M difieren de los resultados difieren de los encontrados en el primer punto. Si esto sucede, ¿qué implica?).

- (Tarea matemática escolar #7) Las personas encargadas de la nueva empresa derivada de la unión deben decidir si mantener las marcas separadas y productos diferenciados (lo cual implica dos campañas de publicidad diferentes) o mantener solo una marca. Si esta mantiene únicamente una de las marcas, no hay diferencia en la publicidad. Lo anterior ya que la función de beneficios, Π, es la suma de los beneficios de las funciones dadas inicialmente y $A = A_C = A_M$. ¿Qué sucede si P representa la no diferenciación de los productos $A = A_C = A_M$? ¿Cuál estrategia lleva a la empresa a obtener mayores beneficios?

Minimización del costo de producción de empresas.

- (Tarea matemática escolar #8) Tres generadores producen x, y, z Megawatts, respectivamente. El costo de producción para cada uno de los generadores es $c_1 = x + 0.0625x^2$, $c_2 = y + 0.0125y^2$ y $c_3 = z + 0.0250z^2$, respectivamente. Si entre los tres deben producir 952 Megawatts, determine la producción de cada uno que minimiza el costo total.
- (Tarea matemática escolar #9) Sea $\boldsymbol{w} \coloneqq (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector de precios. Considera la función de costo $C(x_1, x_2) \coloneqq w_1x_1 + w_2x_2$ donde x_1, x_2 son suministros para la producción, con la restricción $Ax_1^a x_2^b = y$, donde y son las unidades que se quiere producir, y $a + b = 1$. Determine el costo mínimo en función de $\boldsymbol{w}$ y y.
- (Tarea matemática escolar #10) Sea $\boldsymbol{w} \coloneqq (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector de precios. Considera la función de costo $C(x_1, x_2) \coloneqq w_1x_1 + w_2x_2$ donde x_1, x_2 son suministros para la producción, con la restricción $x_1^p + x_2^p = y^p$, donde y son las unidades que se quiere producir, y $p > 0$. Determine el costo mínimo.

Maximización del beneficio de una empresa.

(Tarea matemática escolar #11) Una empresa fabrica un producto en dos lugares. El costo de producción de x_1 unidades en el primero es $C_1 = 0.02x_1^2 + 4x_1 + 700$, y el costo de producción de x_2 unidades en el segundo es de $C_2 = 0.05x_2^2 + 4x_2 350$. Si el producto se vende a 20 dólares la unidad, determine la cantidad de producto que debe hacerse en cada lugar para maximizar el beneficio $P = 20(x_1 + x_2) - C_1 - C_2$.

Maximización de la utilidad en la producción de una empresa.

(Tarea matemática escolar #12) Sea $\boldsymbol{p} \coloneqq (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector de precios. Considera la función de utilidad $U(x_1, x_2) \coloneqq x_1^a x_2^b$ donde x_1, x_2 son unidades de producción, con la restricción $p_1x_1 + p_2x_2 = m$, donde $a + b = 1$. Determine la utilidad máxima.

4.4. Análisis de instrucción

En este apartado, se detallan y describen las tareas matemáticas escolares que pueden integrarse en las actividades de enseñanza-aprendizaje, con el propósito de alcanzar los resultados de aprendizaje deseados del tema de funciones de varias variables para el curso de Cálculo II para Economía.

En particular, esta sección se fundamenta en una propuesta de proyecto que organiza todas las tareas matemáticas escolares identificadas en al apartado anterior, siguiendo el orden correspondiente para el estudio de los contenidos del curso. Además de las tareas, la propuesta incluye soluciones sugeridas para cada una de ellas, así como recomendaciones dirigidas al profesorado que considere apropiado implementarlas.

Es importante señalar que el profesorado es el único conocedor real de las sesiones de trabajo disponibles para el estudio de los contenidos y la adecuada distribución de estas en función de las necesidades de la población estudiantil. Por este motivo, con el fin de no interferir con el tiempo que ellos disponen, se propone esta actividad como un componente extracurricular.

4.4.1. Propuesta de proyecto

A continuación, como se mencionó anteriormente, se presenta la propuesta de proyecto que organiza las tareas matemáticas escolares identificadas en el orden correspondiente al estudio de los contenidos en el curso. Asimismo, se incluye una propuesta de solución para dichas tareas, que puede ser utilizada como referencia en caso de ser necesario.

Adicionalmente, se adjuntan algunas recomendaciones que el profesorado puede tener en cuenta para lograr un desarrollo óptimo de la asignatura durante el curso. Estas pueden ser adaptadas según las necesidades específicas de la población estudiantil a su cargo.

MAT050 Cálculo II para Economía **Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

I Proyecto, I ciclo 2024 **Puntaje total: 64 puntos**

Indicaciones generales. Lea cuidadosamente todo el proyecto antes de iniciar a resolverlo. Las tareas deben resolverse a mano en hojas blancas debidamente grapadas, de forma clara y ordenada. Solamente se revisarán las soluciones que se encuentren en las hojas blancas grapadas. No se aceptarán hojas adicionales (sueltas). Utilice únicamente bolígrafo azul o negro. Si hay partes escritas con lápiz o lapicero de tinta diferente de azul y negro, o bien, con corrector, se pierde el derecho a reclamar cuando se entreguen los resultados. Para cada una de las tareas, debe aparecer todo el procedimiento que justifique correctamente la respuesta. El proyecto debe resolverse en grupos de dos o tres estudiantes.

Fecha de entrega. Por coordinar con el profesorado a cargo.

Recomendaciones para docentes

1. Se sugiere dar al estudiantado un plazo mínimo de 21 días naturales para la realización del proyecto, estableciendo una fecha de entrega que le permita recibir retroalimentación antes de la aplicación del I Parcial.
2. Para maximizar la comprensión de las responsabilidades asignadas, se aconseja realizar una lectura inicial completa del documento tan pronto como sea entregado a las y los

estudiantes. Esto les permitirá dimensionar las tareas y tomar las medidas necesarias para garantizar su finalización oportuna. Entre estas medidas se incluyen la formación de grupos de trabajo (no se aconseja la resolución individual, salvo casos debidamente justificados), la distribución de tareas, el establecimiento de fechas para revisar las soluciones propuestas antes de la entrega conjunta, y una planificación adecuada para la utilización de los espacios destinados a la atención de dudas por parte del profesorado, entre otras.

3. Se recomienda retomar la lectura del documento, al menos de los problemas respectivos, al concluir el estudio de los contenidos correspondientes en clase. Se sugiere abordar las dudas de manera grupal durante las sesiones, a menos que interrumpan el desarrollo de los contenidos programados.
4. Para facilitar un mejor entendimiento, se aconseja que el estudiantado busque recursos adicionales a los proporcionados en clase, y se sugiere al profesorado acompañar este proceso de estudio.
5. Se propone llevar a cabo una revisión oral de las soluciones planteadas, cuestionando los argumentos presentados, al menos un problema por grupo, con la selección aleatoria de la persona encargada de defender los argumentos.
6. La evaluación de las soluciones y la asignación de puntos deben ajustarse a los criterios establecidos por la cátedra para la revisión de los parciales.
7. Para asegurar un acompañamiento consistente, se recomienda que todas las personas docentes que imparten el curso brinden un apoyo similar a lo largo de todo el proceso.

Introducción del proyecto

La presente actividad tiene como objetivo principal introducir al estudiantado al curso MAT050 Cálculo II para Economía, enfocándose en el análisis, interpretación y resolución de problemas de optimización contextualizados en situaciones económicas. De manera específica, se busca que las personas estudiantes desarrollen diversas tareas que requieren la aplicación de los conceptos estudiados en la asignatura dentro de contextos prácticos. Además, esta actividad pretende servir como un estímulo motivacional, buscando despertar el interés en el análisis matemático.

A continuación, se proporciona la contextualización de los problemas que se abordarán en el proyecto, junto con una descripción detallada de cada uno de estos.

Contextualización del proyecto

En 1928, los economistas Charles Wiggins Cobb (1875-1949) y Paul Howard Douglas (1892-1976) introdujeron la función de producción Cobb-Douglas como parte de sus investigaciones sobre la elasticidad de la oferta de trabajo y capital, así como la influencia de estos factores en la producción. Su objetivo principal fue establecer un enfoque simplificado que facilitara la estimación de la producción a través de la combinación de trabajo y capital. La función fue desarrollada utilizando datos de Estados Unidos recopilados entre 1899 y 1922, permitiendo así modelar el crecimiento económico del país durante ese período.

Aunque el modelo inicial enfrentó críticas considerables por parte de la comunidad de economistas, con el tiempo demostró ser preciso en sus estimaciones. Esto a pesar de reconocerse que hay otros factores, distintos al trabajo y al capital, que también influyen en la producción. La función de producción Cobb-Douglas sigue siendo considerada en la mayoría de los análisis del crecimiento económico en diversos contextos, destacando su perdurabilidad y relevancia a lo largo del tiempo.

El modelo se describe mediante la siguiente función de dos variables:

$$\boldsymbol{P(L,K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}}.$$

En esta expresión, $\boldsymbol{P}$ se representa la producción, que se refiere al costo monetario de los productos confeccionados en un año. $\boldsymbol{L}$ corresponde al trabajo, medido en la cantidad de horas trabajadas por una persona en un año para la confección de un producto, y $\boldsymbol{K}$ representa el capital, que refleja el costo monetario del equipo y la infraestructura necesarios para confeccionar del producto. Las variables $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ se mantienen constantes.

La información proporcionada en la Tabla 7 proviene de datos publicados por el gobierno de los Estados Unidos. Para su elaboración, los economistas tomaron como referencia el año 1899, asignando a las variables $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{K}$ de ese año el valor de $\mathbf{100}$. Los valores de las variables de los años siguientes se expresaron como porcentajes de los valores correspondientes a 1899.

Tabla 7

Producción, trabajo y capital en el período 1899-1922

Año	Producción	Trabajo	Capital
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	118	122
1903	124	123	131
1904	122	116	138
1905	143	125	149
1906	152	133	163
1907	151	138	176
1908	126	121	185
1909	155	140	198
1910	159	144	208
1911	153	145	216
1912	177	152	226
1913	184	154	236
1914	169	149	244
1915	189	154	266
1916	225	182	298
1917	227	196	335

Año	Producción	Trabajo	Capital
1918	223	200	366
1919	218	193	387
1920	231	193	407
1921	179	147	417
1922	240	161	431

Nota. Elaboración propia con base en Stewart et al. (2020).

Finalmente, la derivada parcial $\frac{\partial P}{\partial L}$ representa la razón de cambio de la producción en relación con la cantidad de trabajo y se conoce como la "productividad marginal del trabajo". De manera análoga, la derivada parcial $\frac{\partial P}{\partial K}$ describe la razón de cambio de la producción en relación con la cantidad de capital, recibiendo el nombre de "productividad marginal del capital". Estas derivadas parciales pueden utilizarse para demostrar que la función $\boldsymbol{P(L,K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}}$ se deriva de las siguientes suposiciones establecidas por Cobb y Douglas con respecto a la economía.

I. Si la cantidad de trabajo o capital desaparece, entonces la producción también desaparecerá.
II. La productividad marginal del trabajo es proporcional a la cantidad de producción por unidad de trabajo $\left(\frac{P}{L}\right)$.
III. La productividad marginal del capital es proporcional a la cantidad de producción por unidad de capital $\left(\frac{P}{K}\right)$.

Detalles de los problemas

1. (5 puntos) Suponga que en una empresa la producción anual $\boldsymbol{P}$ (medida en millones de dólares) ha sido modelada a través de la función de producción de Cobb-Douglas $\boldsymbol{P(L,K) = 1{,}47 \cdot L^{0{,}65} \cdot K^{0{,}35}}$. En esta expresión, $\boldsymbol{L}$ corresponde al trabajo (medido en

miles de horas) y $\boldsymbol{K}$ representa el capital invertido (medido en millones de dólares). Encuentre el valor de $\boldsymbol{P}(\mathbf{120}, \mathbf{20})$ e interprételo.

Solución propuesta

Para calcular el valor de $\boldsymbol{P}(\mathbf{120}, \mathbf{20})$**,** es necesario reemplazar los valores de $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{K}$ por $\mathbf{120}$ y $\mathbf{20}$**,** respectivamente. Al realizar esta operación, se obtiene el siguiente resultado:

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{120}, \mathbf{20}) = \mathbf{1,47} \cdot \left(\mathbf{120^{0,65}}\right) \cdot \left(\mathbf{20^{0,35}}\right) \approx \mathbf{94,22}.$$

Esto indica que, la producción anual de la empresa alcanza, aproximadamente, $\mathbf{94,22}$ millones de dólares, considerando $\mathbf{120}$ mil horas de trabajo y $\mathbf{20}$ millones de dólares invertidos en el equipo y la infraestructura empresarial.

2. Al considerar las variables $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{K}}\right)$ e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{K}}\right)$, la función de Cobb-Douglas $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{\beta}}$ puede expresarse como $\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{K}}\right) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{K}}\right)$. En otras palabras, es posible reformularla como la ecuación lineal $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{b})$.

   a. (5 puntos) Realice una tabla adicional que abarque el período 1899-1922, incluyendo tanto las variables $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ como la información proporcionada en la Tabla 7.

   Recomendaciones para docentes

   1. Se recomienda motivar al estudiantado a llevar a cabo los cálculos necesarios para la elaboración de la tabla utilizando herramientas como Microsoft Excel o RStudio.

Solución propuesta

Tabla 8

Valores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ para el período 1899-1922

Año	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
1899	0,00	0,00

Año	x	y
1900	-0,02	-0,06
1901	-0,04	-0,02
1902	-0,03	0,00
1903	-0,06	-0,05
1904	-0,17	-0,12
1905	-0,18	-0,04
1906	-0,20	-0,07
1907	-0,24	-0,15
1908	-0,42	-0,38
1909	-0,35	-0,24
1910	-0,37	-0,27
1911	-0,40	-0,34
1912	-0,40	-0,24
1913	-0,43	-0,25
1914	-0,49	-0,37

Año	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
1915	-0,55	-0,34
1916	-0,49	-0,28
1917	-0,54	-0,39
1918	-0,60	-0,50
1919	-0,70	-0,57
1920	-0,75	-0,57
1921	-1,04	-0,85
1922	-0,98	-0,59

Nota. Elaboración propia.

b. (15 puntos) Emplee el método de mínimos cuadrados para determinar la recta de regresión lineal que se ajusta a los puntos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Lo anterior con el fin de expresar la ecuación $\boldsymbol{P(L,K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}}$ de la forma $\boldsymbol{P(L,K) = 1,01 \cdot L^{0,75} \cdot K^{0,25}}$. *Recuerde: El método de mínimos cuadrados se utiliza cuando se tiene evidencia para creer que la relación de dos variables, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, puede aproximarse por medio de una ecuación lineal $\boldsymbol{y = m \cdot x + b}$. Este método supone que, para un conjunto de puntos $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}), (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}), \ldots, (\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n})$, la solución del siguiente sistema de ecuaciones permite determinar los valores de las variables $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$ de dicha ecuación:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_i}\,, \\ \boldsymbol{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} \cdot \boldsymbol{y_i}\,. \end{cases}$$

Recomendaciones para docentes

1. Se sugiere llevar a cabo una lluvia de ideas, que no exceda los 5 minutos, acerca del método de mínimos cuadrados. Asimismo, se puede recomendar algún material de referencia que el estudiantado pueda consultar en caso de tener dudas.
2. Es recomendable incentivar al estudiantado a realizar los cálculos necesarios mediante el uso de herramientas como Microsoft Excel o RStudio, aprovechando los resultados obtenidos en el ejercicio previo.
3. Se sugiere motivar al estudiantado a crear visualizaciones básicas de los resultados obtenidos en caso de haber utilizado alguna herramienta tecnológica.

Solución propuesta

Tomando en consideración los valores obtenidos para las variables, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$**,** en la Tabla 8 y llevar a cabo los cálculos correspondientes de las sumatorias respectivas, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot (\mathbf{-9,45}) + \boldsymbol{b} \cdot \mathbf{24} = \mathbf{-6,70}, \\ .\,\boldsymbol{m} \cdot \mathbf{5,64} + \boldsymbol{b} \cdot (\mathbf{-9,45}) = \mathbf{4,07} \end{cases}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtienen los valores aproximados de $\mathbf{0,75}$ y $\mathbf{0,01}$ para $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$, respectivamente. Por lo tanto, la ecuación de la recta de regresión lineal que mejor se ajusta a los puntos $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ es $\boldsymbol{y} = \mathbf{0,75} \cdot \boldsymbol{x} + \mathbf{0,01}$.

Si se define $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{K}}\right)$ e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{K}}\right)$, y se utilizan las propiedades de exponenciación y logaritmos, se tiene que:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{0,75} \cdot \boldsymbol{x} + \mathbf{0,01}$$

$$\equiv \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{K}}\right) = \mathbf{0,75} \cdot \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{K}}\right) + \mathbf{0,01}$$

$$\equiv \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{K}}\right)} = \boldsymbol{e}^{\mathbf{0,75}\cdot\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{K}}\right)+\mathbf{0,01}}$$

$$\equiv \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{e}^{\mathbf{0,75}\cdot\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{K}}\right)} \cdot \boldsymbol{e}^{\mathbf{0,01}}$$

$$\equiv \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{e}^{\mathbf{0,75}\cdot\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{K}}\right)} \cdot \boldsymbol{e}^{\mathbf{0,01}}$$

$$\equiv \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{K}} = \mathbf{1,01} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{K}}\right)^{\mathbf{0,75}}}$$

$$\equiv \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{K}} = \mathbf{1,01} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{K}}\right)^{\mathbf{0,75}}$$

$$\equiv \boldsymbol{P} = \mathbf{1,01} \cdot \boldsymbol{L}^{\mathbf{0,75}} \cdot \boldsymbol{K}^{\mathbf{0,25}}.$$

En consecuencia, es posible concluir que la ecuación $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{\beta}}$ puede expresarse de la forma $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{K}) = \mathbf{1,01} \cdot \boldsymbol{L}^{\mathbf{0,75}}\boldsymbol{K}^{\mathbf{0,25}}$.

3. (15 puntos) La suposición II de los economistas puede ser expresada como $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{L}}$, manteniendo constantes los valores de $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{K}$. Investigue métodos para resolver ecuaciones diferenciales separables y demuestre que $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{C}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{\alpha}}$, donde $\boldsymbol{C}_{\mathbf{1}}$ se denota como $\boldsymbol{C}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{K})$ con el fin de indicar que depende del valor de K. De manera similar, pruebe, a partir de la suposición II, que $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{C}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{L}) \cdot \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{\beta}}$ cuando $\boldsymbol{L}$ se mantiene constante. Concluya que $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{\beta}}$ con $\boldsymbol{b}$ una constante independiente de $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{K}$.

Recomendaciones para docentes

1. Se recomienda proporcionar al estudiantado sugerencias de material de referencia adicional, como libros o videos, que complementen las notas del curso en el tema de ecuaciones diferenciales separables.

Solución propuesta

En primer lugar, se supone que $\boldsymbol{K}$ es constante, y se tiene que $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{L})$. Siguiendo esta premisa, se obtiene que:

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{L}}$$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dL}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{L}}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = \alpha \cdot \frac{dL}{L}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \alpha \cdot \int \frac{dL}{L}$$

$$\Rightarrow ln(u) = \alpha \cdot (ln(L) + C)$$

$$\Rightarrow e^{ln(u)} = e^{\alpha \cdot ln(L) + C}$$

$$\Rightarrow u = e^{ln(L)^{\alpha}} \cdot e^{C}$$

$$\Rightarrow u = L^{\alpha} \cdot C(K).$$

Así, se ha demostrado que cuando K es constante, $P(L, K) = u(L) = C_1(K) \cdot L^{\alpha}$.

Análogamente, si se considera L constante, se sigue que $P(L, K) = v(K)$. De este modo:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \cdot \frac{P}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dK} = \beta \cdot \frac{v}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = \beta \cdot \frac{dK}{K}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \beta \cdot \int \frac{dK}{K}$$

$$\Rightarrow ln(v) = \beta \cdot (ln(K) + C)$$

$$\Rightarrow e^{ln(v)} = e^{\beta \cdot ln(K) + C}$$

$$\Rightarrow v = e^{ln(K)^{\beta}} \cdot e^{C}$$

$$\Rightarrow v = K^{\beta} \cdot C(L).$$

Por lo tanto, cuando L es constante, $P(L, K) = v(K) = C_2(L) \cdot K^{\beta}$.

De acuerdo con ambos resultados obtenidos, se tiene que la función $P(L, K)$ puede expresarse como el producto de una función que únicamente depende de L y una que solo depende de K. Así, $P(L, K)$ puede escribirse de la forma $P(L, K) = C_1(K) \cdot L^{\alpha} \cdot C_2(L) \cdot K^{\beta}$. Al definir $b = C_1(K) \cdot C_2(L)$, $P(L, K)$ puede escribirse como $P(L, K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$ con b una constante independiente de L y K.

4. (5 puntos) Los economistas asumieron, para la ecuación $P(L, K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$, que $\alpha + \beta = 1$, de modo que obtuvieron la ecuación $P(L, K) = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}$. En este caso, si tanto la cantidad de trabajo (L) como la cantidad de capital invertido (K) incrementan por factor

$\boldsymbol{m}$ (resultando en $\boldsymbol{m \cdot L}$ y $\boldsymbol{m \cdot K}$ respectivamente), ¿cuál sería el incremento en la producción?

Solución propuesta

Si $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{K}$ incrementan por un factor $\boldsymbol{m}$, se puede observar lo siguiente:

$$\boldsymbol{b(m \cdot L\,)^{\alpha}(m \cdot K\,)^{1-\alpha}}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow b \cdot m^{\alpha} \cdot L^{\alpha} \cdot m^{1-\alpha} \cdot K^{1-\alpha}}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow b \cdot m^{\alpha} \cdot L^{\alpha} \cdot m^{1-\alpha} \cdot K^{1-\alpha}}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow m \cdot b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow m \cdot P(L, K)}.$$

Esto implica que la producción $\boldsymbol{P}$ también incrementaría por un factor $\boldsymbol{m}$, es decir, $\boldsymbol{m \cdot P}$.

5. (10 puntos) Los economistas utilizaron la ecuación $\boldsymbol{P(L, K) = 1{,}01 \cdot L^{0{,}75} \cdot K^{0{,}25}}$ para modelar el desarrollo económico de Estados Unidos en el período 1899-1922. Encuentre la productividad marginal del trabajo y la productividad marginal del capital del año 1920 ($\boldsymbol{L = 194}$ y $\boldsymbol{K = 407}$). Interprete los resultados obtenidos. En este año, ¿qué habría beneficiado más a la producción, un aumento en la cantidad de trabajo o en el capital invertido?

Solución propuesta

En primer lugar, la productividad marginal del trabajo se define como $\frac{\partial P}{\partial L}$. De modo que, se tiene el siguiente resultado al realizar el cálculo respectivo:

$$\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial L}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{\partial}{\partial L}\left(1{,}01 \cdot L^{0{,}75} \cdot K^{0{,}25}\right)}$$
$$\boldsymbol{= 1{,}01 \cdot 0{,}75 \cdot L^{-0{,}25} \cdot K^{0{,}25}}.$$

Así, con el fin de encontrar la productividad marginal del trabajo para el año 1920, se sustituyen los valores de $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{K}$ por $\boldsymbol{194}$ y $\boldsymbol{407}$, respectivamente.

$$\boldsymbol{1{,}01 \cdot 0{,}75 \cdot (194)^{-0{,}25} \cdot (407)^{0{,}25}}$$
$$\boldsymbol{\approx 0{,}91}.$$

Esto significa que, en el año 1920, un aumento marginal en la cantidad de trabajo ($\boldsymbol{L}$) implicaría un incremento aproximado de $\boldsymbol{0{,}91}$ en la producción de la empresa.

Por otra parte, la productividad marginal del capital se define como $\frac{\partial P}{\partial K}$. De modo que, se tiene el siguiente resultado al realizar el cálculo respectivo:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{K}} \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{K}}\left(\mathbf{1{,}01} \cdot \boldsymbol{L}^{\mathbf{0{,}75}} \cdot \boldsymbol{K}^{\mathbf{0{,}25}}\right) \\
&= \mathbf{1{,}01} \cdot \mathbf{0{,}25} \cdot \boldsymbol{L}^{\mathbf{0{,}75}} \cdot \boldsymbol{K}^{-\mathbf{0{,}75}}.
\end{aligned}$$

Así, con el fin de encontrar la productividad marginal del capital para el año 1920, se sustituyen los valores de $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{K}$ por $\mathbf{194}$ y $\mathbf{407}$, respectivamente.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1{,}01} \cdot \mathbf{0{,}75} \cdot (\mathbf{194})^{\mathbf{0{,}75}} \cdot (\mathbf{407})^{-\mathbf{0{,}75}} \\
&\approx \mathbf{0{,}43}.
\end{aligned}$$

Esto significa que, en el año 1920, un aumento marginal en la cantidad de capital ($\boldsymbol{K}$) implicaría un incremento aproximado de $\mathbf{0{,}43}$ en la producción de la empresa.

En conclusión, en el año 1920, un aumento en la cantidad de trabajo habría beneficiado más a la producción de la empresa.

6. Considere la ecuación $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{K}^{\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}}$, donde $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{b}$ son constantes positivas con $\mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}$. Además, suponga que $\boldsymbol{m}$ representa el costo de unidad de trabajo, $\boldsymbol{n}$ es el costo de unidad de capital invertido, y $\boldsymbol{p}$ indica la cantidad de dólares que se tiene presupuestado gastar.

   a. (7 puntos) Demuestre que la producción máxima, la cual está sujeta a la restricción $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{L} + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{K} = \boldsymbol{p}$, se alcanza cuando $\boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p}}{\boldsymbol{m}}$ y $\boldsymbol{K} = \frac{(\mathbf{1}-\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{p}}{\boldsymbol{n}}$.

   Recomendaciones para docentes

   1. Se recomienda brindar un acompañamiento oportuno al estudiantado, tanto en el desarrollo algebraico como en la comprensión de las suposiciones planteadas durante el proceso. Esto se puede lograr asignando valores específicos a los parámetros al entregar las tareas, lo que simplificará los procedimientos algebraicos.

   Solución propuesta

   Dada la función de Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{K}^{\mathbf{1}-\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{L} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{K})$$

Es posible establecer el siguiente sistema de ecuaciones a partir de las derivadas parciales de primer orden de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = a \cdot b \cdot L^{a-1} \cdot K^{1-a} - \lambda \cdot m = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot K^{-a} - \lambda \cdot n = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p - m \cdot L - n \cdot K = 0, \end{cases}$$

Cuya solución corresponde a $L = \frac{a \cdot p}{m}$, $K = \frac{(1-a) \cdot p}{n}$ y $\lambda = -\frac{a \cdot b \cdot p^{a}}{m}$. Es decir, un punto crítico es $\left(\frac{a \cdot p}{m}, \frac{(1-a) \cdot p}{n}, -\frac{a \cdot b \cdot p^{a}}{m}\right)$.

Por otro lado, la matriz hessiana orlada, denotada como $\overline{H}$, es:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & -m & -n \\ -m & a \cdot b \cdot (a-1) \cdot L^{a-2} \cdot k^{1-a} & a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a} \\ -n & a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{-a} & -a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a-1} \end{pmatrix}.$$

Cuyo determinante, denotado como $|\overline{H}|$, corresponde a:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -m & -n \\ -m & a \cdot b \cdot (a-1) \cdot L^{a-2} \cdot k^{1-a} & a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a} \\ -n & a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{-a} & -a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a-1} \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot b \cdot m^{2} \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a-1} + a \cdot b \cdot m \cdot n \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a}$$

$$+ a \cdot b \cdot m \cdot n \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{-a} + a \cdot b \cdot n^{2} \cdot (1-a) \cdot L^{a-2} \cdot k^{1-a}.$$

Si en el resultado anterior los valores de L y K se sustituyen por $\frac{a \cdot p}{m}$ y $\frac{(1-a) \cdot p}{n}$, respectivamente, se obtiene el siguiente resultado:

$$a^{a+1} \cdot b \cdot m^{2-a} \cdot n^{a+1} \cdot p^{-1} \cdot (1-a)^{-a}$$

$$+ a^{a} \cdot b \cdot m^{2-a} \cdot n^{a} \cdot (1-a)^{2-a}$$

$$+ a^{a} \cdot b \cdot m^{2-a} \cdot n^{1-a} \cdot p^{-1} \cdot (1-a)^{1-a}$$

$$+ a^{a-1} \cdot b \cdot m^{2-a} \cdot n^{a+1} \cdot p^{-1} \cdot (1-a)^{2-a}.$$

El cual, debido a las condiciones establecidas para cada una de las variables, es positivo. Por lo tanto, se concluye que la producción máxima se alcanza cuando $L = \frac{a \cdot p}{m}$ y $K = \frac{(1-a) \cdot p}{n}$.

b. (7 puntos) Si la producción se modela de la forma $\boldsymbol{Q = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}}$, donde $\boldsymbol{Q}$ se mantiene constante, determine los valores de $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{K}$ que minimizan la función del costo $\boldsymbol{C(L, K) = m \cdot L + n \cdot K}$.

Recomendaciones para docentes

1. Se recomienda brindar un acompañamiento oportuno al estudiantado, tanto en el desarrollo algebraico como en la comprensión de las suposiciones planteadas durante el proceso. Esto se puede lograr asignando valores específicos a los parámetros al entregar las tareas, lo que simplificará los procedimientos algebraicos.

Solución propuesta

Dada la función de Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}(L, K, \lambda)}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(L, K, \lambda) = m \cdot L + n \cdot K + \lambda \cdot (Q - b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha})}.$$

Es posible establecer el siguiente sistema de ecuaciones a partir de las derivadas parciales de primer orden de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = m - \lambda \cdot \alpha \cdot b \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{1-\alpha} = 0}, \\ \boldsymbol{\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = n - \lambda \cdot b \cdot (1-\alpha) \cdot L^{\alpha} \cdot K^{-\alpha} = 0}, \\ \boldsymbol{\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Q - b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha} = 0}. \end{cases}$$

Cuya solución corresponde a

$$\boldsymbol{L = \left(\left(\frac{a \cdot n}{m \cdot (1-a)}\right)^{a-1} \cdot \frac{b}{Q}\right)^{\frac{1}{a^2-a-1}}},$$

$$\boldsymbol{K = \left(\left(\frac{a \cdot n}{m \cdot (1-a)}\right)^{a} \cdot \frac{1}{b^{\frac{-a^3+2 \cdot a^2+a-1}{1-a}} \cdot Q^{a+1}}\right)^{\frac{1}{a^2-a-1}}},$$

$$\boldsymbol{\lambda = \left(\left(\frac{a}{m}\right)^{-a^2+2 \cdot a} \cdot \frac{b}{Q^{a^2-a}} \cdot (n \cdot (1-a)^{a-1})\right)^{\frac{1}{a^2-a-1}}}.$$

Por otro lado, la matriz hessiana orlada, denotada como $\boldsymbol{\overline{H}}$, es:

$$\boldsymbol{\overline{H}}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -a \cdot b \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a} & -b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a} \\ -a \cdot b \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a} & -\lambda \cdot a \cdot b \cdot (a-1) \cdot L^{a-2} \cdot k^{1-a} & -\lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{-a} \\ -b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a} & -\lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{-a} & \lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a-1} \end{pmatrix}.$$

Cuyo determinante, denotado como $|\overline{H}|$, corresponde a:

$$|\overline{H}|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -a \cdot b \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a} & -b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a} \\ -a \cdot b \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a} & -\lambda \cdot a \cdot b \cdot (a-1) \cdot L^{a-2} \cdot k^{1-a} & -\lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{-a} \\ -b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a} & -\lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{-a} & \lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a \cdot b \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a}) \cdot$$

$$[(-a \cdot b \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a}) \cdot (\lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a-1})]$$

$$-(a \cdot b \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a}) \cdot$$

$$[(-b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a}) \cdot (-\lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{-a})]$$

$$-b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a} \cdot$$

$$[(-a \cdot b \cdot L^{a-1} \cdot k^{1-a}) \cdot (-\lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-1} \cdot k^{-a})]$$

$$+(b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a}) \cdot$$

$$[(-b \cdot (1-a) \cdot L^{a} \cdot k^{-a}) \cdot (\lambda \cdot a \cdot b \cdot (1-a) \cdot L^{a-2} \cdot k^{1-a})].$$

Si en el resultado anterior los valores de L, K y λ se sustituyen por $\left(\left(\frac{a \cdot n}{m \cdot (1-a)}\right)^{a-1} \cdot \frac{b}{Q}\right)^{\frac{1}{a^2-a-1}}$, $\left(\left(\frac{a \cdot n}{m \cdot (1-a)}\right)^{a} \cdot \frac{1}{b^{\frac{-a^3+2 \cdot a^2+a-1}{1-a}} \cdot Q^{a+1}}\right)^{\frac{1}{a^2-a-1}}$ y $\left(\left(\frac{a}{m}\right)^{-a^2+2 \cdot a} \cdot \frac{b}{Q^{a^2-a}} \cdot (n \cdot (1-a)^{a-1})\right)^{\frac{1}{a^2-a-1}}$ respectivamente, se obtiene un resultado negativo. Lo anterior debido a las condiciones establecidas para cada una de las variables. Por lo tanto, se concluye que la producción mínima se alcanza cuando

$$L = \left(\left(\frac{a \cdot n}{m \cdot (1-a)}\right)^{a-1} \cdot \frac{b}{Q}\right)^{\frac{1}{a^2-a-1}},$$

$$K = \left(\left(\frac{a \cdot n}{m \cdot (1-a)}\right)^{a} \cdot \frac{1}{b^{\frac{-a^3+2 \cdot a^2+a-1}{1-a}} \cdot Q^{a+1}}\right)^{\frac{1}{a^2-a-1}},$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{m}}\right)^{-\boldsymbol{a}^2+2\cdot\boldsymbol{a}} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}}} \cdot (\boldsymbol{n} \cdot (\mathbf{1}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{a}-\mathbf{1}})\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}-\mathbf{1}}}.$$

Capítulo V: Valoraciones del análisis de instrucción

En este capítulo, se detallan las evaluaciones llevadas a cabo para determinar la validez del análisis de instrucción diseñado como propuesta para la implementación del ABP en la enseñanza del tema de funciones de varias variables en el curso MAT050 Cálculo II para Economía. Estas evaluaciones fueron proporcionadas por docentes de la Escuela de Matemática y de la Escuela de Economía de la UNA, así como por estudiantes de la carrera de Bachillerato en Economía, cuyas características fueron detalladas previamente en el Capítulo III. Además, las evaluaciones se han clasificado según el momento en el que se obtuvieron durante las entrevistas.

5.1. Valoraciones obtenidas en el primer momento de las entrevistas

En seguida, se presenta un análisis descriptivo de la información obtenida en la primera fase de las entrevistas realizadas a docentes de la Escuela de Economía y de la Escuela de Matemática de la UNA, así como de las entrevistas llevadas a cabo con estudiantes de la carrera de Bachillerato en Economía que previamente habían aprobado el curso en cuestión.

Es fundamental recordar, antes de continuar con el análisis, que este espacio se destinó a la validación de la información recolectada en el análisis conceptual, el análisis de contenido y el análisis cognitivo. Específicamente, el enfoque se centró en evaluar la pertinencia de las tareas matemáticas escolares derivadas de dichos análisis, las cuales conforman la propuesta de proyecto planteada en el análisis de instrucción.

En primer lugar, respecto a la formulación de la propuesta de proyecto, el profesorado de la Escuela de Matemática coincidió en la necesidad de reformularla con el objetivo de hacer las instrucciones de las tareas matemáticas escolares aún más claras. Específicamente, sugirieron utilizar un lenguaje matemático adecuado al nivel de la población estudiantil, evitando aparentar un grado de dificultad superior al real y proporcionando más información sobre los términos utilizados.

Se recomendó incorporar tareas matemáticas intermedias dentro de la propuesta de proyecto, que permitieran a las y los estudiantes interactuar con conocimientos de menor complejidad; así como incluir breves recordatorios de temáticas como el método de los mínimos cuadrados, la regresión lineal y los procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales. Esto con el propósito de que los esfuerzos cognitivos del estudiantado se centren en comprender los conocimientos asociados al cálculo en varias variables dentro del contexto del modelo Cobb-Douglas.

Por otro lado, el profesorado de la Escuela de Economía consideró que las instrucciones de las tareas matemáticas escolares estaban lo suficientemente claras para un adecuado entendimiento. Destacaron que el contexto económico propuesto es de conocimiento básico para la población estudiantil y, por lo tanto, mientras se proporcione el modelo económico a utilizar sin exigir su creación, las y los estudiantes deberían ser capaces de resolver los ejercicios. Sin embargo, sugirieron que ejercicios similares, en términos de terminología matemática, se analicen previamente en el curso para evitar posibles inconvenientes.

El estudiantado, por su parte, mencionó que las instrucciones de las tareas matemáticas escolares eran lo suficientemente claras. Señaló que se asemejaban a las indicaciones de los problemas analizados en clase durante el curso, lo que facilitaba su comprensión. Además, destacó que la introducción al contexto al inicio de la propuesta le ayudaba a entender mejor el procedimiento matemático que se esperaba que realizaran y su utilidad.

En relación con los recursos y materiales planeados para el desarrollo de las tareas matemáticas escolares, se llegó a la conclusión, basándose en los criterios tanto del profesorado como del estudiantado, de que es suficiente considerar las notas de clase del curso MAT050 Cálculo II para Economía. Además, se determinó que sería apropiado utilizar, como complemento a estas, fuentes de información externas, tales como publicaciones disponibles en bibliotecas digitales o físicas, bases de datos, notas de clase de otros cursos, videos, entre otros. Sin embargo, se sugirió que estas fuentes fueran preferiblemente sugeridas por el profesorado o, al menos, contaran con su aprobación.

Adicionalmente, se recomendó el uso de programas informáticos que facilitaran a la población estudiantil la realización de los procedimientos matemáticos con mayor exactitud y rapidez, siempre que las y los estudiantes tuvieran las habilidades necesarias para utilizarlos. No se planteó esto como un paso obligatorio, sino más bien como un complemento del cual algunas personas podrían beneficiarse.

En relación con la interacción entre pares y la interacción docente-estudiante, se concluyó que el tamaño óptimo para los grupos de trabajo debe oscilar entre un mínimo de dos estudiantes y un máximo de tres estudiantes por agrupación. Aunque algunas y algunos estudiantes sugirieron que se considere también la solución individual del trabajo.

También se señaló que la división estudiantil solo será beneficiosa si se establece una diferenciación clara entre los productos finales que cada grupo debe presentar. Cabe mencionar que, según los comentarios del profesorado, esta diferenciación no necesariamente implica asignaciones distintas para cada grupo, sino que se puede aprovechar mediante, por ejemplo, una defensa oral aleatoria de algunos planteamientos establecidos en la solución. Esto no solo permitiría verificar un entendimiento adecuado, sino también asegurar que las y los estudiantes realmente hayan realizado la entrega.

Además, se propuso redactar instrucciones o recomendaciones para docentes que describan el acompañamiento esperado. Estas sugerencias podrían incluir la resolución de ejercicios similares a los propuestos en el proyecto durante las clases, la verificación del entendimiento de las condiciones del problema, la orientación en el desarrollo de las asignaciones tanto en el tiempo de clase como en las horas de consulta, y la asignación de un espacio para la defensa del razonamiento matemático utilizado en la obtención del producto final. Esto, a su vez, facilitaría la igualdad de condiciones para los diferentes grupos de estudiantes que están llevando el curso, incluso si tienen diferentes docentes.

En relación con la consecución de los objetivos de aprendizaje y el dominio de los contenidos matemáticos en estudio, el profesorado considera necesario realizar modificaciones en el planteamiento de los objetivos específicos de la propuesta, de manera que se ajusten a su alcance real y abarquen más que solo habilidades matemáticas. En este sentido, sugieren unificar las ideas e incorporar, al menos, un objetivo que aborde el papel motivacional de la implementación del proyecto. Desde la perspectiva docente, este aspecto es la característica principal que justifica por qué se puede asumir que la población logrará un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio.

No obstante, tanto el profesorado como el estudiantado coinciden en términos generales en que la propuesta permitirá a las y los estudiantes alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos y lograr un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio. Asimismo, se concluyó que estos objetivos están relacionados con el tema de funciones de varias variables y se considera que representan una demanda cognitiva apropiada para el nivel del curso, aunque se reconoce que, en algunos casos y según las realidades y necesidades de la población, esta demanda podría ser superior a la recomendada.

En cuanto a las posibles limitaciones en el aprendizaje durante la ejecución de las tareas matemáticas escolares, las personas entrevistadas identificaron un vago entendimiento de los contenidos matemáticos y económicos estudiados en cursos anteriores, como ECF400 Introducción a la Economía I, MAT001 Matemática General, ECF402 Introducción a la Economía II, ECF403 Estadística I y MAT002 Cálculo I. También se señaló que los conocimientos en álgebra lineal y ecuaciones diferenciales podrían representar un obstáculo durante la realización de estas tareas. Finalmente, el profesorado recomienda asignar un porcentaje de la evaluación sumativa del curso MAT050 Cálculo II para Economía a la propuesta, con el objetivo de evitar que el desinterés se convierta en otra posible limitación.

5.2. Valoraciones obtenidas en el segundo momento de las entrevistas

A continuación, se presenta un análisis descriptivo de la información recopilada durante la segunda fase de las entrevistas llevadas a cabo con docentes de la Escuela de Economía y de la Escuela de Matemática de la UNA. Esta fase se desarrolla después de incorporar las recomendaciones recibidas durante la primera fase de las entrevistas en la propuesta de proyecto y realizar las modificaciones necesarias.

En primer lugar, el profesorado considera que las sugerencias sobre el diseño de la propuesta, discutidas en las entrevistas anteriores, se han atendido correctamente. Al menos, se percibe que son lo suficientemente adecuadas para que la propuesta pueda ser implementada en el curso MAT050 Cálculo II para Economía.

Sin embargo, se destacó la necesidad de diferenciar de alguna manera las fórmulas matemáticas dentro del texto, por ejemplo, utilizando letra negrita, con el fin de evitar confusiones y lograr mayor claridad. También se realizaron observaciones mínimas en relación con la redacción de algunas oraciones, proporcionando un replanteamiento que, según el criterio del profesorado, podría mejorar la comprensión.

Por otra parte, según el criterio de las y los docentes, se ha concluido que al estudiantado le llevará un tiempo ligeramente menor que el utilizado para estudiar los contenidos en clase para completar la propuesta, aproximadamente tres o cuatro semanas. Se sugirió entregar las indicaciones del documento después de concluir el estudio de los primeros contenidos de la temática en clase y organizar las tareas de acuerdo con el orden de estudio de los contenidos en clase, solicitando su entrega previa al primer parcial del curso. Esto permitiría que el estudiantado realice las tareas de la propuesta en paralelo al estudio de los contenidos en clase.

Dado que la propuesta se presenta como una actividad extracurricular, no es necesario asignar un número de sesión específico para llevar a cabo las tareas diseñadas. Se sugiere que se desarrollen durante las horas de estudio independiente que coincidan con la semana en que se aborden en clase, en lugar de esperar hasta finalizar el estudio de todos los contenidos para comenzar a resolverlas.

Por último, se concluyó que, a pesar de que la propuesta no se desarrolle específicamente durante las sesiones de clase, el profesorado debe brindar un acompañamiento continuo al estudiantado en la resolución del proyecto. Esto incluye asegurarse de que las indicaciones estén claras desde el principio, aclarar todas las dudas que surjan durante el proceso de resolución, recordar en clase detalles importantes de la propuesta, supervisar las fuentes de información adicionales que el estudiantado comparta, y proporcionar retroalimentación oportuna al recibir las entregas, entre otras acciones.

Capítulo VI: Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo, se destacan los resultados más sobresalientes obtenidos durante la investigación, alineándolos con los objetivos previamente establecidos. Dentro de estos resultados, se incluyen apreciaciones extraídas de las entrevistas semiestructuradas realizadas, las cuales fueron excluidas en el capítulo anterior debido a que no eran necesarias para el diseño del análisis de instrucción. Sin embargo, es fundamental rescatar estas observaciones para que otras personas las consideren en futuros trabajos de investigación, con el objetivo de asegurar condiciones óptimas en los procesos educativos a nivel superior.

Además, se presentan una serie de recomendaciones vinculadas con la implementación del ABP en cursos de matemáticas universitarios. Estas recomendaciones están dirigidas al profesorado de matemática en formación, a docentes que actualmente se desempeñan en la enseñanza de la matemática, a aquellas personas interesadas en la investigación de esta temática y a la Escuela de Matemática de la UNA.

6.1. Conclusiones

El objetivo general de la investigación fue desarrollar una propuesta para la implementación del ABP en la enseñanza del tema de funciones de varias variables en el curso MAT050 Cálculo II para Economía. Esta propuesta está dirigida a estudiantes de la carrera de Bachillerato en Economía de la UNA, específicamente en la Sede Central – Campus Omar Dengo. El logro de este objetivo está estrechamente vinculado con la consecución de objetivos específicos, los cuales se detallan a continuación junto con las conclusiones correspondientes.

6.1.1. Análisis conceptual del tema funciones de varias variables en el curso Cálculo II para Economía

En el presente trabajo de investigación, se llevó a cabo un análisis conceptual a partir de una exhaustiva revisión documental de diversas fuentes de información. La información resultante de este análisis fue validada posteriormente por docentes de la Escuela de Matemática y la Escuela de Economía de la UNA, así como por estudiantes de la carrera de Bachillerato en Economía que ya habían aprobado el curso MAT050 Cálculo II para Economía. Después de completar el análisis conceptual del tema de funciones de varias variables para el curso MAT050 Cálculo II para Economía, la conclusión más significativa es que el enfoque de los conocimientos matemáticos puede variar considerablemente según la fuente documental consultada.

En el caso de los libros de texto destinados a economistas en formación para cursos específicos de unidades académicas del área de economía, se observó que los significados se presentan a través de ejemplos que ilustran la aplicabilidad de los conceptos en contextos económicos. Según el criterio del profesorado entrevistado, esto podría implicar un nivel de complejidad mayor del necesario para el entendimiento deseado en el curso MAT050 Cálculo II para Economía. Además, podría sugerir la necesidad de utilizar la misma metodología en cursos anteriores para evitar que el cambio en esta represente una limitación.

En contraste, los libros de texto centrados en el estudio de la disciplina de manera más generalizada y el material de apoyo utilizado por el profesorado de la asignatura presentan los conocimientos con mayor rigor matemático. Este enfoque implica la necesidad de que las y los estudiantes sean capaces de comprender un lenguaje matemático especializado. No obstante, este enfoque permite que la población estudiantil comprenda el concepto matemático y luego pueda interactuar con su aplicabilidad en diferentes contextos.

6.1.2. Análisis de contenido del tema funciones de varias variables en el curso Cálculo II para Economía

Al igual que se mencionó en el punto anterior, se llevó a cabo un análisis de contenido mediante una revisión documental exhaustiva de diversas fuentes de información. La información resultante de este análisis también fue posteriormente validada por docentes de la Escuela de Matemática y la Escuela de Economía de la UNA, así como por estudiantes de la carrera de Bachillerato en Economía que ya habían aprobado el curso MAT050 Cálculo II para Economía.

Después de realizar el análisis de contenido sobre el tema de funciones de varias variables en el curso Cálculo II para Economía, se concluyó que las caracterizaciones y los sistemas de representación varían considerablemente según la fuente documental consultada. Esta situación es similar a la discutida en el punto anterior con respecto a los conocimientos matemáticos.

Por lo tanto, en la elaboración de la propuesta, fue esencial tener en cuenta todas las perspectivas sugeridas por el profesorado entrevistado y aquellas identificadas por el estudiantado entrevistado como las que ofrecían mayor claridad en las indicaciones. Esto se hizo con el objetivo de desarrollar un planteamiento adecuado para el futuro estudiantado del curso en cuestiones matemáticas.

La recomendación más frecuente sugería la utilización de sistemas de representación y caracterizaciones coincidentes con los utilizados en cursos que se requieren como requisitos para el curso MAT050 Cálculo II para Economía, al menos aquellos ofrecidos por la Escuela de Matemática. Este enfoque se replicó en el planteamiento de las caracterizaciones, sugiriéndose que se presentaran de manera similar a cursos solicitados como requisito para la asignatura, y así facilitar el entendimiento.

En cuanto a los fenómenos recuperados, se observó que algunas actividades particulares permitían la demostración de diversos conocimientos matemáticos de manera integrada, como en el caso del contexto del modelo de Cobb-Douglas. Por esta razón, estas actividades fueron utilizadas en el diseño de la propuesta de proyecto.

6.1.3. Análisis cognitivo del tema funciones de varias variables en el curso Cálculo II para Economía

Este análisis se llevó a cabo siguiendo el mismo enfoque que los análisis previos, mediante una exhaustiva revisión documental. Posteriormente, este proceso fue validado por docentes de la Escuela de Matemática y de la Escuela de Economía de la UNA, así como por estudiantes de la carrera de Bachillerato en Economía que habían aprobado previamente el curso MAT050 Cálculo II para Economía. A través de este método, se logró identificar diversas tareas matemáticas escolares que podrían ser aprovechadas para la enseñanza de la temática de optimización en varias variables, siendo consideradas inicialmente para la propuesta.

Entre las conclusiones más destacadas, resalta la presencia de una misma tarea matemática escolar en diversas fuentes documentales, aunque con algunas variaciones en la formulación y en el nivel de complejidad. En consecuencia, se procedió a seleccionar los planteamientos y el nivel de complejidad que mejor se adecuaran a los objetivos de enseñanza identificados en este análisis. Además, se consideraron las características de la población estudiantil del curso, tal como fueron proporcionadas por el profesorado entrevistado.

También se identificaron posibles limitaciones que podrían surgir durante la implementación práctica de estas tareas matemáticas escolares. Según la opinión del profesorado entrevistado, algunas de estas limitaciones podrían superarse mediante la inclusión de especificaciones detalladas en las instrucciones de los problemas, o ajustando los ejercicios para que se alineen con la metodología utilizada en las sesiones del curso. Sin embargo, se resaltó que algunas de estas limitaciones están más allá del control de las y los docentes que imparten el curso MAT050 Cálculo II para Economía y, por lo tanto, no podrían evitarse.

6.1.4. Análisis de instrucción como propuesta para la implementación del aprendizaje basado en proyectos en la enseñanza del tema funciones de varias variables en el curso MAT050 Cálculo II para Economía

Este análisis representa el resultado de la identificación y organización de las tareas matemáticas escolares recopiladas durante el análisis anterior. El objetivo principal es alinearlas con los objetivos de enseñanza de la temática en el curso MAT050 Cálculo II para Economía, siguiendo las pautas identificadas en análisis previos. Además, se llevó a cabo la validación y la incorporación de información adicional crucial para su implementación, según el criterio del profesorado de la Escuela de Matemática y la Escuela de Economía, así como de estudiantes que previamente aprobaron la asignatura.

En primer lugar, es crucial señalar que, a pesar de reconocer los beneficios del enfoque de ABP, el profesorado mostró inseguridad y resistencia a su implementación. Esto se debe a la percepción de falta de confianza en el manejo adecuado de los conceptos matemáticos y económicos necesarios para llevar a cabo proyectos de esta índole.

Además, se destacó el alto grado de madurez que se considera necesario en el estudiantado para el desarrollo efectivo de estas asignaciones. Según la percepción del cuerpo docente, se necesita un sentido de responsabilidad hacia el aprendizaje individual para aprovechar los beneficios del ABP en el ámbito universitario. En este sentido, se señaló que, a pesar de contar con diversas herramientas en esta etapa, es posible realizar las tareas matemáticas propuestas sin el esfuerzo cognitivo esperado.

Del mismo modo, las y los profesores expresaron la falta de conocimiento sobre la correcta aplicación del ABP, particularmente en lo que respecta a la distribución de espacios para el desarrollo del proyecto en las sesiones de clase, el acompañamiento previsto durante las horas de consulta, la evaluación del progreso para lograr el producto final y el manejo de conceptos ajenos al área de la matemática requeridos para el proyecto.

Por último, se destaca la necesidad manifestada por el profesorado de ambas escuelas de una adaptación en los procesos educativos y la metodología del curso MAT050 Cálculo II para Economía. Esto se basa en los comentarios de las y los estudiantes durante el primer ciclo del año 2022, donde se observó una disminución significativa en los niveles de motivación, afectando gravemente el rendimiento académico no solo en esta asignatura, sino también en otros cursos propios de la carrera Bachillerato en Economía.

6.2. Limitaciones

Durante la fase de investigación de antecedentes, una de las principales limitaciones fue la escasez de estudios, tanto a nivel nacional como internacional, que abordaran la implementación del ABP en la enseñanza del tema de funciones de varias variables en la educación superior. Como resultado, se optó por dividir el tema en secciones y examinar el estado de cada una detenidamente para extraer conclusiones relevantes. Esta misma situación también dificultó la elaboración del marco teórico, por lo que se decidió seguir la misma estrategia para superar el obstáculo.

Además, en lo que respecta a la selección de las personas participantes en el estudio, encontrar tanto docentes como estudiantes dispuestos y disponibles supuso un desafío significativo. En algunos casos, fue necesario enviar múltiples correos electrónicos para coordinar los detalles de las entrevistas. Si bien hubiera sido preferible realizar una identificación aleatoria y aumentar tanto el número de docentes como de estudiantes para obtener resultados más sólidos, las restricciones de recursos y la disponibilidad limitada de las personas involucradas llevaron a optar por una selección por conveniencia.

Finalmente, las y los profesores de ambas unidades académicas expresaron su falta de conocimiento sobre la metodología. En la Escuela de Matemáticas, hubo desconocimiento de los términos económicos y el contexto utilizado, mientras que, en la Escuela de Economía, se presentó desconocimiento de algunos términos matemáticos utilizados. Esto dificultó la realización de las entrevistas, ya que fue necesario detenerse constantemente para explicar los términos o el contexto.

6.3. Recomendaciones

Para futuras personas que se interesen en abordar esta problemática, se sugiere comenzar por delimitar con precisión el área temática, enfocándose en los conocimientos matemáticos que se abordarán. Una alternativa adicional es la elección de un conocimiento matemático específico para el desarrollo de la propuesta. La finalidad de esta recomendación es facilitar un enfoque teórico más profundo de los objetos matemáticos involucrados, lo cual simplificará la elaboración del análisis didáctico y permitirá identificar de manera más clara la aplicabilidad matemática. Se plantea que, de no seguirse esta sugerencia, la amplitud del tema podría complicar el proceso investigación.

Además, se aconseja al profesorado en formación y que ya se desempeña en la enseñanza de la matemática, a que diseñe nuevas propuestas para la implementación del ABP. Esto podría centrarse en la enseñanza de funciones de varias variables u otras áreas temáticas relevantes en cursos de matemática a nivel superior. El objetivo principal es construir un banco de herramientas didácticas que facilite la transición hacia metodologías de instrucción basadas en la resolución de problemas.

Por otro lado, se sugiere que la Escuela de Matemática de la UNA realice una evaluación exhaustiva de las estrategias metodológicas y evaluativas empleadas en los cursos que ofrece, especialmente en la asignatura MAT050 Cálculo II para Economía. Esta evaluación proporcionaría información valiosa para la selección de metodologías de enseñanza más coherentes con los objetivos que se espera alcanzar.

Finalmente, se insta al profesorado en formación y en ejercicio a poner en práctica la propuesta diseñada en el presente trabajo de investigación. La implementación real permitirá obtener una comprensión detallada de la pertinencia y las limitaciones de la propuesta. Además, generará insumos valiosos que facilitarán la evaluación de la idoneidad de la metodología de enseñanza ABP en los cursos universitarios de matemáticas. Este enfoque práctico ayudará a ajustar y mejorar la propuesta en función de la experiencia real en el aula.

6.4. Líneas futuras de investigación

En sesta sección, se sugieren algunas áreas de investigación que podrían explorarse en el futuro.

- Ampliación del ABP en otros contenidos matemáticos de nivel superior: Investigar la implementación del ABP en la enseñanza de otros temas matemáticos en niveles educativos superiores.
- Validación de metodologías de enseñanza centradas en la resolución de problemas: Realizar estudios para validar la implementación del ABP y otras metodologías de enseñanza-aprendizaje centradas en la resolución de problemas.
- Comparación de resultados entre metodologías tradicionales y centradas en la resolución de problemas: Llevar a cabo investigaciones comparativas que analicen y comparen los resultados obtenidos mediante metodologías tradicionales de enseñanza-aprendizaje con aquellos logrados a través de enfoques centrados en la resolución de problemas.
- Comparación de metodologías entre niveles educativos: Investigar y comparar las metodologías de enseñanza utilizadas en la educación secundaria y en la educación superior en la enseñanza de las matemáticas en el país.
- Integración del ABP en disciplinas interdisciplinarias: Investigar cómo se puede integrar el ABP en cursos o programas interdisciplinarios que combinen matemáticas con otras áreas del conocimiento.

Estas áreas de investigación pueden proporcionar una comprensión más profunda de los enfoques de enseñanza en matemáticas y contribuir al desarrollo de prácticas más efectivas y adaptadas a las necesidades de las personas estudiantes.

Referencias bibliográficas

Afzal, H., Ali, I., Aslam Khan, M. y Hamid, K. (2010). A Study of University Students' Motivation and Its Relationship with Their Academic Performance. *International Journal of Business and Management*, *5*(4), 80-88. https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2899435

Bernal, C. (2010). *Metodología de la Investigación* (3ª ed.). Pearson Education.

Burlbaw, L. M., Ortwein, M. J. y Williams, J. K. (2013). From the Project Method to STEM Project-Based Learning: The historical Context. En R. M. Capraro, M. M. Capraro, & J. M. Morgan (Eds.), *STEM Project-Based Learning: An Integrated Science, Technology, Engineering, and Mathematics* (2ª ed., pp. 1-5). Sense Publishers.

Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2016). *Análisis de contenido*. (Documento no publicado). Universidad de los Andes, Colombia.

Capraro, R. M. y Slough, S. W. (2013). Why PBL? Why Now? An Introduction to STEM Project-Based Learning. An Integrated Science, Technology, Engineering, and Mathematics Approach. En R. M. Capraro, M. M. Capraro, & J. M. Morgan (Eds.), *STEM Project-Based Learning: An Integrated Science, Technology, Engineering, and Mathematics* (2ª ed., pp. 1-5). Sense Publishers.

Castillo-Sánchez, M., Gamboa-Araya, R. e Hidalgo-Mora, R. (2018). Concordance between introductory university mathematics courses and the program of pre-university studies: A view from the perspectives of content and academic performance. *Uniciencia*, *32*(2), 20-41. https://doi.org/10.15359/ru.32-2.2

Ciro, C. (2012). *Aprendizaje Basado en proyectos (AB Pr) como estrategia de enseñanza y aprendizaje en la educación básica y media* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional UN. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/11717

Collignon, P. (2015). Using calculus in economics: Learning from history in teacher education. En *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 1811-1816). Charles University, Faculty of Education.

Cozzens, M. y Roberts, F.S. (2020). Introductory College Mathematics for the Life Sciences: Has Anything Changed? *Bull Math Biol*, 82, 1-15. https://doi.org/10.1007/s11538-020-00761-8

Dorko, A. y Weber, E. (2014). Generalizing calculus ideas from two dimensions to three: How multivariable calculus students think about domain and range. *Research in Mathematics Education*,*16*(3), 269-287. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.919873

Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. y Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry: A guide to methods*. Sage Publications.

Escuela de Economía. (2019). Programa de estudios de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Economía. Universidad Nacional, Costa Rica. https://www.economia.una.ac.cr/index.php/es/component/phocadownload/category/7-planes-de-estudio

Escuela de Matemática. (2018). Acta de notas en cursos de servicio del II ciclo 2018. Documento no publicado. Universidad Nacional, Costa Rica.

Escuela de Matemática. (2019a). Acta de notas en cursos de servicio del I ciclo 2019. Documento no publicado. Universidad Nacional, Costa Rica.

Escuela de Matemática. (2019b). Acta de notas en cursos de servicio del I ciclo 2019. Documento no publicado. Universidad Nacional, Costa Rica.

Escuela de Matemática. (2021a). Acta de la sesión Ordinaria N°06-2021. Universidad Nacional, Costa Rica.

Escuela de Matemática. (2021b). Programa del curso MAT003 Cálculo II en el I ciclo del curso lectivo 2021. Universidad Nacional, Costa Rica.

Flores, P., Gómez, P. y Marín, A. (2013). Análisis de instrucción. *Funes*. http://funes.uniandes.edu.co/2061/

Flores-Fuentes, G. y Juárez-Ruiz, E. D. L. (2017). Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias matemáticas en Bachillerato. *Revista electrónica de investigación educativa*, *19*(3), 71-91. https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.3.721

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista Ema*, *7*(3), 251-292. http://funes.uniandes.edu.co/1537/

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/444/

Goodman, R. J. (2010). Problem-based learning: Merging of economics and mathematics. *Journal of Economics and Finance, 34*(4), 477-483. https://doi.org/10.1007/s12197-010-9154-7

Harel, G. (2013). Intellectual need. En K. M. Leatham (Ed.), Vital Directions for Mathematics Education Research (pp. 119-151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_6

Hastie, P. y Hay, P. (2012). Qualitative approaches. *Research methods in physical education and youth sport*, 79-94. http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/43318/1/90.pdf#page=85

Huergo-Tobar, P. L. (2015). Importancia y pasos para la elaboración del estado del arte en un anteproyecto o proyecto de investigación. *Documentos de Docencia*, *1*, 1-23. http://dx.doi.org/10.16925/greylit.1073

Kashefi, H., Ismail, Z. y Yusof, Y. M. (2012). Overcoming Students Obstacles in Multivariable Calculus through Blended Learning: A Mathematical Thinking Approach. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 56*, 579-586. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.691

Kashefi, H., Ismail, Z. y Yusof, Y. M. (2020). Obstacles in the learning of two-variable functions through mathematical thinking approach. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *8*, 173-180. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.024

Kilpatrick, W. (1921). Dangers and difficulties of the project method and how to overcome them. *Teachers College Record: The Voice of Scholarship in Education*, *22*(4), 283-287. https://doi.org/10.1177/016146812102200407

Klein, M. (2014). *Mathematical Methods for Economics* (2ª ed.). Pearson Education.

Larson, R. y Edwards, B. H. (2010). *Calculus* (IX ed.). Cengage.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, *3*(1), 35-48. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2693447

Lupiáñez, J. (2013). Análisis Didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. (pp.81-101). Comares, S.L

Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 365-384. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9408-8

Martínez-Planell, R. y Trigueros, M. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM Mathematics Education*, 5*3*, 695-707. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01233-6

Morgan, A. R. y Slough, S. W. (2013). Classroom Management Considerations: Implementing STEM Project-Based Learning. En R. M. Capraro, M. M. Capraro, & J. M. Morgan (Eds.), *STEM Project-Based Learning: An Integrated Science, Technology, Engineering, and Mathematics* (2ª ed., pp. 99-107). Sense Publishers.

Mosquera, J. (2010). El Método de Proyecto: Origen y Desarrollo. *Academia.edu*. https://www.academia.edu/3611109/Sobre_la_ense%C3%B1anza_por_proyectos

Ng, K.Y. y Chung, E.C. (2019) Project-Based Learning and Why it Works: A Student Perspective. En: G. Amouzad, E. C. Chung, S. Narayana, M. Hosseini (Eds.), *Engineering Grand Challenges in Scholar Programs* (pp. 33-37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-3579-2_3

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. Sage Publications.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Horsori.

Real Academia Española. (s.f.). Optimizar. En Diccionario de la lengua española. Recuperado en 28 de marzo de 2022 de https://dle.rae.es/optimizar

Reyes, K. (2020). *Aprendizaje basado en proyectos en Matemática: enseñanza de expresiones algebraicas para los alumnos de 1° de ESO*. [Tesis de maestría, Universidad Internacional de La Rioja]. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15738.72643

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemática. En L. Rico., E. Castro., M. Coriat., A. Marín., L. Puig., M. Sierra. y M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Horsori.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y metodología de investigación. En L. Rico., J. Lupiáñez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.1-22). Comares, S.L.

Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Investigación educativa*, *7*(12), 23-40. https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/8177

Rozhkova, S., Ustinova, I. y Yanuschik, O. (2021). Poster: Project-Based Learning in the Mathematics Course for First Year Students at a Technical University. En: M.E. Auer, T. Rüütmann (Eds.) *Educating Engineers for Future Industrial Revolutions* (pp. 341 - 348). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-68198-2_31

Ruiz-Hidalgo, J. y Fernández-Plaza, J. (2013). Planificación de unidades didácticas en enseñanza secundaria mediante el uso del Análisis Didáctico. En L. Rico., J. Lupiáñez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.231-253). Comares, S.L.

Sequeira, F. y Ramírez, J. (2022). *Notas de clase del curso MAT050 Cálculo II para Economía*. Documento no publicado. Universidad Nacional, Costa Rica.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Síntesis.

Stewart, J., Clegg, D. y Watson, S. (2020). *Calculus: Early Transcendentals* (IX ed.). Cengage.

Sheikh, T. O. (2015). *The role of Visualization in the Teaching and Learning of Multivariate Calculus and Systems of Ordinary Differential Equations*. [Tesis de doctorado, University of Western Cape]. http://hdl.handle.net/11394/5184

Silvio, D. (2009). Triangulación: Procedimiento incorporado a nuevas metodologías de investigación. *Revista Digital Universitaria*, *10*(8). http://www.revista.unam.mx/vol.10/num8/art53/art53.pdf

Slough, S. W. y Milam, J. O. (2013). Theorical Framework for the Design of STEM Project-Based Learning. En R. M. Capraro, M. M. Capraro, & J. M. Morgan (Eds.), *STEM Project-Based Learning: An Integrated Science, Technology, Engineering, and Mathematics* (2nd ed., pp. 1-5). Sense Publishers.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

Untarti, R. y Badu, A. (2019). Error identification in problem solving on multivariable calculus. *Journal of Physics: Conference* Series, *1188*(1), 1-10. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1188/1/012064

Valenzuela-Molina, M., Ramos-Rodríguez, E., González-Plate, L. I. y Portugal-Villar, J. L. (2018). El análisis didáctico como base de un curso en la formación inicial de profesores de educación primaria. *Revista iberoamericana de educación superior*, *9*(25), 118-137. http://dx.doi.org/10.22201/ iisue.20072872e.2019.25.345

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/8445/

Wang, F. y Hannafin, M. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology, Research and Development*, *53*(4), 5–23. https://doi.org/10.1007/BF02504682

Watts, M. y Schaur, G. (2010). Teaching and assessment methods in undergraduate economics: A fourth national quinquennial survey. *The Journal of Economic Education, 42*(3), 294-309. https://doi.org/10.1080/00220485.2011.581956

Zuccheri, L. y Zudini, V. (2014) History of Teaching Calculus. En: A. Karp, & G. Schubring (Eds.) *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 493 - 513). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_24

Anexos

Anexo 1

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Ficha bibliográfica

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características del documento en estudio, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. Información general del documento

a) Título: ____

b) Persona(s) autora(s): ____________________________________
____

c) Tipo de documento: (   ) Programa de curso
(   ) Material de apoyo del profesorado
(   ) Plan de estudios
(   ) Libro de texto

d) Fecha de publicación: ___________________________________

e) Fecha de consulta: ______________________________________

2. Información relacionada a la temática en cuestión

2.1. Análisis conceptual

a) ¿El documento establece de manera explícita definiciones asociadas al tema funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles sería las definiciones expuestas en el documento?

____

b) ¿El documento establece de manera explícita propiedades asociadas al tema funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las propiedades señaladas en el documento?

____

c) ¿El documento establece de manera explícita la evolución histórica del tema funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuál sería el desarrollo histórico descrito en el documento?

____

____

____

____

____

2.2. Análisis de contenido

a) ¿El documento establece de manera explícita conceptos asociados al tema funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los conceptos señalados en el documento?

____

____

____

____

____

b) ¿El documento establece de manera explícita procedimientos asociados a la resolución de tareas del tema funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los procedimientos descritos en el documento?

c) ¿El documento establece de manera explícita representaciones de los conceptos asociados al tema funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las representaciones señaladas en el documento?

d) ¿El documento establece de manera explícita fenómenos asociados al tema funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los fenómenos descritos en el documento?

____

____

____

____

____

2.3. Análisis cognitivo

a) ¿El documento establece de manera explícita los objetivos de la enseñanza del tema funciones de varias variables a estudiantes de Economía?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los objetivos señalados en el documento?

____

____

____

____

____

b) ¿En base a la información expuesta en el documento es posible establecer limitantes en el aprendizaje del tema funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las limitantes identificadas?

____

____

____

____

____

c) ¿El documento establece de manera explícita tareas matemáticas asociadas al tema funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las tareas señaladas en el documento?

____

____

____

____

____

Anexo 2

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Ficha bibliográfica # 1

<u>Instrucciones</u>: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características del documento en estudio, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. Información general del documento

a) Título: Calculus: Early Transcendentals
b) Persona(s) autora(s): James Stewart, Daniel Clegg y Saleem Watson.
c) Tipo de documento: ( ) Programa de curso
( ) Material de apoyo del profesorado
( ) Plan de estudios
(x) Libro de texto
d) Fecha de publicación: 01 de setiembre de 2020
e) Fecha de consulta: marzo – abril 2022

2. Información relacionada a la temática en cuestión

2.1. Análisis conceptual

a) ¿El documento establece de manera explícita definiciones asociadas al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles sería las definiciones expuestas en el documento?

Función de n variables

Una función f de n variables corresponde a una regla que asigna un único número real denotado $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a cada n-tupla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reales de un conjunto D. El conjunto D es el dominio de f y el rango es el conjunto de valores que f toma, es decir, $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) | (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$.

Gráfica de una función de dos variables

Sea f una función de dos variables con dominio D, la gráfica de f corresponde a todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en D.

Curvas de nivel

Las curvas de nivel de una función f de dos variables son las curvas con ecuaciones $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el ámbito de f).

Derivada parcial de primer orden

Sea f una función de n variables, la derivada parcial de primer orden con respecto a la i-ésima variable x_i viene dada por el límite $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \underset{h \to 0}{lím} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$, siempre que este exista.

Derivada parcial de segundo orden (función de dos variables)

Sea f una función de dos variables cuyas derivadas parciales de primer orden de primer orden f_x y f_y también corresponden a funciones de dos variables, las derivadas parciales de primer orden de estas últimas corresponden a las derivadas parciales de segundo orden de f y se denotan de la siguiente manera:

- $(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
- $(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
- $(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
- $(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Ecuación de Laplace

La ecuación parcial $\frac{\partial_u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial_x^2}{\partial y^2} = 0$ se denomina ecuación de Laplace. Las soluciones de esta ecuación reciben el nombre de funciones armónicas.

Regla de la cadena

Sea f una función de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferenciable, tal que cada x_j es una función de m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$ diferenciable. Entonces f es una función m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y $\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$ con $i = 1, 2, \ldots, m$.

Vector gradiente

Sea f una función de dos variables x y y, el gradiente de f es la función vectorial ∇f definida como $\nabla f = < f_x(x,y), f_y(x,y) > = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$.

Extremos locales (funciones de dos variables)

Sea f una función de dos variables, f posee un máximo local en (a,b) si $f(x,y) \leq f(a,b)$ cuando (x,y) está cerca de (a,b) y el número $f(a,b)$

se denomina valor máximo local. Si $(x, y) \geq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b), entonces f posee un mínimo local en (a, b) y $f(a, b)$ se denomina valor mínimo local.

Criterio de la segunda derivada

Supóngase que las derivadas parciales de segundo orden de f son continuas en un disco de centro (a, b) y $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$. Se define $D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - \left[f_{xy}(a, b)\right]^2$ y se tiene que:

- Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un valor local mínimo.
- Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un valor local máximo.
- Si $D < 0$, entonces (a, b) es un punto de ensilladura.

Extremos absolutos (funciones de dos variables)

Sea (a, b) un punto del dominio D de una función f de dos variables. Entonces $f(a, b)$ corresponde a:

- Un valor máximo absoluto de f en D si $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo (x, y) en D.
- Un valor mínimo absoluto de f en D si $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todo (x, y) en D.

Método de los multiplicadores de Lagrange (funciones de dos variables)

Para encontrar los valores máximos y mínimos de $f(x, y)$ de acuerdo con la restricción $g(x, y) = k$ [asumiendo que estos valores extremos existen y las primeras derivadas parciales de g son distintas de cero en la superficie $g(x, y) = k$]:

1. Encontrar los valores de x, y y λ que satisfacen las siguientes ecuaciones:
   $f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad g(x,y) = k.$
2. Evaluar f en todos los puntos (x,y) obtenidos en el paso anterior. El punto en donde se obtenga el valor más grande se alcanza un valor máximo de f; en el valor más pequeño un valor mínimo de f.

Método de los multiplicadores de Lagrange (dos restricciones)

Para encontrar los valores máximos y mínimos de $f(x,y)$ de acuerdo con la restricción $g(x,y) = k$ y $h(x,y) = c$

1. Encontrar los valores de x, y, λ y μ que satisfacen las siguientes ecuaciones:
   $f_x = \lambda g_x + \mu h_x \quad f_y = \lambda g_y + \mu h_y \quad g(x,y) = k$
   $h(x,y) = c.$
2. Evaluar f en todos los puntos (x,y) obtenidos en el paso anterior. El punto en donde se obtenga el valor más grande se alcanza un valor máximo de f; en el valor más pequeño un valor mínimo de f.

b) ¿El documento establece de manera explícita propiedades asociadas al tema funciones de varias variables?

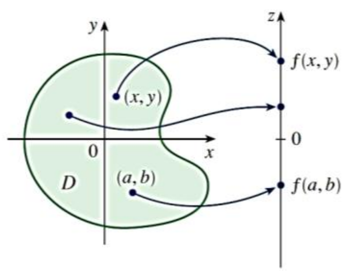
(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las propiedades señaladas en el documento?

- En el caso de las funciones de dos variables, se suele utilizar la notación $z = f(x, y)$ para explicitar el valor obtenido al evaluar el punto (x, y) en f. Las variables x y y son variables independientes y z es una variable dependiente.
- Las funciones de dos variables son funciones tales que el dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y el ámbito es un subconjunto de $\mathbb{R}$.
- Las funciones de dos variables pueden visualizarse por medio de un diagrama de flechas, tal como se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Diagrama de flechas de función de dos variables



Nota. Tomado de Stewart et al. (2020).

En este caso, el dominio D es representado como un subconjunto en el plano xy y el rango como conjunto de números en la recta numérica, a la cual se le denomino el eje z.

- Sea f una función de dos variables que se representa únicamente a través de una fórmula, es decir, el dominio no es especificado. El dominio se entiende como el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales dicha fórmula define un número real.
- Sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de n variables, se tiene que D es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.
- Sea f una función de n variables y el criterio de esta, el dominio D de f corresponde al conjunto de las n-tuplas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para las cuales la expresión dada define un número real.

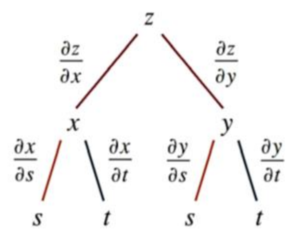
- No todas las funciones pueden representarse a través de una fórmula explícita.
- La curva de nivel $f(x,y)=k$ corresponde al conjunto de todos los puntos del dominio de f en los cuales f toma el valor de k. Es decir, es una curva en el plano xy que representa la posición en que la gráfica de f posee una altura k.
- Las curvas de nivel $f(x,y)=k$ son trazas de la de la gráfica de f en el plano horizontal $z=k$ proyectadas en el plano xy.
- Es difícil visualizar geométricamente las funciones de tres o más variables.
- En algunas ocasiones se utiliza la notación vectorial para representar una función f de n variables. Para ello se consideran los vectores $x = < x_1, x_2, \dots, x_n >$ y $c = < c_1, c_2, \dots, c_n >$ y la notación $f(x)$ en lugar de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, esto con el fin de reescribir f de la manera $f(x) = c \cdot x$.
- La derivada parcial de primer orden de $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con respecto a la i-ésima variable x_i, se obtiene al seguir el procedimiento utilizado en el cálculo de una variable considerando las variables $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ constantes y f como una función de la variable x_i.
- Para denotar la derivada parcial de primer orden de $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con respecto a la i-ésima variable x_i se pueden utilizar las notaciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$, f_{x_i}, f_i o $D_i f$.
- La derivada parcial de primer orden de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto (a,b) con respecto a la variable x, se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva resultante de la intersección entre la curva $f(x,y)=z$ y el plano $y=b$ que pasa por el punto $f(a,b,f(a,b))$. La derivada parcial de primer orden de f en

el punto (a, b) con respecto a la variable y, se interpreta geométricamente de manera análoga.

- La derivada parcial de primer orden de $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con respecto a la i-ésima variable x_i, no puede ser interpretada geométricamente si $n \geq 3$.
- La derivada parcial de primer orden de $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con respecto a la i-ésima variable x_i, se interpreta como la razón de cambio de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con respecto a x_i cuando $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ son consideradas constantes.
- Las notaciones f_{xy} o $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ indican que en primer lugar se deriva con respecto a x y luego con respecto a y. Mientras que las notaciones f_{yx} o $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ indican lo contrario.
- Se considera la función $z = f(x, y)$ tal que x y y son funciones de la variable t, es decir, z es indirectamente una función de t, $z = f(g(t), h(t))$. La regla de la cadena establece una fórmula que permite derivar z con respecto a t.
- En el caso de la regla de la cadena, se consideran tres tipos de variables: las variables independientes $(t_1, t_2, \dots, t_m)$, las variables intermedias $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y la variable dependiente $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- La regla de la cadena puede visualizarse por medio de un diagrama de árbol, tal como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Diagrama de árbol



Nota. Tomado de Stewart et al. (2020).

En primer lugar, se trazan ramas desde la variable dependiente z hasta las variables intermedias x y y para indicar que z es una función de x y y. Luego, se trazan ramas desde las variables x y y hasta las variables independientes s y t. En cada rama se escribe la derivada parcial correspondiente.

- Sea f una función diferenciable de dos variables y se supone que $\nabla f(x) \neq 0$.
  - La derivada direccional de f en x en la dirección de un vector unitario u viene dada por $D_u f(x) = \nabla f(x) \cdot u$.
  - $\nabla f(x)$ señala la dirección de la razón máxima de incremento de f en x, y la máxima razón de cambio es $|\nabla f(x)|$.
  - $\nabla f(x)$ es perpendicular a la curva de nivel de f en x.
- Existe un punto (a, b) donde f posee un máximo local, es decir, $f(a, b)$ es mayor que los valores cercanos $f(x, y)$. Del mismo modo, existe un punto (a, b) donde f posee un mínimo local donde $f(a, b)$ es menor que los valores cercanos $f(x, y)$. El mayor valor de $f(x, y)$ en el dominio de f es el máximo absoluto, así como el menor valor es el mínimo absoluto.
- Si f posee un máximo o mínimo local en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden de f existen, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

- Un punto (a, b) se denomina punto crítico o punto estacionario de f si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de estas derivadas parciales no existe.
- Si (a, b) es un punto crítico de f tal que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, entonces $f(a, b)$ es un valor máximo local, un valor mínimo local o ninguno. En el último caso, (a, b) se conoce como un punto de ensilladura de f.
- Los posibles valores para λ en el método de los multiplicadores de Lagrange no se necesitan para establecer una conclusión.
- Las ecuaciones $f_x = \lambda g_x$, $f_y = \lambda g_y$ y $g(x, y,) = k$ se derivan de la ecuación vectorial $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$.
- Si $\lambda \neq 0$ y $x = x_0$ y $y = y_0$ es una solución del sistema de ecuaciones del método de los multiplicadores de Lagrange, se tiene que $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son paralelos.
- Si $\lambda = 0$, entonces $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$, $f_z(x_0, y_0,) = 0$ y (x_0, y_0) es un punto crítico de f. Por tanto, $f_x(x_0, y_0)$ es un posible valor extremo de f.
- En el método de los multiplicadores de Lagrange para funciones de tres variables se consideran las siguientes ecuaciones:
  $f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad f_z = \lambda g_z \quad g(x, y, z) = k.$

c) ¿El documento establece de manera explícita la evolución histórica del tema funciones de varias variables?

( ) Sí (x) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuál sería el desarrollo histórico descrito en el documento?

2.2. Análisis de contenido

a) ¿El documento establece de manera explícita conceptos asociados al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los conceptos señalados en el documento?

Función de n variables, gráfica de una función de 2 variables, curvas de nivel, derivada parcial de primer orden, derivada parcial de segundo orden, ecuación de Laplace, vector gradiente, extremos locales y extremos absolutos.

b) ¿El documento establece de manera explícita procedimientos asociados a la resolución de tareas del tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los procedimientos descritos en el documento?

Evaluar un punto en el criterio de una función de n variables.

Dibujar un boceto del dominio de una función de n variables a mano y por medio de un programa computacional.

Encontrar el dominio de una función de una función de n variables.

Identificar puntos de una función de n variables en todas sus representaciones.

Dibujar un boceto de la gráfica de una función de 2 variables a mano y por medio de un programa computacional.

Aproximar puntos de una función de n variables a través de su mapa de contorno.

Dibujar un boceto de las curvas de nivel de una función de n variables para determinados valores de la constante k.

Dibujar un boceto de las curvas de nivel de una función de n variables.

Encontrar las derivadas parciales de una función de n variables.

Utilizar la regla de la cadena para determinar la derivada parcial de una función de n variables compuestas.

Interpretar geométricamente las derivadas parciales de una función de n variables.

Resolver problemas en contextos reales que involucran funciones de n variables.

Identificar el vector gradiente de una función de n variables.

Identificar puntos críticos de una función de n variables.

Identificar los extremos locales de una función de n variables.

Utilizar el criterio de la segunda derivada para determinar los extremos locales de una función de n variables, o bien, los puntos de ensilladura.

Identificar extremos absolutos de una función.

Identificar los extremos locales de una función de n variables sujetas a una o varias restricciones por medio del método de los multiplicadores de Lagrange.

c) ¿El documento establece de manera explícita representaciones de los conceptos asociados al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las representaciones señaladas en el documento?

Simbólica, algebraica, verbal, gráfica, tabular, icónicas y ejecutables.

d) ¿El documento establece de manera explícita fenómenos asociados al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los fenómenos descritos en el documento?

Identificación de puntos extremos en formas de relieve (por ejemplo, montañas) en diferentes direcciones.
Identificación de la capacidad máxima de espacio dentro de un objeto (en forma de figura 3D).
Identificación de las dimensiones de un objeto (en forma de figura 3D) que maximizan la capacidad dentro de este y minimizan la cantidad de materiales requeridos para confeccionarlo.
Diseño de la estructura de edificios que permitan mantener temperaturas determinadas.
Determinar las características deseadas para lograr el rendimiento óptimo de un proceso (por ejemplo, en agricultura).
Determinar la diversidad presente en un ecosistema.
Determinar la cantidad de la población que carga con un gen específico.
El método de los mínimos cuadrados.

Determinar la producción total de acuerdo con la cantidad de trabajo y la inversión económica requerida (modelo Cobb-Douglas).

2.3. Análisis cognitivo

a) ¿El documento establece de manera explícita los objetivos de la enseñanza del tema funciones de varias variables a estudiantes de Economía?

( ) Sí (x) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los objetivos señalados en el documento?

____

____

____

____

____

b) ¿En base a la información expuesta en el documento es posible establecer limitantes en el aprendizaje del tema funciones de varias variables?

( ) Sí (x) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las limitantes identificadas?

____

____

____

c) ¿El documento establece de manera explícita tareas matemáticas asociadas al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las tareas señaladas en el documento?

En 1928 Charles Cobb y Paul Douglas publicaron un estudio en el que se modelizó el crecimiento de economía norteamericana en el período 1899-1922. Este buscó establecer una visión simplificada de la economía en la cual la producción fue determinada por la cantidad de trabajo y capital invertido.

Pese a que otros factores influyen en el desarrollo económico, este modelo probó ser bastante preciso. La función que Cobb y Douglas utilizaron para modelizar la producción tenía la forma $P(L, K) = bL^{a}K^{1-a}$ (a), en donde P es el total de producción (el valor monetario de todos los productos producidos en un año), L es la cantidad de trabajo (el número total de horas por persona trabajadas en un año) y K es la cantidad de capital invertido (el valor monetario de toda la maquinaria, equipo y edificios).

Los economistas utilizaron la información publicada por el gobierno para crear la Tabla 9 que se muestra a continuación.

Tabla 9

Producción en el período 1899-1922

Año	***P***	***L***	***K***
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198

Año	***P***	***L***	***K***
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

Nota. Tomado de Stewart et al. (2020).

Ellos tomaron el año 1899 como base y a las variables P, L y K de este se les asignó el valor de 100. Los valores de los otros años se expresaron como porcentajes de los valores de 1899.

La función (a) puede expresarse de la manera $ln\frac{P}{K} = lnb + aln\frac{L}{K}$, si se considera $x = ln\frac{L}{K}$ y $y = ln\frac{P}{K}$. Es decir, la ecuación (a) puede ser representada como la ecuación lineal $y = ax + lnb$. Si se utiliza la tabla anterior para crear una nueva tabla de valores considerando $ln\frac{L}{K}$ y $ln\frac{P}{K}$ para los años 1899-1922. Utilizando el método de mínimos cuadrados se puede encontrar la recta de regresión lineal que pasa por los puntos $\left(ln\frac{L}{K}, ln\frac{P}{K}\right)$ y expresar la función de producción de Cobb-Douglas de la manera $P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ (verifique).

Además, es necesario señalar que $\frac{\partial P}{\partial L}$ representa la razón en que la producción cambia con respecto a la cantidad de trabajo, a esta se le denomina productividad marginal del trabajo. De manera análoga, a $\frac{\partial P}{\partial K}$ se le llama productividad marginal de capital.

A continuación, se utilizan las derivadas parciales para demostrar cómo a partir de (a) se obtienen las siguientes afirmaciones sobre la economía.

- Si el trabajo o el capital desaparecen, también lo hará la producción.
- La productividad marginal del trabajo es proporcional a la cantidad de producción por unidad de trabajo (P/L).
- La productividad marginal del capital es proporcional a la cantidad de producción por unidad de capital (P/K).

Si la segunda afirmación se expresa de la manera $\frac{\partial P}{\partial L} = a\frac{P}{L}$ con a constante y K se mantiene constante ($K = K_0$), esta ecuación diferencial parcial se convierte en una ecuación diferencial ordinaria $\frac{dP}{dL} = a\frac{P}{L}$. Resuelva esta ecuación diferencial separable para probar que $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$, en donde C_1 se escribe $C_1(K_0)$ porque puede depender del valor de K_0. De manera similar, compruebe que si L se mantiene constante ($L = L_0$) entonces $P(L, K) = C_2(L_0)K^{\beta}$.

Concluya que $P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$ donde b es una constante independiente de L y K. Cobb y Douglas asumieron que $\alpha + \beta = 1$, de manera que obtuvieron la ecuación (a). En este caso, si el trabajo y capital incrementan por un factor m, ¿por cuál factor incrementa la producción?

Asimismo, los economistas utilizaron la función $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ para modelar la economía norteamericana de 1899 a 1922. Encuentre la productividad marginal del trabajo y la productividad marginal del capital del año 1920 ($L = 194$, $K = 407$) e interprete los resultados. En este año, ¿qué hubiese beneficiado más a la producción, un aumento en el capital invertido o en lo relativo al trabajo?

Tomando en consideración (a) tal que b y a son constantes positivas y $a < 1$, suponga que m es el costo de unidad de trabajo, n es el costo de unidad de capital y p es la cantidad de dólares que la compañía tiene presupuestado gastar. Maximice la producción P sujeta a la restricción $mL + nK = p$. Demuestre que la producción máxima se obtiene cuando $L = \frac{ap}{m}$ y $K = \frac{(1-a)p}{n}$.

Finalmente, suponga que la producción se expresa de la forma $bL^{a}K^{1-a} = Q$ en donde Q es constante. ¿Cuáles son los valores de L y K que minimizan la función del costo $C(L, K) = mL + nK$.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Ficha bibliográfica # 2

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características del documento en estudio, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

3. Información general del documento

f) Título: Calculus: Mathematical Methods for Economics
g) Persona(s) autora(s): Michael Klein.
h) Tipo de documento: ( ) Programa de curso
( ) Material de apoyo del profesorado
( ) Plan de estudios
(x) Libro de texto
i) Año de publicación: 2014
j) Año de consulta: 2022

4. Información relacionada a la temática en cuestión

2.4. Análisis conceptual

d) ¿El documento establece de manera explícita definiciones asociadas al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles sería las definiciones expuestas en el documento?

Función multivariable

Una función multivariable tiene más de una variable como argumento.

Derivada parcial de primer orden

La derivada parcial de una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con respecto al argumento x_i se denota $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ y viene dada por $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \underset{\Delta_{x_i} \to 0}{lím} \frac{f\left(x_1, \ldots, x_i + \Delta_{x_i}, \ldots, x_n\right) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta_{x_i}}$, siempre que el límite exista.

Derivada parcial de segundo orden

La derivada parcial de segundo orden determina la medida en que la derivada parcial de primer orden de una función multivariable con respecto a un argumento cambia al realizar una pequeña variación en este, o bien, al realizar una pequeña variación en el otro argumento (derivadas cruzadas).

Regla de la cadena

Si los argumentos de una función diferenciable $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son a su vez funciones diferenciables de las variables $t_1, \ldots, t_m$ tales que $x_1 = g^1(t_1, \ldots, t_m)$, $x_2 = g^2(t_1, \ldots, t_m)$, …, $x_n = g^n(t_1, \ldots, t_m)$, donde

$g^i(t_1, \ldots, t_m)$ es la i-ésima función multivariable, entonces $\frac{\partial y}{\partial t_i} = f_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + f_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + f_n \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$ con $f_n = \frac{\partial y}{\partial x_i}$.

Matriz Hessiana

La matriz de tamaño $n \times n$ compuesta por las derivadas parciales de segundo orden de una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en donde la entrada (i, j) corresponde a la derivada parcial de segundo orden $f_{ij}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ recibe el nombre de matriz Hessiana de y. En donde los menores principales corresponden a los determinantes de las submatrices principales.

Matriz definida positiva

Una matriz de tamaño $n \times n$ es definida positiva si y solo si los n menores principales son estrictamente positivos.

Matriz definida negativa

Una matriz de tamaño $n \times n$ es definida positiva si y solo si los n menores principales alternan su signo y el primero es negativo.

Condición suficiente para un máximo local

Si la función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ posee un punto estacionario $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ y la matriz Hessiana evaluada en este es definida negativa, entonces en $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ se alcanza un máximo local de y.

Condición suficiente para un mínimo local

Si la función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ posee un punto estacionario $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ y la matriz Hessiana evaluada en este es definida positiva, entonces en $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ se alcanza un mínimo local de y.

Punto de ensilladura

Si la función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ posee un punto estacionario $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ y la matriz Hessiana no es definida positiva ni definida negativa, entonces $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ corresponde a un punto de ensilladura de y.

Optimización

Las técnicas matemáticas que se utilizan para identificar los resultados óptimos (valores extremos) de modelos económicos (funciones multivariables) se denominan métodos de optimización.

Lagrangiano

El Lagrangiano para problemas de maximización restringida o minimización restringida con la función objetivo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sujeta a las restricciones de igualdad $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i$ con $i = 1, \dots, m$ viene dado por $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - c_i\right)$, en donde x_1, x_2, …, x_n son variables por escoger y cada λ_i se conoce como un multiplicador de Lagrange.

Método de los multiplicadores de Lagrange

El problema de optimización con restricciones correspondiente al Lagrangiano se resuelve al solucionar el sistema de ecuaciones que se obtienen de las derivadas parciales de primer orden de este con respecto a cada uno de los argumentos de la función objetivo igualadas a cero y la restricción de igualdad $\left(\frac{\partial L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)}{\partial_{x_1}} = 0, \frac{\partial L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)}{\partial_{x_2}} = 0, \dots, \frac{\partial L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)}{\partial_{x_n}} = 0, g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_m \right)$.

e) ¿El documento establece de manera explícita propiedades asociadas al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las propiedades señaladas en el documento?

- En econometría, una variable que identifica una característica cualitativa y toma los valores 0 o 1 se denomina variable ficticia.

- La derivada parcial de una función multivariable con respecto a uno de sus argumentos representa la razón de cambio del valor de esa función debido a un pequeño cambio en ese argumento mientras que todas las otras variables, las cuales también son argumentos de la función, se mantienen constantes.
- La derivada parcial permite observar el efecto que resulta de un cambio en uno de los argumentos de una función multivariable, esto con la finalidad de aislar la influencia de dicho factor.
- La notación de una derivada parcial refleja su relación con la derivada de una función de una variable y la manera en que se diferencia de esta. En $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ el símbolo ∂ reemplaza el símbolo d utilizado en la derivación de funciones de una variable.
- Para representar la derivada parcial de una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con respecto al argumento x_i se pueden utilizar las notaciones $\frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si $z = f(x, y)$, para la derivada parcial con respecto al argumento x también se pueden utilizar $f_x(x, y)$ o f_x.
- La derivada parcial de una función multivariable con respecto a uno de sus argumentos se encuentra aplicando las reglas de derivación en una variable y tratando todos los otros argumentos de la función como constantes.
- Al considerar una función de dos variables, la derivada parcial se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a una porción de la gráfica de esta, en donde se mantiene constante un factor mientras que se modifica el nivel del otro factor.
- Las derivadas parciales de segundo orden de una función $y = f(x_1, x_2)$ se denotan de la manera $f_{11}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $f_{12}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $f_{21}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ y $f_{22}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$.

- Una función multivariable se denomina compuesta si sus argumentos también son funciones que dependen de otra variable.
- La solución de muchos tipos de modelos económicos requiere la identificación de un resultado óptimo, cuya caracterización requiere de la identificación de un valor extremo de la función (máximo o mínimo). La determinación de este se denomina optimización si el punto representa el mejor resultado económico posible.
- El diferencial total dy de una función multivariable $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ viene dado por $dy = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 + \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n$, donde $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa la derivada parcial de la función con respecto al i-ésimo argumento.
- El punto estacionario de una función multivariable corresponde a un conjunto de valores de los argumentos de la función $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ tales que el diferencial total es cero para cualquier conjunto de valores $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$. En otras palabras, el punto estacionario corresponde al punto donde todas las derivadas parciales se anulan.
- Si la función $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable con respecto a cada uno de los argumentos en el dominio y alcanza un máximo o mínimo en el punto estacionario $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ que también pertenece al dominio, entonces cada una de las derivadas parciales evaluadas en este punto son iguales a cero. Es decir, $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 = 0, \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.
- El segundo diferencial total de una función bivariable $y = f(x_1, x_2)$ viene dado por $d^2y = f_{11}(dx_1)^2 + f_{22}(dx_2)^2 + 2f_{12}(dx_1 \cdot dx_2)$.
- Si el segundo diferencial total evaluado en un punto estacionario de la función $f(x_1, x_2)$ es negativo para dx_1 y dx_2, entonces el punto estacionario representa un máximo local de la función.

- Si el segundo diferencial total evaluado en un punto estacionario de la función $f(x_1, x_2)$ es positivo para dx_1 y dx_2, entonces el punto estacionario representa un mínimo local de la función.
- Si la función $y = f(x_1, x_2)$ posee un punto estacionario (x_1^*, x_2^*), $f_{11}(x_1^*, x_2^*) < 0$ y $f_{11}(x_1^*, x_2^*)f_{22}(x_1^*, x_2^*) > (f_{12}(x_1^*, x_2^*))^2$, entonces la función alcanza un máximo local en este punto estacionario. Lo anterior implica que $f_{22}(x_1^*, x_2^*) < 0$.
- Si la función $y = f(x_1, x_2)$ posee un punto estacionario (x_1^*, x_2^*), $f_{11}(x_1^*, x_2^*) > 0$ y $f_{11}(x_1^*, x_2^*)f_{22}(x_1^*, x_2^*) > (f_{12}(x_1^*, x_2^*))^2$, entonces la función alcanza un mínimo local en este punto estacionario. Lo anterior implica que $f_{22}(x_1^*, x_2^*) > 0$.
- Si las derivadas parciales f_{11} y f_{22} poseen signos opuestos (una es positiva y la otra es positiva) en un punto estacionario, este se conoce como punto de ensilladura.
- Las condiciones mencionadas en los tres puntos anteriores son suficientes, pero no necesarias. En particular, estas condiciones no permiten caracterizar el punto estacionario (x_1^*, x_2^*) si $f_{11}(x_1^*, x_2^*) = 0$, $f_{22}(x_1^*, x_2^*) = 0$ o $f_{11}(x_1^*, x_2^*)f_{22}(x_1^*, x_2^*) = (f_{12}(x_1^*, x_2^*))^2$.
- Si la matriz Hessiana de una función es negativa semidefinida en el dominio correspondiente, entonces un punto estacionario de este es un máximo global.
- Si la matriz Hessiana de una función es positiva semidefinida en el dominio correspondiente, entonces un punto estacionario de este es un mínimo global.
- El problema básico de optimización con restricciones refleja la tensión entre lo que es deseado y lo que se puede obtener.
- La función objetivo enlaza el nivel de las varias variables de elección con el objetivo final del problema.

- La restricción es la fuente de intercambio entre las diferentes opciones y presenta los límites alcanzables en el valor de los argumentos de la función objetivo.
- El conjunto factible de un problema de optimización con restricciones es el conjunto de argumentos de la función objetivo que satisfacen todas las restricciones del problema simultáneamente.
- Las restricciones de igualdad son restricciones que se cumplen exactamente.
- Las restricciones de desigualdad permiten que una función de una o más de variables de elección ser menor o mayor que algún nivel.
- El multiplicador de Lagrange representa el cambio en el valor óptimo de la función objetivo de acuerdo con un pequeño cambio en la restricción.
- Sea el Lagrangiano de una función de n variables $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sujeta a m restricciones $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i$ con $i = 1, \ldots, m$ asociadas a los multiplicadores de Lagrange λ_i. La matriz Hessiana orlada corresponde a:

$$\begin{bmatrix} 0 & \hat{0} & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \tilde{0} & \hat{\hat{0}} & \tilde{0} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \hat{0} & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}$$

En donde $\tilde{0}$ representa el vector columna $(m-2) \times 1$ con todas las entradas iguales a 0; $\hat{0}$ el vector fila $(m-2) \times 1$ con todas las entradas iguales a 0, y $\hat{\hat{0}}$ una matriz de tamaño $(m-2) \times (m-2)$ con todas las entradas iguales a 0.

- Se considera el Lagrangiano de una función objetivo de n variables sujetas a m restricciones. Si el determinante de la matriz Hessiana orlada evaluada en un punto estacionario determinado tiene el mismo signo que $(-1)^n$ y los $n-m$ menores principales alternan el signo, en este punto estacionario se alcanza un máximo.
- Se considera el Lagrangiano de una función objetivo de n variables sujetas a m restricciones. Si el determinante de la matriz Hessiana orlada evaluada en un punto estacionario determinado y los $n-m$ menores principales tienen el mismo que $(-1)^m$, en este punto estacionario se alcanza un mínimo.
- Si las condiciones descritas en los dos puntos anteriores no se cumplen para menores principales no nulos, el punto estacionario no representa un valor mínimo ni un valor máximo de la función.

f) ¿El documento establece de manera explícita la evolución histórica del tema funciones de varias variables?

( ) Sí (x) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuál sería el desarrollo histórico descrito en el documento?

____

2.5. Análisis de contenido

e) ¿El documento establece de manera explícita conceptos asociados al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los conceptos señalados en el documento?

Función multivariable, derivada parcial de primer orden, derivada parcial de segundo orden, regla de la cadena, matriz Hessiana, matriz definida positiva, matriz definida negativa, condición suficiente para un máximo local, condición suficiente para un mínimo local, punto de ensilladura, Optimización, Lagrangiano, método de los multiplicadores de Lagrange.

f) ¿El documento establece de manera explícita procedimientos asociados a la resolución de tareas del tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los procedimientos descritos en el documento?

Modelar problemas de contextos reales que involucran funciones multivariables.
Resolver problemas de contextos reales que involucran funciones multivariables.
Dibujar un boceto de la gráfica de una función multivariable.
Calcular de las derivadas parciales de una función multivariable.

Interpretar geométrica de las derivadas parciales de una función multivariable.
Interpretar de las derivadas parciales de una función multivariable como razón de cambio.
Evaluar las derivadas parciales de una función multivariable en un punto dado.
Identificar funciones multivariables compuestas.
Utilizar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales de una función multivariable compuesta.
Identificar extremos locales y puntos de ensilladura de una función multivariable.
Identificar puntos estacionarios de una función multivariable.
Identificar extremos locales y puntos de ensilladura de una función multivariable por medio de las derivadas parciales de segundo orden.
Identificar la matriz Hessiana de una función multivariable.
Clasificar una matriz en definida positiva y definida negativa.
Calcular los menores principales de una matriz.
Identificar extremos locales y puntos de ensilladura de una función multivariable por medio del criterio de la matriz Hessiana.
Identificar la matriz Hessiana orlada de una función multivariable.
Calcular los determinantes de una matriz.
Identificar los extremos locales o puntos de ensilladura de una función multivariable sujetos a restricciones por medio del método de los multiplicadores de Lagrange.
Identificar los extremos locales o puntos de ensilladura de una función multivariable por medio del criterio del Hessiano orlado.

g) ¿El documento establece de manera explícita representaciones de los conceptos asociados al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las representaciones señaladas en el documento?

Simbólica, algebraica, verbal, gráfica, y tabular.

h) ¿El documento establece de manera explícita fenómenos asociados al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los fenómenos descritos en el documento?

Maximizar el beneficio total de un monopolista que ofrece sus servicios a diferentes grupos de consumidores (a diferentes precios).
Determinar la cantidad de publicidad que maximiza los beneficios de un monopolista (buscar la cantidad de dinero óptimo que debería invertirse).
Determinar los niveles de inflación que maximizan los ingresos por antigüedad del dinero.
Determinar los niveles de impuestos que maximizan los ingresos por impuesto de la renta.
Determinar los niveles de inflación e impuestos que maximizan los ingresos del gobierno.
Determinar el nivel de educación y la cantidad de años de experiencia que maximizan la remuneración económica de una persona.
Determinar la cantidad de páginas de una revista que tratan teman diversos con el fin de maximizar las ventas de esta.
Determinar la cantidad de trabajo y capital que maximiza la producción de una empresa.

Determinar la cantidad de publicidad (propia y de rivales) que maximiza los beneficios de una empresa (la cantidad de dinero óptimo que debería invertirse).

Determinar la cantidad de ventas (en diferentes regiones) que maximizan los beneficios de una empresa.

Determinar la cantidad de producción en las diferentes plantas de una empresa que maximiza los beneficios para esta.

Determinar las condiciones óptimas de un proceso que minimizan los costos para una empresa.

Determinar la cantidad de horas de trabajo y de ocio que maximizan la productividad de una persona.

Determinar la cantidad máxima de productos que se pueden comprar dado un presupuesto.

2.6. Análisis cognitivo

d) ¿El documento establece de manera explícita los objetivos de la enseñanza del tema funciones de varias variables a estudiantes de Economía?

( ) Sí (x) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los objetivos señalados en el documento?

____

____

____

____

____

e) ¿En base a la información expuesta en el documento es posible establecer limitantes en el aprendizaje del tema funciones de varias variables?

(   ) Sí   (x) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las limitantes identificadas?

____

f) ¿El documento establece de manera explícita tareas matemáticas asociadas al tema funciones de varias variables?

(x) Sí   (   ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las tareas señaladas en el documento?

Tarea 1

Los beneficios de dos empresas fabricantes de cigarrillos, Cambells (C) y Marlbury (M), dependen de los presupuestos publicitarios de las propias empresas y de los presupuestos publicitarios de sus respectivos rivales de la siguiente manera:

$$\Pi_C = 1000A_C - A_C^2 - A_M^2$$
$$\Pi_M = 1000A_M - A_M A_C - A_M^2$$

En estas ecuaciones, Π_C y A_C representan los beneficios y el presupuesto de publicidad de Cambells, así como Π_M y A_M representan los beneficios y el presupuesto de publicidad de Marlbury.

- Suponga, inicialmente, que cada empresa toma el presupuesto de publicidad de su rival como un parámetro exógeno. Encuentre el presupuesto de publicidad óptimo para cada empresa. Además, encuentre los beneficios de cada una. Demuestre que este nivel representa los beneficios máximos.
- Suponga que las empresas se fusionan y, aunque se mantienen las marcas separadas, las personas a cargo de la unión seleccionan un A_C y A_M con el fin de maximizar $\Pi = \Pi_C + \Pi_M$. Determine A_C y A_M. ¿Los beneficios son mayores previos o luego de la unión? (En lugar de resolver para Π, identifique si A_C y A_M difieren de los resultados difieren de los encontrados en el primer punto. Si esto sucede, ¿qué implica?).
- Las personas encargadas de la nueva empresa derivada de la unión deben decidir si mantener las marcas separadas y productos diferenciados (lo cual implica dos campañas de publicidad diferentes) o mantener solo una marca. Si esta mantiene únicamente una de las marcas, no hay diferencia en la publicidad. Lo anterior ya que la función de beneficios, Π, es la suma de los beneficios de las funciones dadas inicialmente y $A = A_C = A_M$. ¿Qué sucede si P representa la no diferenciación de los productos $A = A_C = A_M$? ¿Cuál estrategia lleva a la empresa a obtener mayores beneficios?

Tarea 2

La función de producción de Cobb-Douglas corresponde a $Q = AK^aL^{1-a}$, donde Q representa la cantidad de productos, K es la cantidad de capital invertido y L es la cantidad de trabajo que se requirió. Suponga que una empresa debe apegarse a la siguiente función lineal que refleja su presupuesto

$C = wL + rK$, donde C es la cantidad total de dinero, w es la tasa salarial y r es la tasa de alquiler del capital.

- Determine la función de Lagrange que permite maximizar la producción dada un presupuesto $\bar{C}$.
- Determine la función de Lagrange que permite minimizar la cantidad total de dinero para obtener una producción específica.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Ficha bibliográfica # 3

<u>Instrucciones</u>: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características del documento en estudio, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

5. Información general del documento

k) Título: Área temática: derivadas parciales y optimización (presentaciones: funciones de varias variables y superficies, derivadas parciales, extremos de una función, extremos con restricciones / lista de ejercicios: derivadas parciales y optimización)
l) Persona(s) autora(s): Jeremías Ramírez Jiménez y Filánder Sequeira Chavarría
m) Tipo de documento: (   ) Programa de curso
(x) Material de apoyo del profesorado
(   ) Plan de estudios
(   ) Libro de texto
n) Fecha de publicación: I ciclo 2022 (marzo – julio)
o) Fecha de consulta: marzo – abril 2022

6. Información relacionada a la temática en cuestión

2.7. Análisis conceptual

g) ¿El documento establece de manera explícita definiciones asociadas al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles sería las definiciones expuestas en el documento?

Función de n variables

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, con n un entero positivo. Se define $f: A \to \mathbb{R}$ como una función de n variables, si f es una relación que asocia a cada n-tupla $a \in A$ un único elemento $b \in B$, donde $f(a) = b$.

Superficies

Una superficie es el conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $F(x, y, z) = 0$, donde $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar.

Gráfica de una función de dos variables

Sea $f: A \to B$ una función de dos variables (es decir $A \subseteq \mathbb{R}^2$). El conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$ conforman una superficie en el espacio, la cual se conoce como la gráfica de f.

Curvas de nivel

Dada una superficie $z = f(x, y)$ y el plano $z = k$, con $k \in \mathbb{R}$, a la curva de intersección resultante entre la superficie y el plano se denomina curva de nivel. Es decir, la curva de nivel obtenida a través del plano $z = k$ viene dada por $C_k \coloneqq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; f(x, y) = k\}$. Más aún, se denomina mapa de contorno a un conjunto de curvas de nivel C_k proyectadas en el plano xy.

Derivada parcial de primer orden

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de n variables, f posee n derivadas parciales de primer orden dados por $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, donde $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{1,\dots}, x_n) \coloneqq \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x_{1,\dots},x_n)}{h}$.

Vector gradiente

Sea $f: A \to B$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, cuyas derivadas parciales de primer orden existen. Se define el vector gradiente f (o simplemente el gradiente), denotado ∇f o $grad(f)$, como el operador diferencial $\nabla f: A \to \mathbb{R}^n$ con $\nabla f \coloneqq \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_\eta} \end{pmatrix}^t$, es decir, es el vector formado por todas las derivadas parciales de primer orden.

Regla de la cadena

Sea $z = f(u, v)$ una función diferenciable. Además, $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$ son funciones para las cuales existen las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$. Entonces, z es una función de x y y, y además:

- $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$

Derivadas parciales de segundo orden

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ de dos variables tal que sus derivadas parciales existen, y a su vez las derivadas parciales de estas también existen. Las derivadas parciales de orden dos de f son:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \coloneqq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, con notación alternativa: f_{xx}
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \coloneqq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, con notación alternativa: f_{yy}
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \coloneqq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, con notación alternativa: f_{xy}

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \coloneqq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, con notación alternativa: f_{yx}

Adicionalmente, a las derivadas f_{xy} y f_{yx} se les conoce como las derivadas mixtas o cruzadas.

Laplaciano

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dos variables cuyas derivadas parciales de segundo orden (al menos las no cruzadas) existen. Se define el laplaciano de f, denotado $\nabla^2 f$, como el operador diferencial $\nabla^2 f \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, es decir, corresponde a la suma de todas las derivadas parciales de segundo orden, exceptuando las cruzadas. En general, si f es una función de n variables, se tiene que $\nabla^2 f \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots \frac{+\partial^2 f}{\partial x_n}$.

Máximo relativo

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dos variables y $P = (x_0, y_0)$ un punto que pertenece a su dominio. Se dice que f alcanza un máximo relativo o máximo local en P, si existe una región abierta B de A, que contiene a P, tal que: $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in B$.

Mínimo relativo

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dos variables y $P = (x_0, y_0)$ un punto que pertenece a su dominio. Se dice que f alcanza un mínimo relativo o mínimo local en P, si existe una región abierta B de A, que contiene a P, tal que: $f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in B$.

Punto crítico

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dos variables y $P = (x_0, y_0)$ un punto en A. Suponga que A es un conjunto abierto y que f posee derivadas parciales continuas en A. Se dice que P es un punto crítico de f si $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$ son ambas cero, o bien, alguna de ellas no existe.

Punto silla

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dos variables y $P = (x_0, y_0)$ un punto que pertenece a su dominio. Se dice que f alcanza un punto silla o punto de ensilladura en P, si para toda región abierta B de A, que contiene a P, se cumple que existen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B$ tales que $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_O) < f(x_2, y_2)$.

Matriz Hessiana

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de n variables tal que A es abierto y las derivadas parciales de segundo orden de esta son continuas en A. La matriz Hessiana de f en el punto $x \in A$, denotada $H_f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, corresponde a la matriz:

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Matriz para la cual se definen los menores principales como los n determinantes:

$$\Delta_k(x) := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) \end{vmatrix}$$

con $k = 1,2, \dots, n$. Es decir, $\Delta_k(x)$ corresponde al determinante de la submatriz principal $k \times k$ de la matriz Hessiana.

Criterio de clasificación (funciones de dos variables)

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dos variables con derivadas parciales de segundo orden continuas en A, con A abierto. Suponga además que $P = (x_0, y_0)$ es un punto de A tal que $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ y que el determinante de la matriz Hessiana $H_f(x_{01} y_0)$ se denota de la forma $\Delta(P)$. Entonces, se cumple que:

- Si $\Delta(P) > 0$, entonces:

- Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$, entonces f alcanza un mínimo relativo en P.
- Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$, entonces f alcanza un máximo relativo en P.

- Si $\Delta(P) < 0$, entonces P no es un extremo relativo de f, ya que es un punto silla.
- Si $\Delta(P) = 0$, entonces el criterio no define. Es decir, P podría ser un extremo relativo o no serlo, pero no es posible estar una conclusión a través de este criterio.

Matriz definida

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de n variables con derivadas parciales de segundo orden en A, con A abierto. Sea además P una n-tupla de A.

- Si $\Delta_k(x) > 0$ para cada $k = 1,2, \dots, n$, entonces se dice que $H_f(P)$ es una matriz definida positiva.
- Si $(-1)^k \Delta_k(P) > 0$ para cada $k = 1,2, \dots, n$, entonces se dice que $H_f(P)$ es una matriz definida negativa.

Criterio de clasificación (funciones de n variables)

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de n variables con derivadas parciales de segundo orden continuas en A, con A abierto. Suponga además que P es una n-tupla de A tal que $\nabla f(P) = 0$. Entonces se cumple que:

- Si $H_f(P)$ es definida positiva, entonces f alcanza un mínimo relativo en P.
- Si $H_f(P)$ es definida negativa, entonces f alcanza un máximo relativo en P.
- Si $H_f(P)$ no es definida positiva ni definida negativa, entonces:
    - Si $\Delta_n(P) \neq 0$, entonces P es un punto silla de f.
    - Si $\Delta_n(P) = 0$, entonces el criterio no define.

Función de Lagrange

Considere el problema de hallar los extremos relativos de $f: A \to \mathbb{R}$ función de n variables sujetas a las m restricciones $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, para $i = 1,2, \dots, m$. Se define la función de Lagrange, o bien, el Lagrangiano de la forma $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \coloneqq f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$, donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, m$, es un parámetro conocido como el multiplicador de Lagrange.

Criterio de clasificación

Suponga que se tiene un punto crítico P de $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, además de las m restricciones ($m < n$):

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

es decir, $\tilde{P} \coloneqq (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ es un punto crítico de la función de Lagrange $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$. La matriz Hessiana de L es la matriz $H_L \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ dada por

$$H_L = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

también conocida como la matriz Hessiana orlada de f.

Nótese que para H_L los menores principales orlados son los determinantes

$$\Delta_i := \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_i} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_i} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_i} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right|$$

estos se calculan para $i = m + 1, \dots, n$. Donde m es la cantidad de restricciones y n es la cantidad de variables. En donde es necesario resaltar que la matriz a la que se le calcula el determinante en los primeros menores principales orlados es de orden $i + m$. En la cual para las primeras i filas y columnas, se toma el menor principal i de H_L, y se le agregan las m filas y columnas de los bloques del gradiente de g_i, además del bloque de ceros.

El criterio de clasificación del Hessiano Orlado establece que:

- Si $(-1)^m \Delta_i(\tilde{P}) > 0$ para $i = m + 1, \dots, n$, entonces en $\tilde{P}$ se alcanza un mínimo relativo de f sujeto a $g_i(x_1, \dots, x_n)$ para $i = 1, \dots, m$.
- Si $(-1)^i \Delta_i(\tilde{P}) > 0$ para $i = m + 1, \dots, n$, entonces en $\tilde{P}$ se alcanza un máximo relativo de f sujeto a $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ para $i = 1, \dots, m$.

h) ¿El documento establece de manera explícita propiedades asociadas al tema funciones de varias variables?

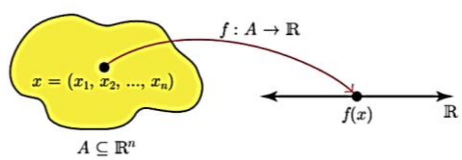
(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las propiedades señaladas en el documento?

- El conjunto de todas las n-tuplas ordenadas de números reales se llama espacio numérico n-dimesional y se representa por $\mathbb{R}^n$. En otras palabras, si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $x = (x_1, x_2, x_{3,\dots}, x_n)$ donde $x_1, x_2, x_{3,\dots}, x_n \in \mathbb{R}$.
- En el caso de $\mathbb{R}^2$, los elementos son pares ordenados (x, y), mientras que para $\mathbb{R}^3$ los elementos son tripletes ordenados (x, y, z), y se identifica con el espacio tridimensional.
- Al conjunto A, de la definición de función de n variables, se le denomina dominio de f y se suele denotar como D_f.
- Desde un contexto físico, se conoce f como un campo escalar.
- Una función de n variables relaciona elementos de $\mathbb{R}^n$ con la recta numérica $\mathbb{R}$, tal y como se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Representación gráfica de una función de n variables



Nota. Tomado de Ramírez & Sequeira (2022).

- Dado $x = (x_1, x_2, x_{3,\dots}, x_n)$, se utilizan las notaciones $z = f(x_1, x_2, x_{3,\dots}, x_n)$ y $z = f(x)$, siempre que no haya posibilidad de confusión.
- En el caso de $n = 2$, se puede escribir $z = f(x, y)$ en lugar de $z = f(x_1, x_2)$, mientras que para $n = 3$ se suele escribir $w = f(x, y, z)$ en vez de $z = f(x_{11} x_2, x_3)$.
- Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Más aún, sean $f: A \to \mathbb{R}$ Y $g: B \to \mathbb{R}$ dos campos escalares. Se define:

  La suma $f + g: A \cap B \to \mathbb{R}$ tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A \cap B$.

La resta $f - g: A \cap B \to \mathbb{R}$ tal que $(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in A \cap B$.

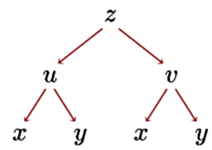
El producto $f \cdot g: A \cap B \to \mathbb{R}$ tal que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in A \cap B$.

El cociente $\frac{f}{g}: C \to \mathbb{R}$ tal que $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in C$ donde $C \coloneqq (A \cap B) \setminus \{x \in B \mid g(x) = 0\}$.

- Solo es posible representar gráficamente hasta $\mathbb{R}^3$, por lo tanto, únicamente se consideran las gráficas de funciones de 2 variables, conocidas como superficies.
- El término "proyectadas" significa que cada curva de nivel C_k, la cual se encuentra a una altura k respecto al plano xy, es trasladada desde $z = k$ hasta $z = 0$.
- El dominio de definición es el conjunto de los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x, y)$ produce valores en $\mathbb{R}$.
- Las derivadas parciales de primer orden respecto de x_i son $\partial_{x_i} f$ y f_{x_i}. Además, si se escribe $z = f(x, y)$, entonces se utiliza $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, o bien, z_x y z_y, respectivamente.
- Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ es suficiente con derivar el criterio de f únicamente con respecto de x, tal como se hace en el caso de una variable, es decir, considerando la variable y como una constante.
- La regla de la cadena para el caso de dos variables establece que para poder derivar z respecto de x o y, es necesario pasar primero por u y v. Lo cual se ilustra en la Figura 4.

Figura 4

Representación gráfica de la regla de la cadena

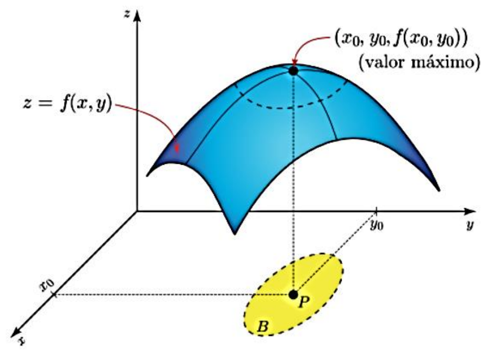


Nota. Tomado de Ramírez & Sequeira (2022).

- Para funciones en más de dos variables $z = f(u_1, u_{2,\dots}, u_n)$, con $u_1, u_{2,\dots}, u_n$ funciones de $x_1, x_{2,\dots}, x_n$ se tiene que $\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ para $i = 1,2, \dots, n$.
- Es posible considerar derivadas de orden mayor a dos, cuyo cálculo y notación es análogo.
- Si f es una función de n variables, entonces esta posee n^m derivadas parciales de orden m, siempre que estas existan.
- Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función polinomial de grado total m, entonces todas sus derivadas parciales también son funciones polinomiales y, por tanto, las derivadas parciales de orden superior a $m+1$ son todas cero.
- (Teorema de Schwarz) Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función sobre un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Si las derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\colon A \to \mathbb{R}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\colon A \to \mathbb{R}$ existen y son continuas en A, entonces para todo $(a, b) \in A$ se cumple que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$.
- De acuerdo con la definición de máximo relativo, un punto $P \in A$ es un máximo relativo de f, siempre que $f(P)$ es el valor más grande que alcanza $f(x, y)$ en comparación a todos los puntos (x, y) que están cerca de P. Esto se ilustra en la Figura 5.

Figura 5

Representación máxima del máximo relativo de una función de dos variables



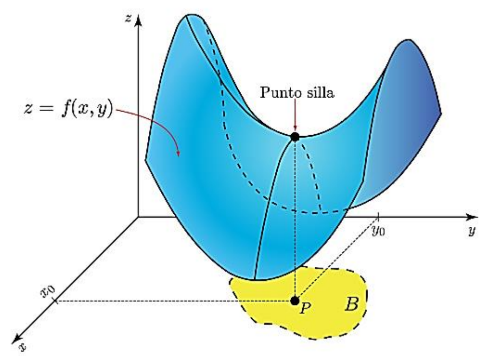
Nota. Tomado de Ramírez & Sequeira (2022).

- Un punto que es un máximo o mínimo relativo, se denomina extremo relativo de la función.
- El hecho de que un punto P sean un máximo relativo de f, no excluye la posibilidad de que existan otros puntos del dominio donde f toma valores mayores a los de P. No obstante, estos puntos no están "cerca" de P. Lo mismo aplica para mínimos relativos.
- Si la desigualdad en la definición de máximo relativo se cumple para todo punto (x, y) en el dominio de f, entonces se dice que f alcanza un máximo absoluto en P. De manera análoga, se define un mínimo absoluto de f en P. Más aún, en estos casos se denominan extremos absolutos en lugar de extremos relativos.
- Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, con A un conjunto abierto. Más aún, sea $P = (x_0, y_0) \in A$ un extremo relativo de f. Si f posee derivadas parciales continuas en A, entonces se cumple que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
- La propiedad anterior establece que si P es extremo relativo de f, entonces $\nabla f(P) = 0$. El recíproco de este resultado es falso, dado que es posible tener que $\nabla f(P) = 0$, pero P no es un extremo relativo.

- Si f es una función de n variables, se tiene que $P = \left(x_1, x_{2,\ldots}, x_n\right)$ es un punto crítico, si $\nabla f(P) = 0$.
- Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables con derivadas parciales continuas en A, entonces, si existen extremos relativos de f, estos deben ser puntos críticos de f. No obstante, no todo punto crítico es un extremo relativo de f. En efecto, existe la posibilidad de que un punto crítico sea un punto silla.
- En otras palabras, un punto silla corresponde a un máximo respecto a puntos que están en una misma dirección, pero que en otra dirección representa un mínimo. Esto se ilustra en la Figura 6.

Figura 6

Representación gráfica del punto silla de una función de dos variables



Nota. Tomado de Ramírez & Sequeira (2022).

- Para calcular los extremos relativos de una función f, un primer paso consiste en calcular todos los puntos críticos de f. Estos puntos críticos no necesariamente son los extremos relativos de f, pero son los únicos candidatos a serlo. Es decir, de haber algún extremo relativo, este debe encontrarse en la lista de puntos críticos obtenidos. Así, un segundo paso consiste en determinar cuáles de los puntos críticos son en efecto un máximo o un mínimo.
- En general, si $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables cuyas derivadas parciales de orden dos son continuas en un punto $(x_0, y_0) \in$

A, entonces las derivadas parciales cruzadas f_{xy} y f_{yx} son iguales en (x_0, y_0). Esto implica que la matriz Hessiana $H_f(x_0, y_0)$ es una matriz simétrica.

- Al determinante de la matriz Hessiana, es decir, $\Delta(x, y) \coloneqq \det(H_f(x, y))$, se le conoce como el Hessiano de f.
- En el caso que $\Delta(P) > 0$, no puede ocurrir que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 0$.
- Si todos los menores principales de la matriz Hessiana, en un punto dado, son positivos, entonces se dice que la matriz es definida positiva.
- Si el signo de cada menor principal alterna, iniciando con $\Delta_1(P) = f_{x_1 x_1}(P) < 0$, entonces la matriz es definida negativa.
- Si una matriz no es definida positiva, no quiere decir que sea definida negativa, ni viceversa.
- Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Se dice que A es acotado si existe un $M > 0$ tal que $||x|| < M, \forall x \in A$.
- Un conjunto A se dice acotado si está contenido en una bola (es decir, un círculo en $\mathbb{R}^2$ o una esfera en $\mathbb{R}^3$) centrada en el origen y de radio M. En particular, representando el conjunto A en una región de $\mathbb{R}^2$, entonces la región será acotada si esta se puede encerrar dentro de una circunferencia de algún radio finito.
- Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Se dice que A es cerrado si A contiene toda su frontera (borde de la región que este representa).
- Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Se dice que A es compacto si A es cerrado y acotado.
- Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función de n variables, con A un conjunto compacto. Entonces f posee un máximo y un mínimo absolutos en A.
- Los problemas en donde se buscan los extremos de una función sujetos a condiciones (ecuaciones o desigualdades), se denominan problemas de optimización con restricciones.

- La idea del método de los multiplicadores de Lagrange es definir una nueva función L, que considera la información de f y g (restricción) a la vez. De esta forma, los extremos relativos de f que satisfacen que $g(x, y) = 0$, son determinados al hallar los extremos relativos de L, mediante la búsqueda de sus puntos críticos.
- Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ funciones de n variables respectivamente, tales que ambas poseen derivadas parciales continuas. Si $(t_1, \dots, t_n)$ es una n-tupla que representa un extremo relativo de f restringido a $g(x_1, \dots, x_n) = 0$, entonces existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial L}{\partial x_i}(t_1, \dots, t_n, \lambda_0) = 0$ con $i = 1, \dots, n$.
- El multiplicador de Lagrange tiene por objetivo asociar la restricción $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ a una variable auxiliar para simplificar los procesos de localización de los extremos relativos.
- Si se tiene continuidad y compacidad, entonces dentro de la lista de puntos críticos deben encontrarse el máximo y el mínimo absolutos, por lo que es suficiente evaluar el criterio de la función para detectar estos valores.
- El proceso recomendado para resolver problemas de optimización corresponde a:
    - Leer el problema y hacer un dibujo (de ser posible).
    - Definir las variables y las funciones (definir las letras).
    - Identificar cuál es la función objetivo y cuál o cuáles son las restricciones.
    - Emplear el método de multiplicadores de Lagrange y un criterio de clasificación (por conjunto compacto o matriz Hessiana orlada).
    - Dar la respuesta.

i) ¿El documento establece de manera explícita la evolución histórica del tema funciones de varias variables?

( ) Sí (x) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuál sería el desarrollo histórico descrito en el documento?

____
____
____
____
____

2.8. Análisis de contenido

i) ¿El documento establece de manera explícita conceptos asociados al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los conceptos señalados en el documento?

Función de n variables, gráfica de una función de 2 variables, curvas de nivel, derivada parcial de primer orden, derivada parcial de segundo orden, ecuación de Laplace, vector gradiente, extremos locales y extremos absolutos.

j) ¿El documento establece de manera explícita procedimientos asociados a la resolución de tareas del tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los procedimientos descritos en el documento?

Reconocer funciones de n variables.

Evaluar un punto dado en una función de n variables.

Dibujar un boceto de la gráfica de una función de dos variables a mano y por medio de programas computacionales.

Determinar las curvas de nivel de una superficie dados valores para la constante k.

Dibujar el mapa de contorno de una superficie.

Identificar el dominio de definición de una función de n variables.

Dibujar un boceto del dominio de definición de una función de 2 variables.

Calcular las derivadas parciales de una función de n variables.

Encontrar el vector gradiente de una función de n variables.

Calcular las derivadas parciales de primer orden de una función de n variables compuestas por medio de la regla de la cadena.

Calcular las derivadas parciales de segundo orden de una función de n variables.

Calcular el laplaciano de una función de n variables.

Identificar extremos relativos de una función de n variables.

Identificar extremos absolutos de una función de n variables.

Calculara la matriz Hessiana de una función de n variables.

Calcular los menores principales de la matriz Hessiana de una función de n variables.

Calcular el Hessiano de una función de n variables.

Calcular los puntos críticos de una función de n variables.

Clasificar los puntos críticos de una función de n variables de acuerdo con los criterios de clasificación.

Reconocer conjuntos acotados, cerrados y compactos.

Determinar en qué casos se pueden encontrar los extremos absolutos de una función de n variables.

Hallar los extremos absolutos de una función sujetos a restricciones dadas.

Hallar los puntos críticos de una función de n variables por medio del multiplicador de Lagrange.

Calcular la matriz Hessiana orlada de la función de Lagrange de una función de n variables sujetas a m restricciones.

Calcular el determinante de una función.

Calcular los menores principales orlados de la matriz Hessiana orlada de una función de n variables sujetas a m restricciones.

Hallar los extremos relativos de una función de n variables sujetas a m restricciones por medio del criterio de clasificación del Hessiano Orlado.

Resolver problemas de optimización que involucran funciones de varias variables.

k) ¿El documento establece de manera explícita representaciones de los conceptos asociados al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las representaciones señaladas en el documento?

Simbólica, algebraica, verbal, gráfica, tabular, icónicas y ejecutables.

l) ¿El documento establece de manera explícita fenómenos asociados al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los fenómenos descritos en el documento?

Maximizar y minimizar el área de figuras 2D.
Maximizar y minimizar el volumen de figuras 3D.
Maximizar la cantidad de espacio dentro de un objeto determinado (figura 3D) de manera que se minimice el costo de los materiales requeridos para confeccionarlo.
Método de aproximación lineal con mínimos cuadrados.

2.9. Análisis cognitivo

g) ¿El documento establece de manera explícita los objetivos de la enseñanza del tema funciones de varias variables a estudiantes de Economía?

( ) Sí (x) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían los objetivos señalados en el documento?

____
____
____
____
____

h) ¿En base a la información expuesta en el documento es posible establecer limitantes en el aprendizaje del tema funciones de varias variables?

( ) Sí (x) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las limitantes identificadas?

____
____
____
____
____

i) ¿El documento establece de manera explícita tareas matemáticas asociadas al tema funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuáles serían las tareas señaladas en el documento?

Tarea 1

Tres generadores producen x, y, z Megawatts, respectivamente. El costo de producción para cada uno de los generadores es $c_1 = x + 0.0625x^2$, $c_2 = y + 0.0125y^2$ y $c_3 = z + 0.0250z^2$, respectivamente. Si entre los tres deben producir 952 Megawatts, determine la producción de cada uno que minimiza el costo total.

Tarea 2

Una empresa fábrica un producto en dos lugares. El costo de producción de x_1 unidades en el primero es $C_1 = 0.02x_1^2 + 4x_1 + 700$, y el costo de producción de x_2 unidades en el segundo es de $C_2 = 0.05x_2^2 + 4x_2 350$. Si el producto se vende a 20 dólares la unidad, determine la cantidad de producto que debe hacerse en cada lugar para maximizar el beneficio $P = 20(x_1 + x_2) - C_1 - C_2$.

Tarea 3

Sea $\boldsymbol{w} \coloneqq (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector de precios. Considera la función de costo $C(x_1, x_2) \coloneqq w_1x_1 + w_2x_2$ donde x_1, x_2 son suministros para la producción, con la restricción $Ax_1^a x_2^b = y$, donde y son las unidades que se quiere producir, y $a + b = 1$. Determine el costo mínimo en función de $\boldsymbol{w}$ y y.

Tarea 4

Sea $\boldsymbol{w} \coloneqq (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector de precios. Considera la función de costo $C(x_1, x_2) \coloneqq w_1x_1 + w_2x_2$ donde x_1, x_2 son suministros para la producción, con la restricción $x_1^p + x_2^p = y^p$, donde y son las unidades que se quiere producir, y $p > 0$. Determine el costo mínimo.

Tarea 5

Sea $\boldsymbol{p} \coloneqq (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector de precios. Considera la función de utilidad $U(x_1, x_2) \coloneqq x_1^a x_2^b$ donde x_1, x_2 son unidades de producción, con la restricción $p_1x_1 + p_2x_2 = m$, donde $a + b = 1$. Determine la utilidad máxima.

Anexo 3

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Fórmula de consentimiento informado

(Dirigida a personas que formarán parte de la investigación)

Nombre de la persona participante: ____

a) El presente trabajo de investigación tiene como propósito el desarrollo de una propuesta didáctica para la implementación del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) en la enseñanza del tema funciones de varias variables a estudiantes de Economía. Específicamente en el curso MAT050 Cálculo II para Economía impartido por la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA), en la Sede Central – Campus Omar Dengo.
b) En el presente trabajo de investigación se llevarán a cabo entrevistas semiestructuradas con dos finalidades; la validación de los resultados obtenidos en el análisis conceptual, análisis de contenido y análisis cognitivo, y la recolección de los datos necesarios para el diseño del análisis de instrucción. Por consiguiente, estas se desarrollarán en dos momentos, cada uno orientado a la consecución de los propósitos señalados.

c) En el primer momento de las entrevistas, se evaluará la pertinencia de las tareas matemáticas escolares diseñadas con base en la información obtenida de fuentes documentales. En caso de ser necesario, se solicitarán sugerencias en busca de su mejora. Del mismo modo, se discutirá sobre posibles limitantes en el aprendizaje del tema funciones de varias variables. En el segundo momento, se realizará una revisión de las correcciones efectuadas, así como se determinará la organización de las actividades de enseñanza-aprendizaje y se identificarán aspectos importantes de la actuación docente durante la instrucción de la temática.
d) El estudiantado únicamente formará parte del primer momento de las entrevistas.
e) El profesorado formará parte de los dos momentos de la entrevista.
f) La participación en este estudio no implica ningún riesgo.
g) No se obtendrá ningún beneficio directo de la participación en este estudio, sin embargo, la información obtenida beneficiará el aprendizaje de quien desarrolla la investigación. Por tanto, podrían alcanzarse mejores resultados que favorezcan a otras personas en el futuro.
h) La participación en este estudio es confidencial, los resultados podrían aparecer en publicaciones científicas de manera anónima.
i) Al firmar esta fórmula no se pierde ningún derecho legal.

Consentimiento

He leído o se me ha leído toda la información expuesta en esta fórmula antes de firmarla. Se me ha brindado la oportunidad de hacer preguntas, las cuelas han sido contestadas correctamente. Por lo tanto, accedo a participar de la presente información.

Nombre completo, número de cédula y firma Fecha

Investigadora que solicita el consentimiento:

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Anexo 4

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (docentes)

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. Información general de la persona

a) Nombre (opcional): ____

b) Información de contacto (opcional): ____________________________________

c) Sexo: (   ) Hombre
(   ) Mujer

d) Grado académico: (   ) Diplomado / Profesorado
(   ) Bachillerato Universitario
(   ) Licenciatura
(   ) Especialidad Profesional
(   ) Maestría
(   ) Doctorado Académico

e) Unidad Académica a la cual pertenece: (   ) Escuela de Matemática
(   ) Escuela de Economía

f) Fecha en que se le entrevistó por primera vez: ___________________________

g) Modalidad de la primera entrevista: (   ) Presencial
(   ) Virtual

h) Fecha en que se le entrevistó por segunda vez: ___________________________

i) Modalidad de la segunda entrevista: (   ) Presencial
(   ) Virtual

2. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista I

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras para el estudiantado?

(   ) Sí   (   ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

____
____
____
____
____

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas seleccionadas son adecuados?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

____
____
____
____
____

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

____
____
____
____
____

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

____
____
____
____
____

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

____
____
____
____
____

f) ¿Considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

____
____
____
____
____

g) ¿Considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

____
____
____
____
____

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

____
____
____
____
____

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

____
____
____
____
____

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje del estudiantado considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

____
____
____

____

____

b) Entrevista II

a) ¿Considera que se atendieron correctamente las sugerencias sobre el diseño de las tareas dadas en la entrevista anterior?

( ) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea negativa, ¿qué otras acciones considera que se pueden realizar para mejorar el diseño de las tareas?

____

____

____

____

____

b) ¿Cuántas sesiones de trabajo considera que le conllevará al estudiantado completar las tareas diseñadas?

____

____

____

____

____

c) ¿En qué ordenamiento considera apropiado ejecutar las tareas diseñadas?

d) De acuerdo con el ordenamiento realizado en la pregunta anterior, ¿en qué número de sesión considera oportuno ejecutar las tareas diseñadas?

e) ¿Cuál considera que debería ser la actuación docente en la instrucción de la temática durante cada una de las sesiones señaladas?

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (estudiantes)

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. Información general de la persona

a) Nombre (opcional): ____

b) Información de contacto (opcional): ___________________________________

c) Sexo: (   ) Hombre

(   ) Mujer

d) Fecha en que se realizó la entrevista: ______________________________

e) Modalidad de la entrevista: (   ) Presencial

(   ) Virtual

2. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

____
____
____
____
____

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas son adecuados?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

____
____

____

____

____

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

____

____

____

____

____

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

____

____

____

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

f) ¿Considera que las tareas diseñadas poseen un nivel de dificultad adecuado?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

g) ¿Considera que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera a que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

____
____
____
____
____

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

____
____
____
____
____

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

( ) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

____
____
____
____
____

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje considera/no considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

____
____
____
____
____

k) ¿Cuánto tiempo en semanas considera que se necesitará para completar cada una de las tareas diseñadas?

____
____
____
____
____

Anexo 5

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (docentes) # 1

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):
b) Información de contacto (opcional):
c) Sexo: (   ) Hombre
(x) Mujer
d) Grado académico: (   ) Diplomado / Profesorado
(   ) Bachillerato Universitario
(   ) Licenciatura
(   ) Especialidad Profesional
(x) Maestría
(   ) Doctorado Académico

e) Unidad Académica a la cual pertenece: (   ) Escuela de Matemática
(x) Escuela de Economía

f) Fecha en que se le entrevistó por primera vez: lunes 13 de junio de 2022

g) Modalidad de la primera entrevista: (x) Presencial
(   ) Virtual

h) Fecha en que se le entrevistó por segunda vez: lunes 11 de agosto de 2022

i) Modalidad de la segunda entrevista: (x) Presencial
(   ) Virtual

2. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista I

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras para el estudiantado?

(x) Sí   (   ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

La persona considera que las instrucciones son claras en relación con los conocimientos del estudiantado hasta el momento, sin embargo, también considera necesario la utilización de instrucciones semejantes en las sesiones.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas seleccionadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

La persona considera que la utilización de las notas de clase es suficiente para desarrollar las tareas. Además, esta menciona que lo anterior se puede completar con la búsqueda de fuentes de información en internet.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que los grupos de trabajo deben de estar conformados por dos o máximo tres estudiantes.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que el planteamiento de las tareas como trabajo extra-clase es adecuado siempre que en las sesiones se desarrollen problemas semejantes a los planteados en estas, o bien, se analice en conjunto las posibles soluciones para las mismas (atendiendo las dudas y guiando al estudiantado).

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que la interacción entre pares propuesta es adecuada dado a que el trabajo cooperativo permite al estudiantado debatir las posibles soluciones y, por ende, profundizar en los conceptos y las propiedades. Además, esta les permitirá acompañarse entre sí durante el proceso (beneficiando la superación de obstáculos).

f) ¿Considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

Desde un punto de vista económico, la persona considera que la demanda cognitiva es adecuada para el estudiantado. Lo anterior porque el modelo también es analizado en otros cursos (brindados por la Escuela de Economía) previo en inclusive en paralelo al curso MAT0500 Cálculo II para Economía. Es decir, las y los estudiantes ya cuentan con una noción del modelo, lo que facilita la compresión de las tareas.

g) ¿Considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

La persona considera que las tareas guardan relación con el tema funciones de varias variables puesto que el modelo corresponde a una función de varias variables y las caracterizaciones de este a conceptos y propiedades que se asocian a la temática.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

La persona considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado analizar, interpretar y resolver problemas por medio de la aplicación del cálculo diferencial en matemática y economía. Esto porque las tareas le solicitan específicamente interpretar en términos económicos el resultado de los procedimientos matemáticos llevados a cabo.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

La persona considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado un dominio adecuado de los contenidos matemáticos puesto que al conocer la aplicabilidad de estos en el campo de la economía habrá mayor motivación por aprenderlos y comprenderlos a cabalidad.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje del estudiantado considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

Poca o nula comprensión de los conocimientos estudiados en los cursos MAT001 Matemática General y MAT002 Cálculo II.

b) Entrevista II

a) ¿Considera que se atendieron correctamente las sugerencias sobre el diseño de las tareas dadas en la entrevista anterior?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea negativa, ¿qué otras acciones considera que se pueden realizar para mejorar el diseño de las tareas?

____
____
____
____
____

b) ¿Cuántas sesiones de trabajo considera que le conllevará al estudiantado completar las tareas diseñadas?

La duración estimada sería de cuatro a cinco sesiones.

c) ¿En qué ordenamiento considera apropiado ejecutar las tareas diseñadas?

El mismo ordenamiento del estudio de los contenidos en clase.

d) De acuerdo con el ordenamiento realizado en la pregunta anterior, ¿en qué número de sesión considera oportuno ejecutar las tareas diseñadas?

En la misma sesión o en la posterior al estudio de los contenidos en clase.

e) ¿Cuál considera que debería ser la actuación docente en la instrucción de la temática durante cada una de las sesiones señaladas?

Debe adoptar un rol pasivo, pero proporcionar una guía constante y apoyo durante todo el proceso.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (docentes) # 2

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

3. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):

b) Información de (opcional):

c) Sexo: (x) Hombre
( ) Mujer

d) Grado académico: ( ) Diplomado / Profesorado
( ) Bachillerato Universitario
( ) Licenciatura
( ) Especialidad Profesional
( ) Maestría
(x) Doctorado Académico

e) Unidad Académica a la cual pertenece: ( ) Escuela de Matemática

(x) Escuela de Economía

f) Fecha en que se le entrevistó por primera vez: miércoles 15 de junio de 2022

g) Modalidad de la primera entrevista: (   ) Presencial

(x) Virtual

h) Fecha en que se le entrevistó por segunda vez: martes 16 de agosto de 2022

i) Modalidad de la segunda entrevista: (   ) Presencial

(x) Virtual

4. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista I

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras para el estudiantado?

(x) Sí (   ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

La persona considera que las instrucciones son claras en relación con los conocimientos del estudiantado hasta el momento, mientras que no se le pida establecer las modelaciones por su cuenta. Esto puesto que las habilidades económicas para desarrollar dichas tareas las tendrá hasta el tercer o cuarto año de la carrera, y aunque las instrucciones sean lo suficientemente claras no las entenderá.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas seleccionadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

La persona considera que la utilización de las notas de clase es suficiente para desarrollar las tareas. Además, esta menciona que inclusive lo anterior se puede completar con fuentes de información facilitadas por docentes de economía.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que los grupos de trabajo deben de estar conformados por dos o tres estudiantes para lograr un mayor aprovechamiento de la actividad.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que el planteamiento de las tareas como trabajo extra-clase es adecuado siempre que en las sesiones el profesorado ser cerciore de que hay un entendimiento adecuado de los conocimientos matemáticos y el estudiantado está preparada para profundizar en el estudio de estos.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que la interacción entre pares propuesta es adecuada dado a que el trabajo cooperativo permitirá al estudiantado profundizar en el análisis de las posibles soluciones. Lo anterior, le permitirá determinar la manera de proceder más adecuada y conocer los beneficios y las limitaciones de diferentes procedimientos.

f) ¿Considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

Desde un punto de vista económico, la persona considera que las tareas suponen una demanda cognitiva adecuada para el conocimiento del estudiantado. Esta hace énfasis en que, si se decidiera profundizar en el modelo, o bien, solicitar la modelación de situaciones por medio del mismo, la respuesta sería lo opuesto.

g) ¿Considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

La persona considera que las tareas guardan relación con el tema funciones de varias variables puesto que el modelo corresponde a una función de varias variables (la producción depende de dos factores: la cantidad de trabajo y el capital invertido) y las caracterizaciones de este a conceptos y propiedades que se asocian a la temática.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

La persona considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado analizar, interpretar y resolver problemas por medio de la aplicación del cálculo diferencial en matemática y economía. Esto porque las tareas le solicitan específicamente interpretar en términos económicos el resultado de los procedimientos matemáticos llevados a cabo. Además, esta considera que para alcanzar un mayor cumplimiento de los mismos, se podrían analizar implicaciones del modelo en otras áreas de la economía, por ejemplo, el teorema de la telaraña o la curva de Phillips.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

La persona considera que las tareas diseñadas permiten al estudiantado un dominio adecuado de los contenidos matemáticos e, inclusive, de los contenidos económicos. Esto puesto que al entrelazar la matemática y la economía en las sesiones habrá mayor motivación para comprenderlos y, por ende, se alcanzará un mayor entendimiento de estos.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje del estudiantado considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

Poca o nula comprensión de los conocimientos estudiados en los cursos MAT001 Matemática General y MAT002 Cálculo II, inclusive en los cursos ECF400 Introducción a la Economía I y ECF402 Introducción a la Economía II, ECF403 Estadística I.

b) Entrevista II

a) ¿Considera que se atendieron correctamente las sugerencias sobre el diseño de las tareas dadas en la entrevista anterior?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea negativa, ¿qué otras acciones considera que se pueden realizar para mejorar el diseño de las tareas?

____
____
____
____
____

b) ¿Cuántas sesiones de trabajo considera que le conllevará al estudiantado completar las tareas diseñadas?

La cantidad de horas asignada debe ser similar a la requerida para estudiar los temas en clase.

c) ¿En qué ordenamiento considera apropiado ejecutar las tareas diseñadas?

En un orden similar al estudio de los contenidos en las clases.

d) De acuerdo con el ordenamiento realizado en la pregunta anterior, ¿en qué número de sesión considera oportuno ejecutar las tareas diseñadas?

Durante las horas de estudio independiente que posteriores al estudio de los temas en clase, ya que se planteó como una actividad extracurricular.

e) ¿Cuál considera que debería ser la actuación docente en la instrucción de la temática durante cada una de las sesiones señaladas?

Brindar orientación al estudiantado a lo largo del proceso, a pesar de tratarse de una actividad extracurricular. Además, motivar constantemente para resolver el proyecto, destacando los beneficios que pueden obtenerse.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (docentes) # 3

<u>Instrucciones</u>: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

5. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):

b) Información de contacto (opcional):

c) Sexo: (x) Hombre
( ) Mujer

d) Grado académico: ( ) Diplomado / Profesorado
( ) Bachillerato Universitario
(x) Licenciatura
( ) Especialidad Profesional
( ) Maestría
( ) Doctorado Académico

e) Unidad Académica a la cual pertenece: (x) Escuela de Matemática

( ) Escuela de Economía

f) Fecha en que se le entrevistó por primera vez: jueves 16 de junio de 2022

g) Modalidad de la primera entrevista: (x) Presencial

( ) Virtual

h) Fecha en que se le entrevistó por segunda vez: viernes 19 de agosto de 2022

i) Modalidad de la segunda entrevista: ( ) Presencial

(x) Virtual

6. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista I

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras para el estudiantado?

( ) Sí (x) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

La persona no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas sean lo suficientemente claras dado a que el aumento de la complejidad de una tarea a la otra no es gradual, hay saltos abruptos entre la complejidad de estas. También considera que se aleja de los conocimientos matemáticos que el estudiantado posee hasta el momento. Asimismo, hace énfasis en la necesidad de una mayor especificidad en lo que se desea que el estudiantado realice (agregar justificaciones, instrucciones y rúbrica de evaluación).

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas seleccionadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

La persona considera que, si en las sesiones de clase se estudian los conocimientos matemáticos necesarios para el desarrollo de las tareas, la utilización de las notas de estas es suficiente. No obstante, menciona que sería oportuno la inclusión de una breve descripción de los métodos (mínimos cuadrados, regresión lineal y procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales) en la propuesta a manera de recordatorio.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

( ) Sí (x) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que los grupos de trabajo deben de estar conformados por cuatro o cinco estudiantes.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que la interacción docente-estudiante propuesta es adecuada siempre que exista una guía para el profesorado que explique el acompañamiento ideal para el desarrollo de la propuesta. Lo anterior en términos de la asignación de espacios para la revisión de avances y la defensa del producto final, el desarrollo de ejercicios semejantes en clase que sirvan de ejemplo.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

( ) Sí (x) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada, esto ya que al no haber diferenciación entre las asignaciones para cada grupo de estudiantes se corre el riesgo de que algunas personas no realicen el trabajo con el grado de dedicación necesaria (pueden copiar y pegar el trabajo de otras personas) y no se obtendría beneficio de la revisión grupal de los productos finales.

f) ¿Considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

( ) Sí (x) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

La persona considera que las tareas diseñadas no suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado, esto puesto que el planteamiento de estas aparenta una dificultad mayor a la real (dado a la simbología matemática y el lenguaje técnico utilizado) y la complejidad de los problemas aumenta rápidamente (se deben incluir tareas intermedias que garanticen un entendimiento de lo que se está desarrollando).

g) ¿Considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

La persona considera que las tareas diseñadas guardan relación con cálculo en varias variables y no se agrega más información al respecto.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

La persona considera que si las sugerencias anteriores son acatadas se logrará alcanzar los objetivos de aprendizaje de la propuesta. Además, rescata que asignarle un porcentaje de la evaluación sumativa del curso MAT050 Cálculo II para Economía es crucial para que esta se lleve a cabo de acuerdo con los propósitos establecidos.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

La persona considera que las tareas diseñadas permiten al estudiantado un dominio adecuado de los contenidos matemáticos debido a los beneficios derivados de la parte motivacional de la propuesta.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje del estudiantado considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

La persona considera que las siguientes limitantes se podrían presentar durante la ejecución de las tareas:

- Los conocimientos económicos y matemáticos alcanzados hasta el momento (MAT001 Matemática General, ECF400 Introducción a la Economía, MAT002 Cálculo I, ECF402 Introducción a la Economía II, ECF403

Estadística I y algunos conocimientos relacionados con el álgebra lineal y las ecuaciones diferenciales).

- No asignarle un porcentaje de la evaluación en el curso MAT050 Cálculo II para Economía (parte motivacional).

b) Entrevista II

a) ¿Considera que se atendieron correctamente las sugerencias sobre el diseño de las tareas dadas en la entrevista anterior?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea negativa, ¿qué otras acciones considera que se pueden realizar para mejorar el diseño de las tareas?

____

____

____

____

____

b) ¿Cuántas sesiones de trabajo considera que le conllevará al estudiantado completar las tareas diseñadas?

Aproximadamente cuatro sesiones.

c) ¿En qué ordenamiento considera apropiado ejecutar las tareas diseñadas?

En el mismo orden en el que se abordan en clase.

d) De acuerdo con el ordenamiento realizado en la pregunta anterior, ¿en qué número de sesión considera oportuno ejecutar las tareas diseñadas?

No es posible establecer un número específico, ya que depende del progreso de cada grupo en cada sesión.

e) ¿Cuál considera que debería ser la actuación docente en la instrucción de la temática durante cada una de las sesiones señaladas?

Supervisar el progreso con el fin de motivar y asegurar que se complete de manera adecuada, brindando apoyo para abordar cualquier duda que surja.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (docentes) # 4

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

7. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):

b) Información de contacto:

c) Sexo: (x) Hombre
( ) Mujer

d) Grado académico: ( ) Diplomado / Profesorado
( ) Bachillerato Universitario
( ) Licenciatura
( ) Especialidad Profesional
( ) Maestría
(x) Doctorado Académico

e) Unidad Académica a la cual pertenece: (x) Escuela de Matemática

( ) Escuela de Economía

f) Fecha en que se le entrevistó por primera vez: sábado 18 de junio de 2022

g) Modalidad de la primera entrevista: ( ) Presencial

(x) Virtual

h) Fecha en que se le entrevistó por segunda vez: lunes 22 de agosto de 2022

i) Modalidad de la segunda entrevista: ( ) Presencial

(x) Virtual

8. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista I

k) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras para el estudiantado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

La persona considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras siempre que se amplie la explicación referente al modelo (justificación de donde provienen las variables y las suposiciones realizadas por los economistas, por ejemplo, $\alpha + \beta = 1$).

l) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas seleccionadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

La persona considera la utilización de las notas de clase en el desarrollo de las tareas diseñadas es adecuado, lo que se puede completar con las notas de otros cursos (ECF403 Estadística I) y la utilización de aplicaciones web para la regresión lineal e inclusive el método de los mínimos cuadrados.

m) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que los grupos de trabajo deben de estar conformados por dos o tres estudiantes.

n) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que la interacción docente-estudiante propuesta es adecuada, haciendo énfasis en que un acompañamiento cercano y guiado es crucial para la consecución de los objetivos de la propuesta y del aprendizaje basado en proyectos.

o) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que la interacción entre pares propuesta es adecuada y no añade más información.

p) ¿Considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

La persona considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado puesto que, desde un punto de vista matemático, la población estudiantil cuenta con las herramientas necesarias para el desarrollo de estas.

q) ¿Considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

La persona considera que las tareas diseñadas guardan relación con cálculo en varias variables de acuerdo con lo establecido por la carta a la persona estudiante del curso.

r) ¿Considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

La persona considera las tareas diseñadas permitirán alcanzar los objetivos de aprendizaje de la propuesta dado a los beneficios de la estimulación motivacional del estudiantado (dado a que están empadronadas y empadronados en la carrera Bachillerato en Economía se supone que este tipo de problemas despiertan el interés por aprender). Además, rescata que asignarle un porcentaje de la evaluación sumativa del curso MAT050 Cálculo II para Economía es crucial para que esta se lleve a cabo de acuerdo con los propósitos establecidos.

s) ¿Considera que las tareas seleccionadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

La persona considera que las tareas diseñadas permiten al estudiantado un dominio adecuado de los contenidos matemáticos (lográndose abarcar la parte de aplicabilidad que se suele dejar de lado por cuestiones de tiempo) debido a los beneficios derivados de la parte motivacional de la propuesta.

t) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje del estudiantado considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

La persona considera que las siguientes limitantes se podrían presentar durante la ejecución de las tareas:

- No asignarle un porcentaje de la evaluación en el curso MAT050 Cálculo II para Economía (parte motivacional).

b) Entrevista II

a) ¿Considera que se atendieron correctamente las sugerencias sobre el diseño de las tareas dadas en la entrevista anterior?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea negativa, ¿qué otras acciones considera que se pueden realizar para mejorar el diseño de las tareas?

b) ¿Cuántas sesiones de trabajo considera que le conllevará al estudiantado completar las tareas diseñadas?

En unas dos semanas aproximadamente.

c) ¿En qué ordenamiento considera apropiado ejecutar las tareas diseñadas?

En el mismo orden en que se presentan los contenidos al estudiantado.

d) De acuerdo con el ordenamiento realizado en la pregunta anterior, ¿en qué número de sesión considera oportuno ejecutar las tareas diseñadas?

Idealmente, el estudiantado debería resolver la asignación después de estudiar los contenidos en clase.

e) ¿Cuál considera que debería ser la actuación docente en la instrucción de la temática durante cada una de las sesiones señaladas?

Debe asegurarse de que las indicaciones sean claras y de que el estudiantado disponga de todas las herramientas necesarias para abordar la asignación. Además, es fundamental estar atento en caso de que requieran apoyo en algún momento.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (docentes) # 5

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

9. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):
b) Información de contacto (opcional):
c) Sexo: (x) Hombre
( ) Mujer
d) Grado académico: ( ) Diplomado / Profesorado
( ) Bachillerato Universitario
( ) Licenciatura
( ) Especialidad Profesional
( ) Maestría
(x) Doctorado Académico
e) Unidad Académica a la cual pertenece: (x) Escuela de Matemática

( ) Escuela de Economía

f) Fecha en que se le entrevistó por primera vez: miércoles 15 de junio de 2022

g) Modalidad de la primera entrevista: ( ) Presencial

(x) Virtual

h) Fecha en que se le entrevistó por segunda vez: sábado 20 de agosto de 2022

i) Modalidad de la segunda entrevista: ( ) Presencial

(x) Virtual

10. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista I

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras para el estudiantado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

La persona considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son medianamente claras puesto que:

- Responde a los contenidos matemáticos que se estudian en el curso MAT050 Cálculo II para Economía, por ende, el estudiantado puede establecer una relación entre lo estudiado en este y las tareas que debe realizar.
- No es suficientemente claro qué se desea que el estudiando realice.

- No es suficientemente claro de donde provienen los datos dados o la importancia de su utilización (por ejemplo, $\alpha + \beta = 1$).
- El planteamiento de las tareas a nivel matemático puede aparentar una complejidad superior a la que realmente es.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas seleccionadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

La persona considera que la utilización de las notas de clase es suficiente para desarrollar las tareas. Además, esta menciona que inclusive lo anterior se puede completar con la búsqueda de otras fuentes de información en internet.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que los grupos de trabajo deben de estar conformados por dos o tres estudiantes, siempre que exista una diferenciación entre las tareas que cada agrupación debe realizar (buscar ejemplos de modelizaciones establecidas en el país a partir de este modelo o explicación de modificaciones en el modelo).

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que la interacción docente-estudiante propuesta es adecuada siempre que exista una guía para el profesorado que le explique el acompañamiento ideal para el desarrollo de la propuesta.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

En este caso se repite la información de la pregunta c) y se refuerza la idea de la creación de una explicación de la interacción deseada para alcanzar una mayor claridad.

f) ¿Considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

La persona considera que el planteamiento de las tareas aparenta una mayor complejidad de estas en relación con el nivel de complejidad real. Sin embargo, considera que si le brinda al estudiantado la información necesaria sobre los conocimientos que no se han abordado en el curso o del todo no se van a abordar (método de mínimos cuadrados, regresión lineal y resolución de ecuaciones diferenciales) se puede alcanzar un nivel de complejidad adecuado.

g) ¿Considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

La persona considera que las tareas diseñadas guardan relación con cálculo en varias variables y no añade más información al respecto.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

La persona considera que si se reformulan los objetivos de la propuesta (da sugerencias) se logrará alcanzarlos. Las recomendaciones se enlistan a continuación:

- La formulación de un objetivo que se refiera a la parte motivacional de la propuesta.
- La especificación en los objetivos de que la propuesta se enfoca en un contexto particular (modelo Cobb-Douglas).
- La reformulación del tercer objetivo específico (cambiar la palabra planteamiento por resolución).

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

La persona considera que las tareas diseñadas permiten al estudiantado un dominio adecuado de los contenidos matemáticos debido a los beneficios derivados de la parte motivacional de la propuesta.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje del estudiantado considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

La persona considera que las siguientes limitantes se podrían presentar durante la ejecución de las tareas:

- Los conocimientos matemáticos del curso MAT050 Álgebra Lineal.
- Los conocimientos económicos alcanzados hasta el momento.
- No asignarle un porcentaje de la evaluación en el curso MAT050 Cálculo II para Economía (parte motivacional).

b) Entrevista II

a) ¿Considera que se atendieron correctamente las sugerencias sobre el diseño de las tareas dadas en la entrevista anterior?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea negativa, ¿qué otras acciones considera que se pueden realizar para mejorar el diseño de las tareas?

____

b) ¿Cuántas sesiones de trabajo considera que le conllevará al estudiantado completar las tareas diseñadas?

Dado que es una actividad que no se resolverá durante las sesiones, se estima que tomará alrededor de dos o tres semanas.

c) ¿En qué ordenamiento considera apropiado ejecutar las tareas diseñadas?

En el que siga el orden de las temáticas del curso. Es decir, conforme se presentan en las notas del curso y en otras asignaciones, por ejemplo, los parciales.

d) De acuerdo con el ordenamiento realizado en la pregunta anterior, ¿en qué número de sesión considera oportuno ejecutar las tareas diseñadas?

Después de ser estudiados los contenidos respectivos en clase. Dado que la actividad se lleva a cabo fuera de esta, no es posible establecer un número específico de sesiones.

e) ¿Cuál considera que debería ser la actuación docente en la instrucción de la temática durante cada una de las sesiones señaladas?

El profesorado debe garantizar que, durante el estudio de los contenidos en clase, se aclaren todas las dudas de manera oportuna y se asegure de que haya una comprensión adecuada. Debe estar disponible durante las horas de consulta para orientar en el proceso de resolución o proporcionar herramientas necesarias. Además, es esencial asegurarse de que la retroalimentación sea entregada antes del examen parcial.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (docentes) # 6

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

11. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):
b) Información de contacto (opcional):
c) Sexo: (x) Hombre
( ) Mujer
d) Grado académico: ( ) Diplomado / Profesorado
( ) Bachillerato Universitario
( ) Licenciatura
( ) Especialidad Profesional
(x) Maestría
( ) Doctorado Académico
e) Unidad Académica a la cual pertenece: (x) Escuela de Matemática

( ) Escuela de Economía

f) Fecha en que se le entrevistó por primera vez: jueves 16 de junio de 2022

g) Modalidad de la primera entrevista: (x) Presencial

( ) Virtual

h) Fecha en que se le entrevistó por segunda vez: miércoles 24 de agosto de 2022

i) Modalidad de la segunda entrevista: (x) Presencial

( ) Virtual

12. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista I

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras para el estudiantado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

La persona considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras para el estudiantado siempre que el este cuente con las habilidades económicas y matemáticas (en álgebra lineal y de ecuaciones diferenciales) que se requiere para comprender el planteamiento.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas seleccionadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

La persona considera que la utilización de las notas de clase es suficiente para desarrollar las tareas. No obstante, esta considera que se le podría elaborar una guía (o ampliar la información de la propuesta) que le permita tanto al estudiantado como al profesorado conocer más sobre el modelo Cobb-Douglas. Además, la persona menciona que sería favorable la inclusión de un resumen del método de mínimos cuadrados, regresión lineal y procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales separables.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que los grupos de trabajo deben de estar conformados por dos o tres estudiantes.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La persona considera que la interacción docente-estudiante propuesta es adecuada siempre que exista una guía para el profesorado que explique el acompañamiento ideal para el desarrollo de la propuesta, así como información adicional sobre el modelo Cobb-Douglas que le pueda ayudar a aclarar consultas del estudiantado en términos económicos.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

En este caso se repite la información de la pregunta c).

f) ¿Considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

La persona considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado siempre que se garantiza (el profesorado realice actividades en clase para comprobarlo, o bien, retomarlo) un conocimiento suficiente en economía, estadística (regresión lineal), álgebra lineal y ecuaciones diferenciales (básico).

g) ¿Considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas guardan relación con el tema de funciones de varias variables?

La persona considera que las tareas diseñadas guardan relación con cálculo en varias variables puesto que el modelo corresponde a una función multivariable y la información brindada sobre este responde a conceptos asociados a las mismas (derivadas parciales y valores extremos).

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

La persona considera que si se reformulan los objetivos de la propuesta (da sugerencias) se logrará alcanzarlos. Las recomendaciones se enlistan a continuación:

- La eliminación del primer objetivo específico de la propuesta.
- La especificación en el tercer objetivo específico de que se resuelven diferentes problemas ubicados en un mismo contexto económico.

Además, se da la sugerencia de ampliar las condiciones del proyecto, especificando los objetivos de las interacciones deseadas (entre pares y estudiante-docente) y el resultado final.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permitirán al estudiantado alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

La persona considera que las tareas diseñadas permiten al estudiantado un dominio adecuado de los contenidos matemáticos debido a los beneficios derivados de la parte motivacional de la propuesta, siempre que el poco / nulo conocimiento en otras áreas (economía, estadística, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales) sea manejado apropiadamente. Lo anterior se refiere a darle un acompañamiento adecuado a la población estudiantil que le permita super este obstáculo.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje del estudiantado considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

La persona considera que las siguientes limitantes se podrían presentar durante la ejecución de las tareas:

- Los conocimientos económicos y matemáticos alcanzados hasta el momento (sin embargo, la persona recalca que estas no son de interés para la propuesta ya que no se va a llevar a cabo).
- No asignarle un porcentaje de la evaluación en el curso MAT050 Cálculo II para Economía (parte motivacional).

b) Entrevista II

a) ¿Considera que se atendieron correctamente las sugerencias sobre el diseño de las tareas dadas en la entrevista anterior?

(x) Sí ( ) No

En caso de que la respuesta sea negativa, ¿qué otras acciones considera que se pueden realizar para mejorar el diseño de las tareas?

____
____
____
____
____

b) ¿Cuántas sesiones de trabajo considera que le conllevará al estudiantado completar las tareas diseñadas?

La cantidad de horas de estudio independiente necesarias para resolverlo debería ser equivalente a cuatro o cinco sesiones del curso.

c) ¿En qué ordenamiento considera apropiado ejecutar las tareas diseñadas?

En el orden que se presentan en clase y en otras fuentes de información adicionales.

d) De acuerdo con el ordenamiento realizado en la pregunta anterior, ¿en qué número de sesión considera oportuno ejecutar las tareas diseñadas?

No es posible establecer un número específico de sesiones, ya que se realiza de forma extracurricular. Sin embargo, se sugiere la resolución de dos o tres tareas por cada sesión de trabajo en grupo.

e) ¿Cuál considera que debería ser la actuación docente en la instrucción de la temática durante cada una de las sesiones señaladas?

El profesorado debe garantizar una comprensión adecuada de los temas en clase, asegurarse de que las indicaciones del proyecto estén claras desde el principio, brindar apoyo para aclarar dudas según sea necesario y proporcionar la retroalimentación correspondiente. Todas las personas que imparten el curso durante un mismo ciclo deben brindar los mismos apoyos.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (estudiantes) # 1

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):

b) Información de contacto (opcional):

c) Sexo: (x) Hombre
( ) Mujer

d) Fecha en que se realizó la entrevista: jueves 14 de julio de 2022

e) Modalidad de la entrevista: ( ) Presencial
(x) Virtual

2. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

El estudiante destaca que las instrucciones proporcionadas en los ejercicios resueltos en clase funcionan como ejemplos claros de lo que se espera de él al abordar las tareas asignadas. De esta manera, cuenta con una referencia sobre el contenido al cual están relacionadas las indicaciones.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

El estudiante menciona que las notas del curso son suficientes para abordar y resolver las tareas propuestas.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante sugiere que la formación de parejas es una opción viable para dividir el grupo, aunque plantea la posibilidad de que también se pueda realizar de manera individual.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante considera que la hora de consulta es un espacio adecuado para aclarar dudas relacionadas con el proyecto.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante comenta que la interacción con pares es beneficiosa para la discusión de ideas, aunque sostiene que no la considera indispensable.

f) ¿Considera que las tareas diseñadas poseen un nivel de dificultad adecuado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

El estudiante menciona que es el nivel habitual utilizado para otras asignaciones del curso, por lo tanto, sí.

g) ¿Considera que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera a que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

El estudiante afirma estar de acuerdo con lo que recuerda del curso.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

El estudiante indica que está de acuerdo según lo que recuerda del curso. Aunque inicialmente no recordaba los objetivos específicos del mismo, sostiene que la aplicabilidad a contextos económicos puede lograrse con aún mayor razón.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

El estudiante afirma estar de acuerdo con lo que recuerda del curso, siempre y cuando la asignación se realice con conciencia.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje considera/no considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

El estudiante señala que pueden surgir limitaciones debido al tiempo disponible, la falta de organización de algunas personas o el nivel de comprensión de ciertos aspectos por parte de parte de la población.

k) ¿Cuánto tiempo en semanas considera que se necesitará para completar cada una de las tareas diseñadas?

El estudiante menciona un plazo de dos o tres semanas.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (estudiantes) # 2

<u>Instrucciones</u>: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):

b) Información de contacto (opcional):

c) Sexo: (   ) Hombre

  (x) Mujer

d) Fecha en que se realizó la entrevista: jueves 14 de julio de 2022

e) Modalidad de la entrevista: (   ) Presencial

  (x) Virtual

2. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

La estudiante menciona que comprende lo que se le solicita, basándose en lo que recuerda haber realizado durante el curso.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

La estudiante sugiere que podría considerarse que el profesorado recomiende material adicional para consultar y complementar la información.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La estudiante considera que es una buena opción para facilitar la solución de los ejercicios y evitar que la carga sea demasiado pesada.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La estudiante sugiere la posibilidad de destinar algunos espacios de las sesiones para aclarar dudas, dado que no siempre es factible asistir a las horas de consulta.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La estudiante menciona la misma respuesta que proporcionó en la pregunta c).

f) ¿Considera que las tareas diseñadas poseen un nivel de dificultad adecuado?

( ) Sí (x) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

La estudiante opina que algunos ejercicios sí parecen asemejar a los utilizados en el curso, mientras que otros parecen más complejos de lo habitual.

g) ¿Considera que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera a que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

La estudiante afirma estar de acuerdo con lo que recuerda del curso.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

La estudiante indica que está de acuerdo según lo que recuerda del curso.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

La estudiante lo afirma solo si todas las personas del grupo colaboran en la solución.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje considera/no considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

La estudiante menciona que el tiempo puede ser una limitante, al igual que la complejidad de algunos ejercicios.

k) ¿Cuánto tiempo en semanas considera que se necesitará para completar cada una de las tareas diseñadas?

La estudiante menciona un plazo de dos semanas.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (estudiantes) # 3

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. **Información general de la persona**

a) Nombre (opcional):

b) Información de contacto (opcional):

c) Sexo: (x) Hombre

( ) Mujer

d) Fecha en que se realizó la entrevista: viernes 15 de julio de 2022

e) Modalidad de la entrevista: ( ) Presencial

(x) Virtual

2. **Información relacionada a la temática en cuestión**

a) Entrevista

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

El estudiante comenta que las instrucciones son lo suficientemente claras para aquellas personas que están al día con el estudio de los contenidos impartidos en clase; de lo contrario, puede resultar difícil comprender lo que se solicita.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

El estudiante afirma que, si las notas del curso son coherentes con lo que se solicita en el proyecto, estas son suficientes.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(   ) Sí   (x) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante sugiere que se realice en grupos de cuatro o cinco personas.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí   (   ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante está de acuerdo con la interacción propuesta, sin embargo, sugiere que se utilicen espacios dentro de las clases para el desarrollo de la solución del proyecto.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí   (   ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante está de acuerdo, ya que entre las personas de los grupos pueden apoyarse mutuamente para resolver los ejercicios y discutir los contenidos con el fin de encontrar la respuesta correcta.

f) ¿Considera que las tareas diseñadas poseen un nivel de dificultad adecuado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

El estudiante afirma que sí, ya que las asignaciones son coherentes con la dificultad de los cursos de matemática que ofrece la Escuela de Matemática de la UNA.

g) ¿Considera que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera a que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

El estudiante afirma estar de acuerdo con lo que recuerda del curso.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

El estudiante está de acuerdo, ya que la propuesta permite entender la aplicabilidad de los contenidos en estudio dentro de contextos económicos.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

(x) Sí   (   ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

El estudiante está de acuerdo, aunque considera que la propuesta debe complementarse con otras asignaciones para lograr un dominio total, así como un estudio adecuado de la teoría.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje considera/no considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

El estudiante menciona que la desorganización o el mal manejo de contenidos de cursos previos a MAT050 Cálculo II para Economía pueden representar limitantes.

k) ¿Cuánto tiempo en semanas considera que se necesitará para completar cada una de las tareas diseñadas?

El estudiante menciona un plazo de tres semanas.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (estudiantes) # 4

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):

b) Información de contacto (opcional):

c) Sexo: (x) Hombre
( ) Mujer

d) Fecha en que se realizó la entrevista: viernes 15 de julio de 2022

e) Modalidad de la entrevista: ( ) Presencial
(x) Virtual

2. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

El estudiante considera que las instrucciones son lo suficientemente claras y sugiere que podrían considerarse ejemplos con planteamientos semejantes en clase que puedan ser utilizados como guía.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

El estudiante está de acuerdo; sin embargo, sugiere que se podrían proporcionar videos u otros recursos más dinámicos para facilitar el estudio de los contenidos.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante está de acuerdo, ya que en grupos más grandes algunas personas pueden no contribuir significativamente.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante está de acuerdo, ya que la propuesta también facilita que las personas utilicen espacios de estudio independiente para interiorizar los conocimientos matemáticos e investigar. No obstante, destaca la importancia de tener siempre la opción de que el profesorado le ayude a aclarar dudas que no logre resolver por su cuenta.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante considera que la propuesta permite que personas con diferentes niveles de entendimiento se apoyen mutuamente para realizar la asignación. No obstante, sugiere que podría permitirse a algunas personas trabajar de forma individual.

f) ¿Considera que las tareas diseñadas poseen un nivel de dificultad adecuado?

( ) Sí (x) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

El estudiante menciona que para algunas personas, los ejercicios pueden representar un nivel de complejidad superior debido a la falta de dominio de los conocimientos base necesarios.

g) ¿Considera que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera a que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

El estudiante menciona que sí, según lo que recuerda haber estudiado.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

El estudiante menciona que sí, ya que la propuesta permite practicar y entender los contenidos matemáticos en situaciones económicas, lo cual es el objetivo deseado.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

( ) Sí (x) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

El estudiante menciona que la propuesta funciona para practicar y comprender la aplicabilidad de los contenidos matemáticos en contextos económicos. Sin embargo, destaca que para lograr un dominio adecuado, también se requiere el estudio detallado de la teoría y otros ejemplos.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje considera/no considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

El estudiante menciona que el tiempo, la complejidad de los ejercicios y el dejar todo para el final pueden ser limitantes.

k) ¿Cuánto tiempo en semanas considera que se necesitará para completar cada una de las tareas diseñadas?

El estudiante menciona un plazo de dos semanas y media a tres semanas.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (estudiantes) # 5

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. **Información general de la persona**

   a) Nombre (opcional):
   b) Información de contacto (opcional):
   c) Sexo: (   ) Hombre
      (x) Mujer
   d) Fecha en que se realizó la entrevista: martes 19 de julio de 2022
   e) Modalidad de la entrevista: (   ) Presencial
      (x) Virtual

2. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

La estudiante sugiere que, además, podrían proporcionarse explicaciones adicionales de algunos conceptos matemáticos previos que aparecen en las tareas con el objetivo de mejorar la comprensión, por ejemplo, el método de mínimos cuadrados.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

La estudiante opina que en las notas del curso podrían incluirse ejemplos similares que apoyen la resolución del proyecto, de manera que sea suficiente con esta herramienta para resolverlo.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La estudiante está de acuerdo y, de hecho, considera que los grupos de tres personas son la mejor opción para que la coevaluación, en caso de realizarse, sea justa.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La estudiante está de acuerdo, ya que considera que abordar las dudas durante las horas de consulta es lo más adecuado. Esto se debe a que el tiempo para estudiar las temáticas en clase es limitado y hay una gran cantidad de contenidos por cubrir.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

La estudiante está de acuerdo ya que considera que esta dinámica fomenta el trabajo cooperativo.

f) ¿Considera que las tareas diseñadas poseen un nivel de dificultad adecuado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

La estudiante considera que el nivel de complejidad es adecuado y similar al de los ejercicios del curso que acaba de aprobar.

g) ¿Considera que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera a que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

La estudiante considera que sí, según lo que recuerda del tema.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

La estudiante está de acuerdo, ya que le permite utilizar los conocimientos matemáticos aprendidos en su área de formación principal, que es la economía.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

( ) Sí (x) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

La estudiante considera que sí, que si la asignación se resuelve a conciencia, se logrará alcanzar un mejor dominio de la temática.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje considera/no considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

La estudiante considera que los conocimientos previos y la desorganización podrían ser limitantes.

k) ¿Cuánto tiempo en semanas considera que se necesitará para completar cada una de las tareas diseñadas?

La estudiante menciona un plazo de dos semanas es suficiente.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Bach. Valeria de los Ángeles Mesén Brenes

Guía de entrevista (estudiantes) # 6

Instrucciones: Marque con una equis (x) la opción que describe correctamente las características de la persona entrevistada, o escriba en el espacio en blanco la información solicitada.

1. Información general de la persona

a) Nombre (opcional):

b) Información de contacto (opcional):

c) Sexo: (x) Hombre

( ) Mujer

d) Fecha en que se realizó la entrevista: jueves 19 de julio de 2022

e) Modalidad de la entrevista: ( ) Presencial

(x) Virtual

2. Información relacionada a la temática en cuestión

a) Entrevista

a) ¿Considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las instrucciones de las tareas diseñadas son lo suficientemente claras?

El estudiante percibe que las instrucciones son claras en términos matemáticos, pero sugiere que podrían ser más detalladas en cuanto a la interpretación del contexto y lo que se espera.

b) ¿Considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas son adecuados?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que los recursos y materiales que se planean utilizar en el desarrollo de las tareas diseñadas sean adecuados?

El estudiante piensa que las notas del curso y algunas fuentes adicionales recomendadas por el profesorado son suficientes para abordar y resolver la tarea.

c) ¿Considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la división del estudiantado propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante está de acuerdo con la división propuesta, pero sugiere que podrían considerarse grupos de más personas para abordar el proyecto con mayor detalle.

d) ¿Considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción docente-estudiante propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante opina que la interacción propuesta está bien, pero sugiere que se deberían considerar espacios para aclarar dudas de manera individual durante la clase, ya que no todas las personas pueden asistir a las horas de consulta.

e) ¿Considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que la interacción entre pares propuesta para la ejecución de las tareas diseñadas es adecuada?

El estudiante considera que, de esta manera, las personas pueden compartir ideas y buscar la solución más adecuada para las tareas. Asimismo, destaca que permite que aquellas y aquellos estudiantes con un nivel de entendimiento menor se beneficien del conocimiento de otras u otros, facilitándoles una mejor preparación para los parciales.

f) ¿Considera que las tareas diseñadas poseen un nivel de dificultad adecuado?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas suponen una demanda cognitiva adecuada para el estudiantado?

El estudiante opina que, para aquellas personas que estudian la teoría y prestan la atención necesaria en clases, las instrucciones son lo suficientemente claras.

g) ¿Considera que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera a que las tareas diseñadas se relacionan con el tema de funciones de varias variables?

El estudiante considera que sí, ya que eso es lo que estudió en el curso.

h) ¿Considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

(x) Sí ( ) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos?

El estudiante dice que sí, porque le permite entender mejor los contenidos, ponerlos en práctica y comprender su funcionalidad en contextos económicos.

i) ¿Considera que las tareas seleccionadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

( ) Sí (x) No

¿Por qué considera/no considera que las tareas diseñadas permiten alcanzar un dominio adecuado de los contenidos matemáticos en estudio?

El estudiante considera que la asignación permite poner en práctica los conocimientos y prepararse mejor para los parciales, ya que se espera que tengan problemas similares.

j) ¿Cuáles limitantes en el aprendizaje considera/no considera que podrían presentarse durante la ejecución de las tareas diseñadas?

El estudiante considera que la complejidad, o al menos lo que parece ser complejo, podría desmotivar a algunas personas y convertirse en una limitante. También señala que dependiendo de la cantidad de personas por grupo, el tiempo podría ser una limitante.

k) ¿Cuánto tiempo en semanas considera que se necesitará para completar cada una de las tareas diseñadas?

El estudiante menciona un plazo de dos semanas y media a tres semanas, dependiendo de la cantidad de personas por grupo.