



Población y Salud en Mesoamérica

Revista electrónica publicada por el
Centro Centroamericano de Población,
Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica
<http://ccp.ucr.ac.cr>

Población y Salud en Mesoamérica

Revista electrónica semestral, ISSN-1659-0201

Volumen 11, número 1, artículo 3

Julio - diciembre, 2013

Publicado 1 de julio, 2013

<http://ccp.ucr.ac.cr/revista/>

Estimación y proyección de la mortalidad para Costa Rica con la aplicación del método Lee-Carter con dos variantes

Eduardo Aguilar Fernández



Protegido bajo licencia Creative Commons

Centro Centroamericano de Población

Estimación y proyección de la mortalidad para Costa Rica con la aplicación del método Lee-Carter con dos variantes

Fitting and forecasting mortality for Costa Rica applying the Lee-Carter method with two variants

Eduardo Aguilar Fernández¹

RESUMEN

El modelo de Lee y Carter ha sido aplicado para realizar estimaciones de la mortalidad en Costa Rica durante el período 1970-2010, y estas a su vez permiten hacer proyecciones que contribuyen al estudio del curso de la mortalidad en nuestra sociedad. Los datos del estudio corresponden a las tasas anuales de mortalidad, definidas para cada sexo y grupo de edad correspondientes al período 1970-2010. La incorporación de las variantes del modelo ha generado dos familias de estimaciones para la estimación de la esperanza de vida, mientras que las proyecciones muestran comportamientos muy similares que revelan valores mayores a los oficiales.

Palabras clave: mortalidad, esperanza de vida, proyección, método Lee-Carter, mínimos cuadrados ponderados, regresión de Poisson.

ABSTRACT

The Lee and Carter model has been applied to estimate mortality in Costa Rica between 1970 and 2010 by using two of the variations that have been incorporated to the model. Also, it is expected that these estimates allow making projections that contribute with the study of mortality's progress in our society. The study's data correspond to annual death rates that are defined for each gender and age group for the period 1970-2010. The incorporation of the model's variations has generated two sets of estimates that are quite suitable for the estimate of life expectancy. Meanwhile, projections show very similar behaviors which reveal higher values than the official ones.

Key words: mortality, life expectancy, projection, Lee-Carter method, weighted least squares, Poisson regression.

Recibido: 27 feb. 2013

Aprobado: 13 junio 2013

¹ Universidad Nacional y Universidad de Costa Rica. COSTA RICA. eaguilar2@gmail.com

1. INTRODUCCIÓN

El modelaje de la mortalidad implica el estudio de gran cantidad de información clasificada por año, edad y sexo. El objetivo fundamental es integrar dicha información mediante el establecimiento de una expresión que mejor la represente y la describa. Esta expresión nace por medio de la combinación de las variables involucradas con una serie de parámetros, los cuales se constituyen en el reflejo de las propiedades o la composición de la mortalidad, de ahí la importancia de su determinación.

Varias propuestas se han hecho para lograr alcanzar el objetivo de explicar el comportamiento de la mortalidad con unos cuantos parámetros. Una de las más recientes fue desarrollada por Ronald Lee y Lawrence Carter en 1992 (Lee y Carter, 1992). El método desarrollado por estos autores permite realizar estimaciones y proyecciones de mortalidad mediante la determinación de parámetros en el que se combinan procesos estadísticos de series de tiempo con una serie de procedimientos demográficos de pocos supuestos.

Su aplicación ha alcanzado gran aceptación por parte de investigadores demográficos en distintas partes del mundo, por su forma de implementación y su buen desempeño en sus primeros resultados (Lazar, 2004; Bongaarts, 2005; González y Guerrero, 2007; Girosi y King, 2007), pues, tal y como lo menciona Alho (1998), citado por Aburto (2012), los modelos estocásticos proveen de una estimación realista del error esperado en las estimaciones.

Por otro lado, el método ha sido objeto de evaluaciones (Lee y Miller, 2001) así como de modificaciones (Booth *et al.*, 2006). El presente estudio pretende aplicar el modelo de Lee y Carter con la utilización de dos variantes que han sido incorporadas en el tiempo para garantizar el funcionamiento adecuado del mismo, de modo que permita describir el patrón mostrado por la mortalidad en Costa Rica durante el período 1970-2010 y, a su vez, realizar proyecciones que muestren el comportamiento futuro de la mortalidad en nuestra sociedad.

1.1. Método de Lee y Carter

Lee y Carter (1992) proponen que la tasa de mortalidad para la edad x (edad simple o grupo de edad) en el año t , $m(x, t)$ puede estimarse a partir de la relación

$$\ln[m(x, t)] = a_x + b_x \cdot k_t + v_{x,t} \quad (1)$$

En la expresión anterior a y b son valores asociados con la edad (simple o grupo de edad) y k es un valor asociado al tiempo.

El parámetro a_x representa el nivel medio en el tiempo de los logaritmos de las tasas de mortalidad de la edad o grupo de edad x ; b_x representa la velocidad a la que varía la mortalidad en la edad o grupo de edad x según los cambios en k . Es decir, indica qué tan rápido o lento es el crecimiento o decrecimiento de la tasa de mortalidad para una determinada edad a lo largo del tiempo. En principio, b_x puede ser negativo para algunas edades (esto indica que la mortalidad se incrementa en ese grupo de edad mientras descende en otros), pero, en la práctica, Lee y Carter (1992) observaron que esto no parece ocurrir en el largo plazo, y más bien pareciera deberse a

fallas en la información o a eventos particulares que producen cambios en la mortalidad (como pueden ser guerras, epidemias, etcétera). El parámetro k_t refleja el nivel general de descenso en la mortalidad en el año t y $v_{x,t}$ representa el error aleatorio, el cual refleja la influencia histórica en un grupo de edad no capturada por el modelo.

Es importante destacar que coeficientes de la ecuación (1) no tienen solución única, por lo que es necesario disponer de un sistema conveniente de normalización para los coeficientes. Lee y Carter (1992) proponen que los valores b_x se normalicen para que sumen cero y los valores k_t se normalizan para que sumen 1. El uso de estas restricciones hace que los coeficientes a_x resulten ser un promedio aritmético simple sobre el tiempo de los logaritmos de las tasas, es decir

$$a_x = \frac{\sum_t \ln[m(x,t)]}{T} \quad (2)$$

También puede considerarse que la suma de las b_x sea igual a cero; sin embargo, Wilmoth (1993) apunta que se prefiere que la suma de los k_t sea cero, pues esto permite la comparación entre poblaciones (por ejemplo, cuando se han estimado modelos para hombres y mujeres), ya que pueden apreciarse con mayor claridad diferencias en las tendencias cuando la velocidad de los cambios en la mortalidad para dos poblaciones ha sido muy diferente, mientras que si se considera que la suma de los b_x sea cero en lugar de los k_t , provocaría que se pudieran observar tendencias muy similares en los k_t para poblaciones distintas.

Para completar el modelo sólo hace falta determinar los vectores b y k , los cuales no pueden estimarse mediante métodos ordinarios de regresión, pues no hay variables regresoras u observables en el lado derecho de la ecuación (1), sino que solo hay parámetros por determinar. Debe utilizarse entonces un método que brinde valores aproximados de estos vectores; Lee y Carter (1992) utilizan el método de Descomposición en Valores Singulares (SVD, por sus siglas en inglés), el cual permite obtener, por mínimos cuadrados, una solución para la estimación de los parámetros, por medio del primer elemento que resulta de aplicar dicha descomposición a la matriz

$$A = \ln[m(x,t)] - a_x \quad (3)$$

Lee y Carter (1992) plantean que un segundo ajuste en los valores de k_t es requerido, pues los resultados derivados de la primera estimación no permiten proporcionar un buen ajuste a los datos observados y ello deriva consigo la posibilidad de que se produzcan desviaciones en las proyecciones, porque la estimación de k_t ha sido realizada minimizando los errores en los logaritmos y no en las propias tasas de muerte. Este nuevo ajuste de los k_t debe ser de forma tal que los valores obtenidos reproduzcan el número de defunciones ocurridas en el año t , según lo indica la expresión

$$D_t = \sum_{x=0}^{\infty} N_{x,t} \cdot \exp(a_x + b_x \cdot k_t) + v_{x,t} \quad (4)$$

Donde D_t representa el número de defunciones ocurridas en el año t ; $N_{x,t}$ la población con edad x en el año t ; a_x y b_x son los valores obtenidos de la primera estimación y S es el último grupo de edad considerado en la tabla de mortalidad.

Posteriormente, la tendencia mostrada en el tiempo del valor k_t es extrapolada mediante modelos de series de tiempo. Lee y Carter (1992) utilizan el modelo ARIMA (0,1,0) de caminata aleatoria con deriva.

Finalmente, proyecciones para la tasa de mortalidad para un grupo de x pueden ser obtenidas a partir de la extrapolación de k_t y los valores a_x y b_x estimados inicialmente.

2. METODOLOGÍA

Los datos de la presente investigación corresponden al conjunto de tasas de mortalidad de Costa Rica definidas por sexo, edad y año, que comprenden el período que va desde el año 1970 hasta el año 2010, pues la información de este período presenta menos fluctuaciones en las tasas, es decir, existe una menor variabilidad. Además, es posible contar con información de mortalidad para las edades de 0 hasta el grupo abierto de 95 y más. Como unidad de estudio se define la tasa de mortalidad, por sexo, del grupo de edad x en el año t . Estas tasas provienen de las tablas de mortalidad elaboradas por el Centro Centroamericano de Población (CCP) en conjunto con el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC) (CCP/INEC, 2008).

Las variables consideradas en el estudio son la tasa de mortalidad, el sexo, el grupo de edad (0, 1-4, 5-9, 10-14 y demás grupos quinquenales hasta el grupo abierto de 95 y más), el año, así como el logaritmo natural de la tasa de mortalidad.

El presente estudio tiene como objetivo aplicar el modelo de Lee y Carter (1992) a un conjunto de tasas de mortalidad de Costa Rica para el período de 1970-2010 con la utilización de dos variantes al modelo original.

2.1. Variantes introducidas al modelo

Segunda estimación de k a partir de un modelo de regresión de Poisson

La primera de las variantes al modelo que se considerara en el estudio es la propuesta por Booth *et al.* (2001) para llevar a cabo la segunda estimación para el índice k (BMS). Los autores mencionan que el ajuste de k puede realizarse por medio de un modelo de regresión de Poisson para el número de muertes en cada grupo de edad x en el año t , ($D_{x,t}$), tomando en consideración los valores a_x y b_x obtenidos a partir de la primera estimación. Es decir

$$D_{x,t} = N_{x,t} \cdot m'_{x,t} \quad (5)$$

Por lo tanto, el modelo de Poisson queda expresado por

$$\ln(D_{x,t}) = \ln(N_{x,t}) + \ln(m'_{x,t}) + v'_{x,t} \quad (6)$$

Donde $\ln(m'_{x,t}) = a_x + b_x \cdot k'_t$ en la que k'_t es el valor que se obtiene como ajuste de k_t ; $v'_{x,t}$ es el error aleatorio que se obtiene al ajustar k_t (el modelo supone que los errores tienen una distribución de Poisson).

2.2. Estimación por mínimos cuadrados ponderados

Esta variante es introducida por Wilmoth (1993) y con ella propone realizar la estimación del modelo Lee-Carter mediante la aplicación de mínimos cuadrados ponderados (WLS), utilizando como ponderaciones el número de muertes observadas para el grupo de edad respectivo.

Para llevar a cabo la estimación del modelo Lee-Carter a partir de los mínimos cuadrados ponderados, es necesario establecer las mismas restricciones sobre los valores b_x y k_t pero ahora se minimiza la ecuación

$$\sum_{xt} d_{xt} (\ln(m_{xt}) - a_x - b_x k_t)^2 \quad (7)$$

Donde d_{xt} representa el número de muertes observadas en la edad x durante el año t . Para minimizar la ecuación anterior, es necesario obtener las primeras derivadas respecto a a_x , b_x y k_t e igualar a cero. Luego, para resolver cada uno de los parámetros a estimar, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\hat{a}_x = \sum_t d_{xt} (\ln(m_{xt}) - \hat{b}_x \hat{k}_t) \quad (8)$$

$$\hat{b}_x = \frac{\sum_t d_{xt} \hat{k}_t (\ln(m_{xt}) - \hat{a}_x)}{\sum_t d_{xt} \hat{k}_t^2} \quad (9)$$

$$\hat{k}_t = \frac{\sum_x d_{xt} \hat{b}_x (\ln(m_{xt}) - \hat{a}_x)}{\sum_x d_{xt} \hat{b}_x^2} \quad (10)$$

Wilmoth (1993) señala que soluciones simultáneas para estas ecuaciones pueden ser obtenidas fácilmente mediante un procedimiento iterativo: después de escoger un conjunto de valores

iniciales (normalmente los parámetros estimados mediante la descomposición en valores singulares), las ecuaciones anteriores son procesadas secuencialmente usando los valores de los parámetros estimados en la iteración anterior. Este procedimiento se realiza hasta alcanzar un rendimiento adecuado o hasta que no se encuentren cambios en los valores de las estimaciones.

2.3. Medidas de bondad de ajuste

Para explicar la calidad del ajuste se analizan los residuos estandarizados en los logaritmos de las tasas para cada sexo, según año y edad. El ajuste de un modelo se considera satisfactorio si estos residuos varían entre -2 y 2 , los cuales pueden obtenerse mediante la ecuación

$$rest = \frac{\ln(m_{x,t}) - (\hat{a}_x + \hat{b}_x \cdot \hat{k}_t)}{\uparrow_{dif}} \quad (11)$$

Un segundo aspecto considerado para valorar la calidad de ajuste del modelo para la elaboración de proyecciones es la estimación de la esperanza de vida al nacer. Para ello se reproducen las tablas de vida para los años en estudio a partir de la información proveniente de las tasas de mortalidad obtenidas con el método de Lee y Carter. Estas esperanzas de vida estimadas se comparan con las observadas en el período.

Para obtener estas tablas de vida las probabilidades de muerte (${}_nq_x$) se determinan a partir de las tasas estimadas para los grupos de 0-1, 1-4, 5-9 y siguientes. Para el cálculo en el primer año de vida, se consideran factores de separación distintos calculados por Rosero y Collado (2008), quienes determinaron un factor de 0,131882 para los hombres y de 0,161474 para las mujeres, de tal forma que

$$q_0 = \frac{m_0}{m_0(1-0,131882)+1} \quad \text{para hombres} \quad (12)$$

$$q_0 = \frac{m_0}{m_0(1-0,161474)+1} \quad \text{para mujeres} \quad (13)$$

Para el grupo de 1 a 4 años se utiliza la expresión

$${}_4q_1 = \frac{4 \cdot {}_4m_1}{4 \cdot {}_4m_1(1-0,35)+1} \quad (14)$$

Para el grupo de 5-9 y restantes grupos quinquenales las probabilidades de muerte (${}_5q_x$) se calculan a partir de la relación propuesta por Reed y Merrel (Ortega, 1987), es decir

$${}_5q_x = 1 - e^{-5 \cdot {}_5m_x - 0,008(5)^3 \cdot {}_5m_x^2} \quad (15)$$

En el grupo abierto final, la probabilidad de muerte es 1. Las restantes funciones de la tabla podrán estimarse mediante el uso de los métodos convencionales (Ortega, 1987).

2.4. Elaboración de las proyecciones

Para el modelo estocástico, Lee y Carter (1992) proponen el modelo ARIMA (0, 1, 0) de caminata aleatoria con deriva, utilizado, normalmente, cuando se tienen series de tiempo no estacionarias (Gujarati, 2003); sin embargo, dejan abierta la posibilidad de utilizar algún otro modelo ARIMA, si los datos así lo sugieren.

La realización de proyecciones de la mortalidad implica llevar a cabo un proceso de modelación de la variable k_t . El modelo ARIMA (0, 1, 0) propuesto para el índice k_t , en períodos igualmente espaciados, se expresa por

$$k_t = c + k_{t-1} + v_t \quad (16)$$

Es decir, el valor de k en el año t es igual a su valor en el año $t - 1$ más una constante c , que representa el término deriva, más un error o choque aleatorio. La expresión c es el término constante de deriva (que representa una tasa constante de cambio en k_t ; y que, usualmente, tiende a ser negativo (Li *et al.*, 2004) y v_t es el término de error que se distribuye como una variable aleatoria normal con media 0 y varianza σ^2 , donde estos errores son mutuamente independientes.

Los valores anteriores son utilizados para llevar a cabo las simulaciones para el parámetro k , por sexo, por medio de la ecuación

$$k_{q+j} = \hat{c} + \sqrt{\text{var}(\hat{c})}x_j + k_{q+j-1} + \epsilon_j \quad (17)$$

A partir de la simulación de las variables aleatorias x_j y ϵ_j , las cuales se distribuyen normalmente con media 0 y varianza 1, se obtienen las proyecciones del parámetro k .

Los valores simulados de k_{q+j} permiten realizar las simulaciones de $m_{x,q+j}$ ($j > 0$). Con ayuda de estos valores, en conjunto con los valores de a_x y b_x obtenidos por cada método, pueden obtenerse estimaciones para los intervalos de confianza para las tasas de mortalidad y demás valores presentes en la tabla de vida, en particular, para la esperanza de vida, tal y como lo hicieron Lee y Carter (1992) para los Estados Unidos.

Para la estimación de los modelos se utilizará el paquete estadístico Stata 10.0 (Stata Corp.)

3. RESULTADOS

En este apartado se desarrolla una descripción del comportamiento de los parámetros estimados por medio de cada una de las variantes empleadas, seguidamente se realiza una comparación de la esperanza de vida estimada y observada para el período 1970-2010 y finalmente, una revisión del comportamiento de la proyección de la esperanza de vida al nacer a partir de los parámetros estimados en cada de una de las técnicas, las cuales son comparadas con los valores oficiales.

3.1. Estimación de los parámetros

Los valores de a_x reflejan el comportamiento conocido de la mortalidad por edad según el sexo, es decir, niveles altos de mortalidad en los primeros grupos de edad y luego un descenso en las edades jóvenes y finalmente un ascenso continuo que llega a alcanzar niveles elevados en los grupos de edad más avanzadas (Gráfica 1). En cuanto a los valores b_x , recuérdese que estos muestran qué tan rápido crece o decrece la tasa de mortalidad para una determinada edad en el tiempo. Las estimaciones reflejan que los cambios en la mortalidad se dan con mayor fuerza en los primeros años de vida y que esta fuerza disminuye conforme aumenta la edad (Gráfica 2).

En cuanto al parámetro k_t (Gráfica 3), puede observarse un patrón descendente en su comportamiento, el cual ha sido más fuerte en las mujeres; además, es posible apreciar una fuerte caída en la década de los años setenta provocado, en gran medida, por el descenso anual promedio de entre el 11 y el 14% experimentado por la tasa de mortalidad en la niñez y que fue producto de la influencia de una serie de factores, entre los que destacan el desarrollo socioeconómico alcanzado en la década, acompañado de una baja considerable en la fecundidad y de la ejecución eficaz de programas de salud (Rosero, 1985).

3.2. Comportamiento de las estimaciones

Por otro lado, el ajuste del logaritmo de las tasas de mortalidad permite observar residuos estandarizados bastante similares para los dos sexos y un comportamiento que se considera satisfactorio, según el rango de variación de los residuos (Gráfica 4).

Al analizar la evolución de la esperanza de vida al nacer, se obtiene por ambas metodologías una tendencia casi idéntica a la presentada por los valores observados (Gráfica 5). Ahora bien, si se toman en cuenta los resultados residuales así como las estimaciones de la esperanza de vida, se considera que ambas técnicas presentan un buen ajuste y, por lo tanto, pueden emplearse para la elaboración de proyecciones.

3.3. Proyecciones de k

Para realizar las proyecciones se lleva a cabo el modelo ARIMA (0,1,0) de caminata aleatoria propuesto por Lee y Carter (1992). Puede observarse que no existen grandes diferencias en las estimaciones de c y \dagger a partir de las variantes utilizadas en la investigación (Cuadro 1).

Los valores anteriores son utilizados para llevar a cabo las simulaciones para el parámetro k , por sexo. Se efectuaron 1 000 simulaciones por año para cada sexo, con lo que se obtuvieron los valores medios de k (Cuadro 2). Los resultados de las proyecciones revelan el comportamiento

descendente del índice con intervalos de confianza del 95%, que tienden a ser más amplios con la metodología BMS, principalmente en el sexo femenino (Gráfica 6).

Empleando los valores de k anteriores en conjunto con los valores a y b (Cuadro 3) obtenidos inicialmente, se realizan estimaciones de las restantes funciones de la tabla de vida.

3.4. Proyecciones en la esperanza de vida

Para la esperanza de vida al nacer, se proyecta que aumentará de 81,7 en 2010 a alrededor de 88,8 en el año 2050, para el caso del sexo femenino; mientras que, para el caso masculino, pasaría de 76,5 en 2010 a alrededor de 81,8 en el año 2050, cuando se considera el período 1970-2010 como base para la estimación (Cuadro 4).

Los resultados también proyectan que se dará una fuerte desaceleración en la tasa de crecimiento de e_0 cuando se considera el período base 1970-2010, pues en él e_0 femenina y masculina aumentó 0,35 y 0,31 años por año calendario respectivamente, mientras que para el período proyectado el aumento respectivo sería de 0,18 y 0,13 años por año calendario. Tal y como lo explican Lee y Rofman (1994), el método de proyección utilizado, en el cual el índice k es modelado a partir de un proceso aleatorio con tendencia, provoca que la tasa de descenso de la mortalidad de cada grupo de edad se mantenga constante a través del período de proyección, y sea esta igual a la del período de muestra; sin embargo, la entropía descendente de la tabla de vida hace que cada reducción porcentual en las tasas de mortalidad según la edad se traduzca en incrementos de e_0 progresivamente más pequeños.

Además, se observa que e_0 sigue la misma tendencia en ambas metodologías con pequeñas diferencias en algunos años ligeramente mayores en el sexo femenino (Cuadro 4). Por otro lado, se observa un aumento en la amplitud del intervalo de confianza conforme pasan los años, esto producto del aumento que experimentaría la variabilidad con el paso del tiempo; sin embargo, este aumento es menor al utilizar WLS (Gráfica 7).

3.5. Comparación con las proyecciones oficiales

En el presente estudio se consideran como proyecciones oficiales de Costa Rica las que han sido elaboradas por el CCP en conjunto con el INEC, con ayuda del paquete informático RUP de la Oficina del Censo de Estados Unidos, bajo la consideración del método de los componentes del cambio demográfico de las cohortes, el cual formula hipótesis sobre el comportamiento de dichos componentes. Las cifras se encuentran actualizadas al año 2008 (CCP- INEC, 2008).

En lo que respecta a las proyecciones oficiales de la esperanza de vida al nacer, estas mantienen una tendencia creciente pero más moderada a la obtenida por las metodologías empleadas. Por ejemplo, la proyección oficial para el año 2050 es de 84,92 años para las mujeres, mientras que la proyección derivada del modelo BMS es de 88,2 (IC 95%: 83,8-91,9), es decir, hay una diferencia de 3,28 años. Por su parte, la proyección oficial para el sexo masculino es de 79,71 años, mientras que la metodología BMS señala un valor de 81,7 (IC 95%: 78,7-84,0), es decir, el valor resultante del modelo es 2 años mayor a la proyección oficial.

Comportamientos similares han encontrado otros autores al aplicar el método Lee-Carter. Por ejemplo, la proyección de la esperanza de vida mexicana en el año 2050 realizada por González y Guerrero (2007) resultó ser 2,5 años mayor al valor oficial, cuando utilizan datos del período 1940-2001. Por otra parte, Lee y Carter (1992) determinaron, con la utilización del período 1900-1989 como base, que en Estados Unidos la esperanza de vida en el año 2065 sería de 86,05, es decir, 5,6 años mayor al valor oficial. Booth *et al.* (2001) también encuentran valores de esperanza de vida superiores a los oficiales en estimaciones para Australia.

Por otro lado, puede observarse que los valores oficiales se mantienen dentro del intervalo de confianza obtenido a partir de la variante BMS; sin embargo, para el sexo femenino, en los últimos años de la proyección, estos valores quedan fuera del intervalo de confianza que se deriva del empleo de la metodología WLS (Gráfica 8).

3.6. Sensibilidad de la proyección respecto al período base utilizado

Con el fin de determinar la validez de las proyecciones obtenidas, se realizó el cálculo de nuevas estimaciones para identificar qué tan sensible puede resultar el método cuando se utiliza otro período como base.

Para llevar a cabo este análisis se consideró el período 1980-2010, el cual cumple con el requisito propuesto por Li *et al.* (2004) que recomienda que el estudio abarque al menos 30 años de historia reciente. En este período la reducción de la tasa de mortalidad presenta un ritmo menor que el mostrado en la década de los años setenta, por ejemplo, para el período 1981-2010 la tasa de descenso promedio en las tasas de mortalidad para los menores de un año es alrededor del 1,9%, en los niños de 1 a 4 años no sobrepasa el 2,4% y en las personas de 5 a 19 llega a alcanzar el 1,3% en el sexo femenino. Por tal razón, existe la posibilidad de que el comportamiento mostrado en la década de los años setenta pueda no ser válido para el período de la proyección.

En cuanto a los valores a_x , el comportamiento muestra un ligero descenso en todas las edades. Esto obedece a que dicho parámetro se estima como un promedio aritmético simple en los logaritmos para cada una de las edades con un período que presenta 10 observaciones menos al considerado inicialmente (Gráfica 9).

Para b se observan valores negativos en los grupos 15 a 19, 20 a 24 y 25 a 29, lo cual indica que la mortalidad en estas edades no descendería en el tiempo, mientras sí lo hace en otras. Autores como Debón (2003) también encontraron valores negativos de b para edades intermedias. Por otro lado, en el sexo femenino se observan valores menores en los grupos de edad inferiores a 40, situación que se repite en el sexo masculino, a excepción de algunos grupos como 5 a 9, 10 a 14 y 45 a 49. Los valores mayores de b en este período en las edades avanzadas indican una mayor respuesta en la tasa de mortalidad ante los cambios dados en k (Gráfica 10).

Con respecto al índice k_t , las estimaciones muestran un descenso más moderado, lo que refleja un patrón más cercano a la linealidad; además, los resultados son muy similares en cada uno de los métodos empleados (Gráfica 11).

En el modelo ARIMA, la estimación de c masculina y femenina presenta ahora valores de $-0,21$ y $-0,28$ respectivamente, lo cual refleja un descenso importante en ritmo de cambio de la mortalidad si se compara con los valores $-0,38$ y $-0,55$ respectivos, obtenidos con el período base 1970-2010. Por su parte, la estimación de σ pasa de $0,58$ y $0,77$ a $0,38$ y $0,57$ respectivamente, con lo que se logra una reducción en la incertidumbre de las proyecciones.

El menor descenso experimentado por las tasas de mortalidad en el período 1980-2010 permite observar que la proyección de la esperanza de vida resulte más conservadora. Si se toman en cuenta los resultados de aplicar la metodología BMS, la esperanza de vida al nacer masculina en el año 2050 sería de $80,0$ (IC 95%: $78,1-81,8$). Este valor resulta ser $1,7$ años menor al obtenido cuando se considera el período 1970-2010 como base. En el caso del sexo femenino, la esperanza de vida al nacer es de $86,9$ (IC 95%: $83,7-90,4$), es decir, $1,3$ años menor a la obtenida con las estimaciones del período base 1970-2010.

Los resultados anteriores señalan que la esperanza de vida puede estar sobrestimada cuando el período 1970-2010 es considerado base para la estimación. Esta situación puede ser provocada por la influencia, en la tendencia proyectada, del gran descenso que presentó la mortalidad en la década de los años setenta y que pudiera no ser aplicable al comportamiento de este componente en el futuro, pues, como se mencionó anteriormente, en las últimas décadas su descenso ha sido más moderado. Sin embargo, es importante resaltar que la proyección resultante al utilizar el período 1970-2010 como base se encuentra dentro de los límites de confianza del 95%, estimados con la información del período 1980-2010 (Gráfica 12). Por lo tanto, se considera que no existe evidencia suficiente para indicar que las proyecciones que se derivan del período base de 1970 a 2010 no son válidas.

4. DISCUSIÓN

El estudio ha permitido obtener, en primera instancia, una serie de estimaciones de los parámetros a_x , b_x y k_t para dos períodos de estudio, en los que se observa un comportamiento muy similar cuando se emplean las variantes BMS y WLS al modelo original propuesto por Lee y Carter (1992), y que permiten obtener estimaciones, en términos de la esperanza de vida, muy favorables cuando se comparan con los valores observados.

En segundo lugar, las proyecciones de la esperanza de vida muestran una tendencia casi idéntica al emplear las dos variantes; sin embargo, se observa que los intervalos tienden a ser más pequeños en los últimos años de la proyección al utilizar WLS.

Además, el comportamiento para Costa Rica parece no ser inusual, ya que autores como Lee & Carter (1992), González & Guerrero (2007), Lee y Rofman (1994) han encontrado, con la aplicación del modelo Lee-Carter, proyecciones de mortalidad que son superiores a los valores oficiales.

Sin embargo, es importante recalcar que los resultados obtenidos provienen de un modelo de extrapolación de tendencias y que un descenso acelerado de la mortalidad en el pasado (como el presentado en la década de los años setenta) puede visualizar escenarios favorables sobre lo que podría darse en el siglo XXI. También es claro que el futuro no tiene por qué comportarse de la

misma manera que ha evolucionado el pasado y que los escenarios hipotéticos que se han planteado podrían no presentarse como se prevén, ya que, en el transcurso del tiempo, la interacción de una serie de variables que no son contempladas en este tipo de modelaciones, podrían influir, de alguna forma, en el desarrollo de la vida futura y, con ello, afectar el comportamiento de los componentes demográficos. En este sentido, Lee y Rofman (1994) plantean que partir del supuesto de que el ritmo de descenso experimentado por las tasas de mortalidad en el pasado seguirá en el futuro puede considerarse, en cierta forma, una debilidad, lo que genera cierta inconveniencia al modelo.

Además, es preciso indicar que Lee y Rofman (1994) mencionan que no es recomendable proyectar mucho más allá de la mitad del período que ha sido considerado como base de las estimaciones; sin embargo, en el presente estudio se ha proyectado para un período más amplio de lo recomendado, situación que puede proporcionarle cierta fragilidad a las proyecciones.

Por otro lado, cabe destacar que el análisis de sensibilidad realizado en el estudio mostró que no existen evidencias suficientes para descartar los resultados obtenidos a partir de la información del período 1970-2010; sin embargo, es importante mencionar que la posibilidad de utilizar otras fuentes de información que se consideren más adecuadas queda abierta, de modo que pueda brindársele mayor certidumbre a las proyecciones y con ello complementar los hallazgos de la presente investigación.

Adicionalmente, puede señalarse que las variantes empleadas tienen diferencias en metodología que podrían ser prácticas en uno u otro momento, según el alcance del estudio que se quiera y del tipo de información con la que se cuente. Por ejemplo, la metodología BMS utiliza un método de estimación por máxima verosimilitud del que se conocen sus propiedades y no requiere la estimación adicional de los parámetros a y b , aunque es necesario tener información sobre la distribución de la población; por su parte, la utilización de WLS requiere, además de los valores de k , estimaciones adicionales de los parámetros a y b , aunque no demanda el uso de datos referentes a la distribución de la población según el sexo, por lo tanto, su aplicación sería de gran utilidad cuando se carezca o se dude de la calidad de este tipo de información en una determinada región; no obstante, debe tenerse en cuenta que, al aplicar mínimos cuadrados ponderados, se parte del supuesto de que los residuos son homocedásticos y esto no siempre ocurre.

Es necesario aclarar que en el estudio se ha utilizado un modelo de extrapolación de tendencias con la incorporación de dos variantes al modelo original. Esto ha permitido desarrollar dos escenarios y comparar sus resultados, los cuales no son tan distintos entre sí y describen un posible panorama en el curso de la mortalidad de Costa Rica. Por lo tanto, esta investigación se considera un pequeño aporte, de modo que las proyecciones obtenidas, sin dejar de lado las limitaciones de la metodología empleada, sean un complemento del conjunto de valores oficiales y que los resultados aquí expuestos, en combinación con otros, contribuyan al estudio de este componente demográfico y de sus implicaciones para el desarrollo del país.

Finalmente, se debe mencionar que las dos variantes al modelo original se han desarrollado tomando en cuenta aspectos como la conducta lineal del índice de mortalidad k , la hipótesis de que el vector b es fijo en el tiempo, la descomposición en valores singulares para la primera estimación del modelo, el desarrollo del modelo ARIMA (0,1,0) para la proyección del índice k . Podría resultar conveniente que estudios posteriores puedan aplicar este modelo con la utilización

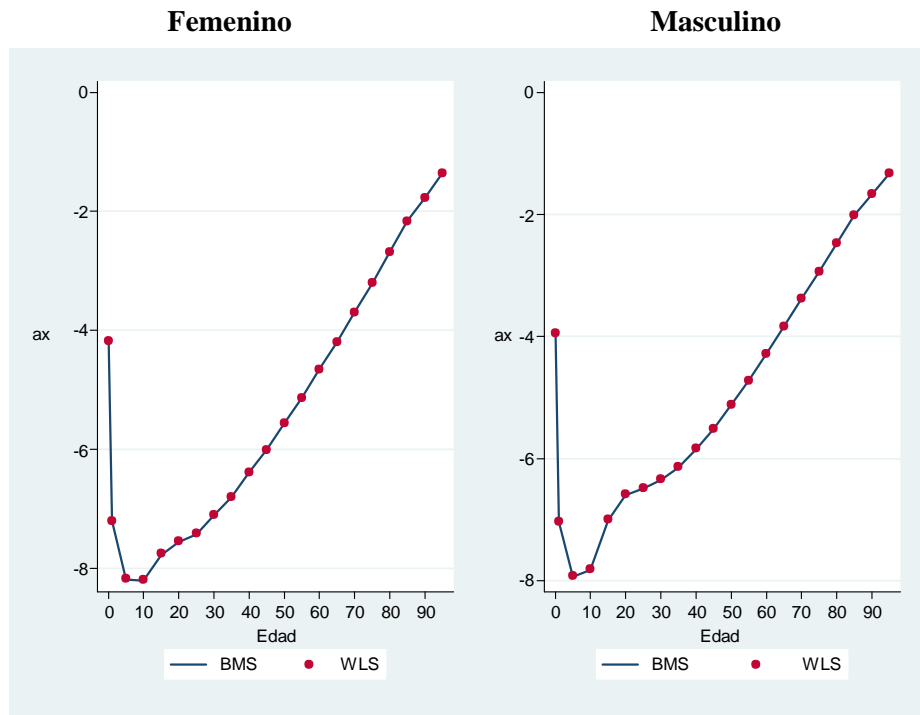
de alguna otra de las variantes propuestas y que han quedado fuera del alcance de esta investigación, de modo que puedan proporcionarse nuevas proyecciones que permitan evaluar los resultados de este estudio.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aburto, J. (2012). Estimación de la mortalidad mexicana por el Método de Lee-Carter y por el Modelo Aditivo Doble Multiplicativo propuesto por Wilmoth. México: *XI Reunión Nacional de Investigación Demográfica en México*. Recuperado de http://www.somede.org/xireunion/ponencias/Otrastematicas/188ADM_LeeCarter_SOMEDE.pdf
- Bongaarts, J. (2005). Long-range trends in adult mortality: Models and projection methods. *Demography*, 42 (1), 23-49.
- Booth, H., Maindonald, J. y Smith L. (2001). Age-Time interactions in mortality projection: applying Lee-Carter to Australia. *Working Papers in Demography* No. 85: Demography and Sociology Program, Research School of Social Sciences, Australian National University. Recuperado de <http://adsri.anu.edu.au/sites/default/files/publications/demog-papers/85.pdf>
- Booth, H., Hyndman, R., Tickle, L. y de Jong, P. (2006). Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions. *Demography Research*, 15 (9), 289-310.
- CCP / INEC. (2008). *Costa Rica: Estimaciones y Proyecciones de Población por sexo y edad (cifras actualizadas) 1950-2100*. San José, Costa Rica: Publicaciones del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC).
- Coelho, E. (2005). The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality. The Portuguese experience. Viena, Austria: *JOINT EUROSTAT-UNECE WORK SESSION ON DEMOGRAPHIC PROJECTIONS*. Recuperado de http://circa.europa.eu/irc/dsis/jointestatunece/info/data/abs_coelho.htm.
- Debón, A. (2003). Graduación de tablas de mortalidad. Aplicaciones actuariales. *Servicio de Publicaciones*, Universidad de Valencia. Recuperado de <http://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/9734/debon.pdf?sequence=1>.
- Giroi, F. y King, G. (2007). Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method. Recuperado de <http://gking.harvard.edu/files/lc.pdf>
- González, C. y Guerrero, V. (2007). *Pronósticos estadísticos de mortalidad y su impacto sobre el Sistema de Pensiones de México*. Recuperado de http://www.consar.gob.mx/premio_pensiones/pdf/2007
- Gujarati, D. (2003). *Econometría*. (4ª ed.). México: McGraw Hill.
- Lazar, D. (2004). *On forecasting mortality using Lee-Carter method*. Babes Bolyai-University, Faculty of Economic Science, Cluj-Napoca, Romania. Recuperado de <http://www.stat.ucl.ac.be/samos2004/proceedings2004/Lazar2.pdf>.
- Lee, R. y Carter, L. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87 (419), 659-675.
- Lee, R. y Miller, T. (2001). Evaluating the Performance of the Lee-Carter Method for Forecasting Mortality. *Demography*, 38, 537-549.

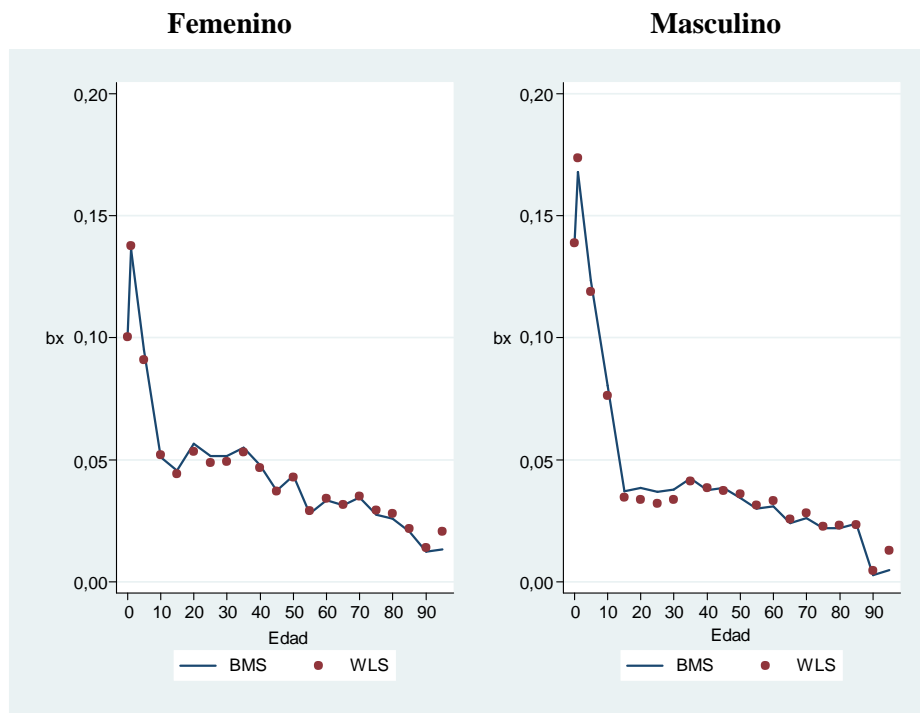
- Lee, R. y Rofman, R. (1994). Modelación y Proyección de la Mortalidad en Chile. *Notas de Población* 22, No. 59:182–213.
- Li, N., Lee, R. y Tuljapurkar, S. (2004). Using the Lee-Carter Method to forecast mortality for populations with limited data. *International Statistical Review*, 72 (1), 19-36.
- Ortega, A. (1987). *Tablas de mortalidad*. Celade, Serie E No. 1004. San José, Costa Rica.
- Rosero, L. (1985). Determinantes del descenso en la mortalidad infantil en Costa Rica. *Boletín de la Oficina Sanitaria Panamericana*, 510-527.
- Rosero, L. y Collado, A. (2008). Tablas de mortalidad, jubilación e invalidez, Costa Rica 2000-2005. *Población y Salud en Mesoamérica*, 6 (1), 44 pp.
- Wilmoth, J. (1993). *Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter Model of mortality change*. Technical Report. Journal of Applied Statistics. Department of Demography, University of California, Berkeley.

Gráfica 1. Costa Rica. Valores \hat{a}_x por sexo y método según grupo de edad. Período 1970-2010



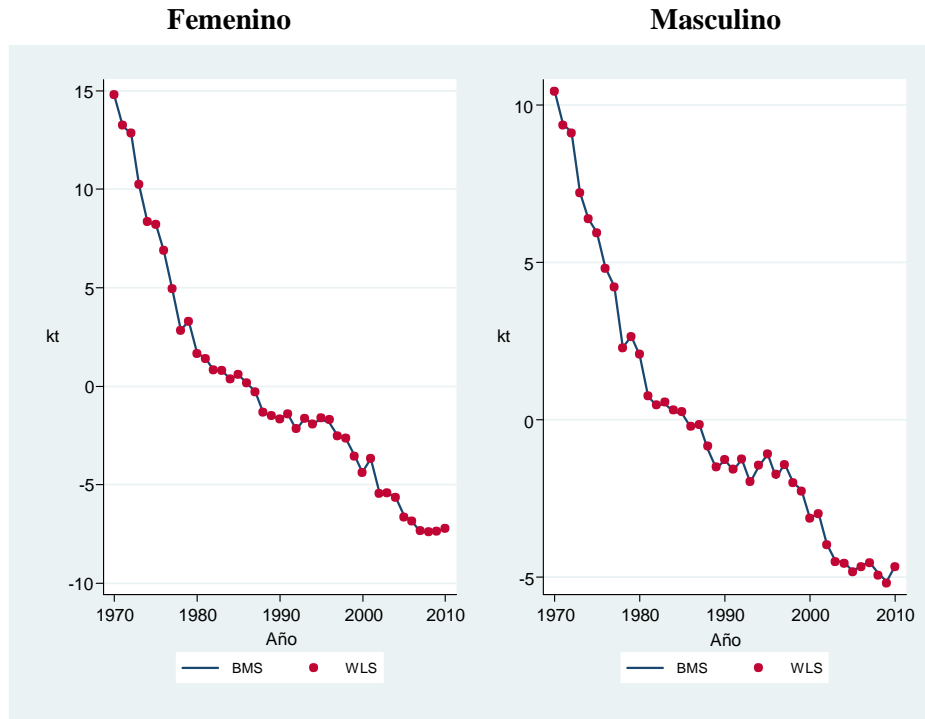
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

Gráfica 2. Costa Rica. Valores \hat{b}_x por sexo y método según grupo de edad. Período 1970-2010



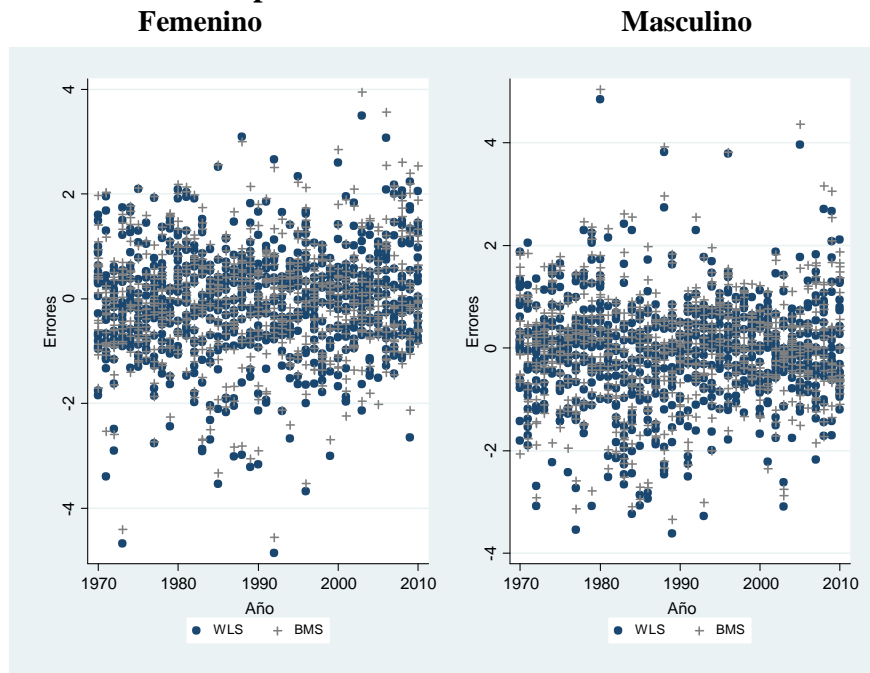
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de INEC-CCP.

Gráfica 3. Costa Rica. Estimación del índice de mortalidad k por sexo y método, según año. Período 1970-2010



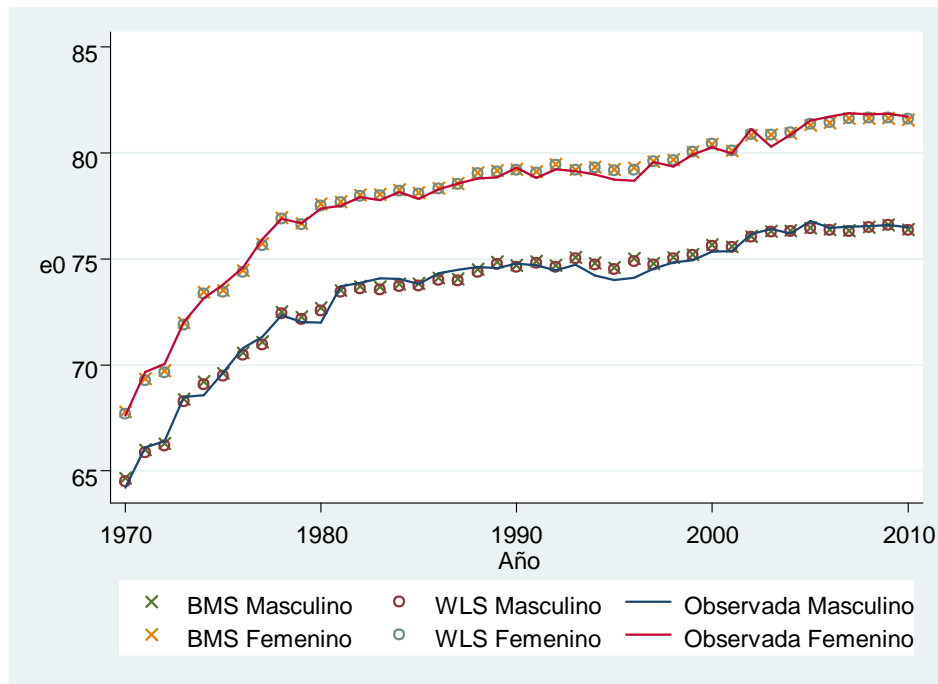
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

Gráfica 4. Costa Rica. Residuos estandarizados para la primera estimación k , según año por sexo. Período 1970-2010



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

Gráfica 5. Costa Rica. Esperanza de vida al nacer, según año por sexo. Período 1970-2010



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

Cuadro 1. Costa Rica. Estimación de los parámetros del modelo ARIMA, según sexo. Período 1970-2010

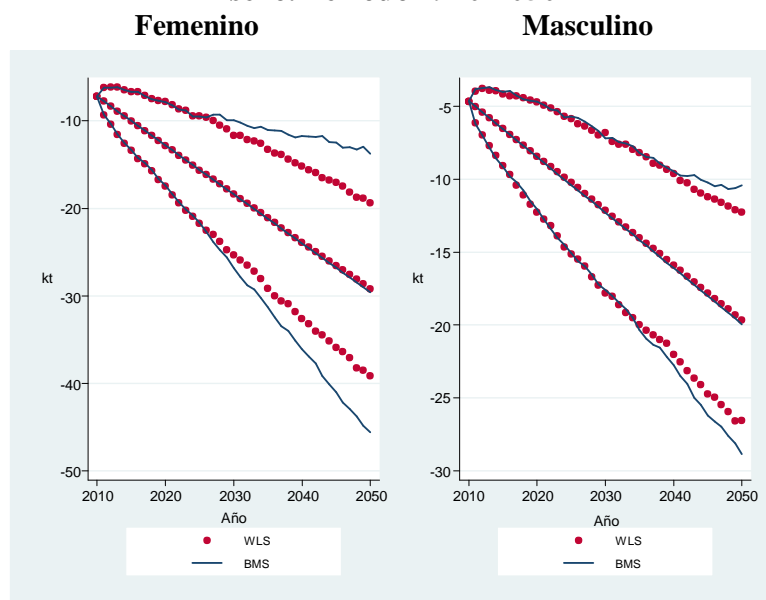
Estimador	Masculino		Femenino	
	BMS	WLS	BMS	WLS
\hat{c}	-0,3777125	-0,3779956	-0,5491983	-0,5505556
\hat{f}	0,5946269	0,5835343	0,7691437	0,7792743

Cuadro 2. Costa Rica. Proyección del índice de mortalidad por sexo (2011-2050)

Año	Masculino		Femenino		Año	Masculino		Femenino	
	BMS	WLS	BMS	WLS		BMS	WLS	BMS	WLS
2011	-5,01	-5,05	-7,75	-7,76	2031	-12,67	-12,55	-18,94	-18,91
2012	-5,41	-5,41	-8,33	-8,34	2032	-13,05	-12,95	-19,50	-19,46
2013	-5,80	-5,79	-8,89	-8,91	2033	-13,41	-13,29	-20,05	-19,99
2014	-6,18	-6,14	-9,44	-9,46	2034	-13,78	-13,67	-20,62	-20,53
2015	-6,56	-6,53	-9,99	-10,01	2035	-14,17	-14,04	-21,19	-21,10
2016	-6,94	-6,94	-10,55	-10,57	2036	-14,54	-14,41	-21,72	-21,64
2017	-7,33	-7,29	-11,11	-11,13	2037	-14,96	-14,77	-22,30	-22,24
2018	-7,71	-7,68	-11,66	-11,68	2038	-15,35	-15,12	-22,88	-22,80
2019	-8,10	-8,06	-12,22	-12,25	2039	-15,74	-15,52	-23,43	-23,37
2020	-8,49	-8,43	-12,80	-12,82	2040	-16,09	-15,92	-24,00	-23,89
2021	-8,85	-8,80	-13,32	-13,35	2041	-16,46	-16,27	-24,53	-24,42
2022	-9,26	-9,15	-13,91	-13,94	2042	-16,86	-16,67	-25,11	-24,99
2023	-9,66	-9,51	-14,49	-14,52	2043	-17,25	-17,04	-25,68	-25,48
2024	-10,04	-9,88	-15,04	-15,07	2044	-17,63	-17,43	-26,22	-26,01
2025	-10,43	-10,24	-15,61	-15,64	2045	-18,01	-17,81	-26,78	-26,54
2026	-10,79	-10,59	-16,14	-16,16	2046	-18,39	-18,19	-27,33	-27,05
2027	-11,14	-10,99	-16,72	-16,68	2047	-18,78	-18,56	-27,89	-27,59
2028	-11,51	-11,39	-17,28	-17,22	2048	-19,16	-18,91	-28,45	-28,12
2029	-11,90	-11,76	-17,83	-17,79	2049	-19,55	-19,30	-29,01	-28,65
2030	-12,32	-12,15	-18,39	-18,39	2050	-19,94	-19,66	-29,58	-29,19

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

Gráfica 6. Costa Rica. Valores proyectados para el índice de mortalidad k , según año por sexo. Período 1970-2050



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

Cuadro 3. Costa Rica. Valores \hat{a}_x y \hat{b}_x según grupo de edad por sexo y método. Período 1970-2010

Edad	\hat{a}_x				\hat{b}_x			
	Masculino		Femenino		Masculino		Femenino	
	BMS	WLS	BMS	WLS	BMS	WLS	BMS	WLS
0	-3,9456	-3,9430	-4,1757	-4,1755	0,1393	0,1389	0,1016	0,1004
1	-7,0341	-7,0272	-7,2030	-7,2056	0,1678	0,1735	0,1363	0,1376
5	-7,9306	-7,9133	-8,1905	-8,1669	0,1233	0,1189	0,0951	0,0909
10	-7,8254	-7,8043	-8,2076	-8,1869	0,0804	0,0762	0,0510	0,0519
15	-7,0145	-6,9936	-7,7725	-7,7498	0,0371	0,0345	0,0455	0,0442
20 ^a	-6,5991	-6,5764	-7,5628	-7,5362	0,0385	0,0338	0,0565	0,0534
25 ^a	-6,4900	-6,4758	-7,4267	-7,4129	0,0368	0,0320	0,0515	0,0489
30	-6,3538	-6,3362	-7,1076	-7,1006	0,0378	0,0336	0,0516	0,0493
35	-6,1453	-6,1337	-6,8068	-6,7944	0,0424	0,0412	0,0549	0,0533
40	-5,8435	-5,8312	-6,3852	-6,3815	0,0375	0,0386	0,0479	0,0468
45	-5,5141	-5,5063	-6,0114	-6,0068	0,0384	0,0374	0,0373	0,0371
50	-5,1156	-5,1138	-5,5560	-5,5535	0,0345	0,0361	0,0435	0,0429
55	-4,7183	-4,7172	-5,1384	-5,1337	0,0299	0,0315	0,0280	0,0290
60	-4,2868	-4,2848	-4,6569	-4,6577	0,0308	0,0333	0,0335	0,0341
65	-3,8350	-3,8345	-4,1922	-4,1901	0,0240	0,0256	0,0314	0,0316
70	-3,3789	-3,3743	-3,6997	-3,6949	0,0261	0,0282	0,0346	0,0350
75	-2,9375	-2,9333	-3,2055	-3,2022	0,0219	0,0227	0,0275	0,0292
80	-2,4732	-2,4700	-2,6847	-2,6826	0,0219	0,0231	0,0260	0,0280
85	-2,0140	-2,0084	-2,1666	-2,1619	0,0238	0,0234	0,0207	0,0217
90	-1,6722	-1,6620	-1,7737	-1,7655	0,0028	0,0046	0,0124	0,0139
95	-1,3322	-1,3195	-1,3586	-1,3610	0,0049	0,0129	0,0134	0,0206

^a En el caso del sexo femenino, las tasas de estos dos grupos para el año 2003 se calcularon nuevamente a partir de los datos de población y defunciones.

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

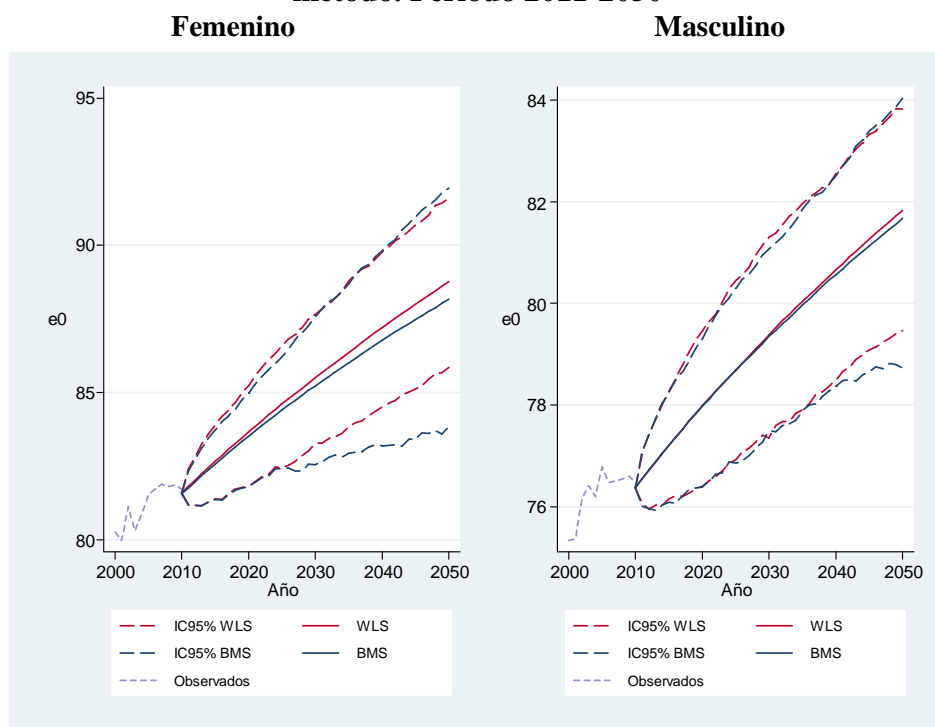
Cuadro 4. Costa Rica. Proyecciones de la esperanza de vida al nacer, según año por sexo. Período 2011-2050

Año	Femenino		Masculino	
	BMS	WLS	BMS	WLS
2010*	81,7	81,7	76,5	76,5
2011	81,8	81,8	76,6	76,6
2015	82,6	82,7	77,2	77,2
2020	83,5	83,7	78,0	78,0
2025	84,4	84,6	78,7	78,7
2030	85,2	85,5	79,4	79,4
2035	86,0	86,3	80,0	80,0
2040	86,8	87,2	80,6	80,7
2045	87,5	88,0	81,1	81,3
2050	88,2	88,8	81,7	81,8

* Valor observado.

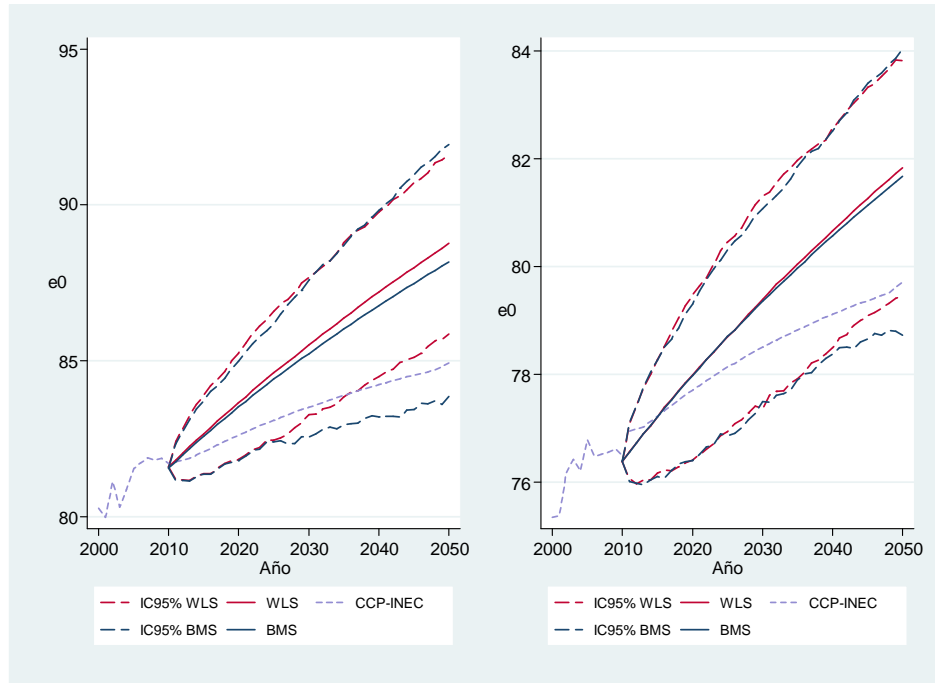
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de INEC-CCP.

Gráfica 7. Costa Rica. Proyección de la esperanza de vida al nacer, según año por sexo y método. Período 2011-2050



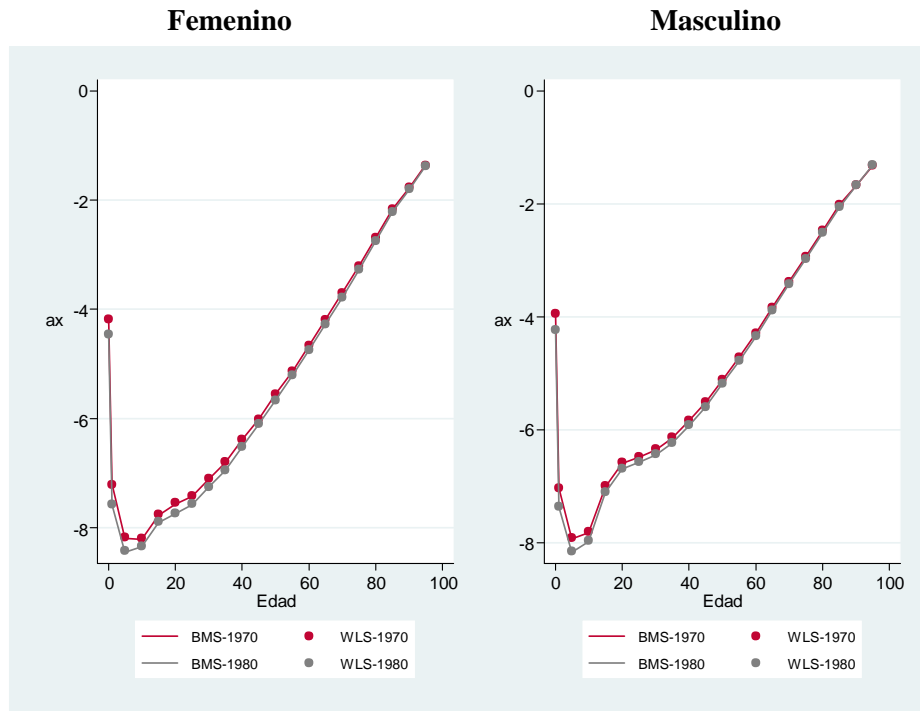
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de INEC-CCP.

Gráfica 8. Costa Rica. Proyección de la esperanza de vida al nacer, según año por sexo y tipo de método utilizado. Período 2011-2050
Femenino **Masculino**



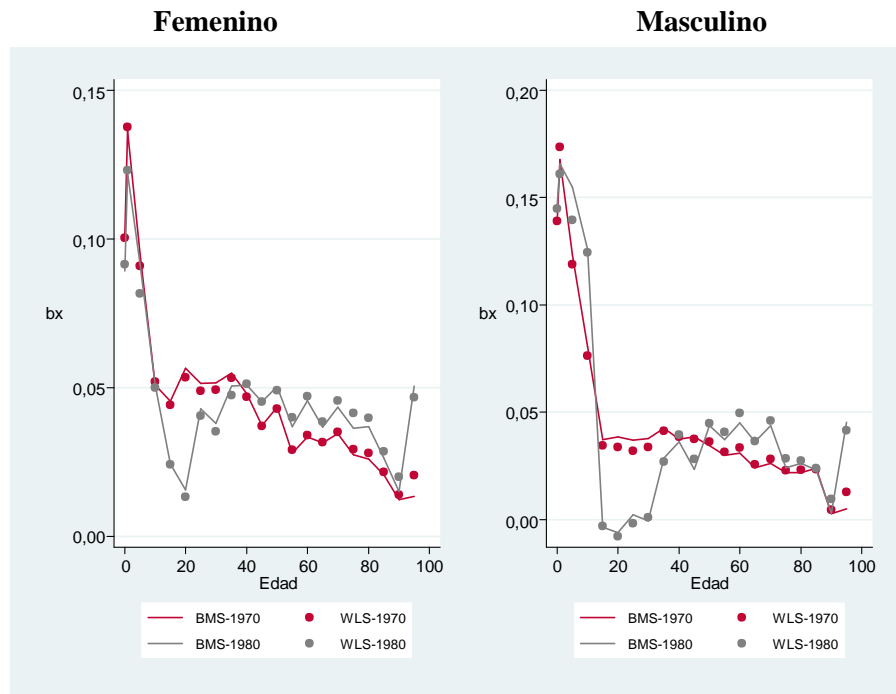
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de INEC-CCP.

Gráfica 9. Costa Rica. Valores \hat{a}_x por sexo, método y período de estimación según grupo de edad



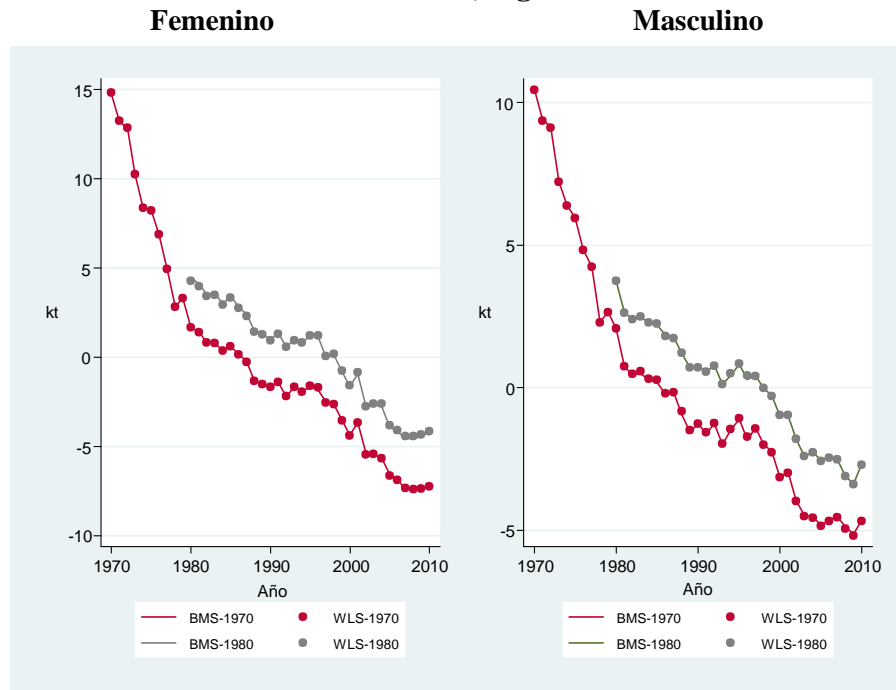
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

Gráfica 10. Costa Rica. Valores \hat{b}_x por sexo, método y período de estimación según grupo de edad



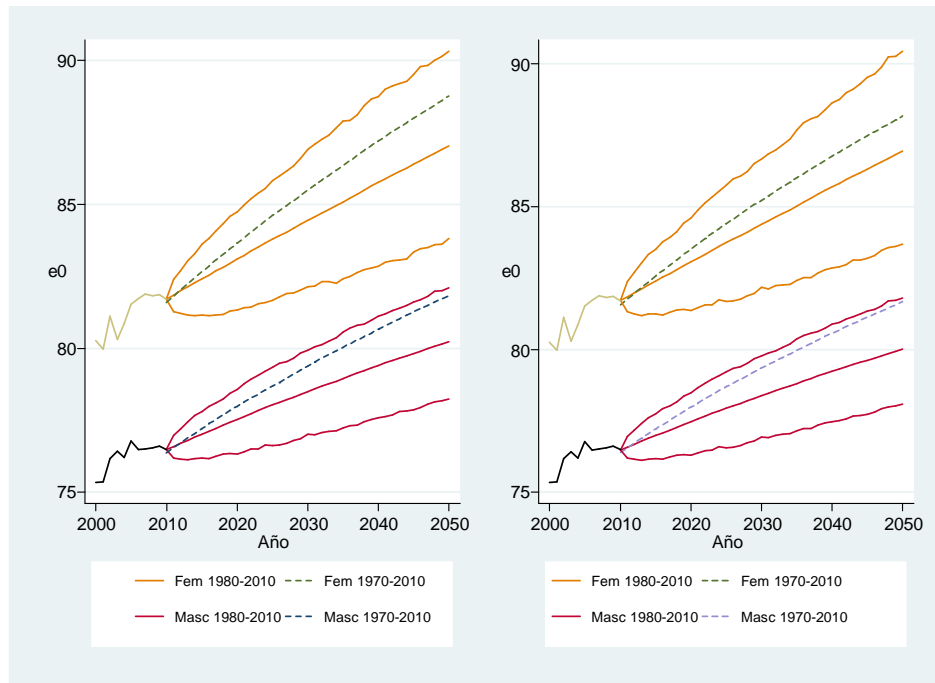
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

Gráfica 11. Costa Rica. Estimación del índice de mortalidad k por sexo, método y período de estimación, según año



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.

Gráfica 12. Costa Rica. Proyección de la esperanza de vida al nacer según año por sexo, método y período de estimación. Años 2011-2050
WLS BMS



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del INEC-CCP.