



Universidad Nacional
Faculta de Ciencias exactas y Naturales
Escuela de Matemática

El conocimiento didáctico de profesores en formación para analizar tareas que promuevan la competencia matemática escolar.

Trabajo Final de Graduación sometido a consideración del Tribunal Evaluador como requisito parcial para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Estudiante: *Melissa María Pérez Montero*

Comité Asesor:

Dr. José Romilio Loría Fernández, Tutor.
M. Sc. Jonathan Espinoza González, Asesor.
Dra. Carmen Gloria Aguayo Arriagada, Asesora.

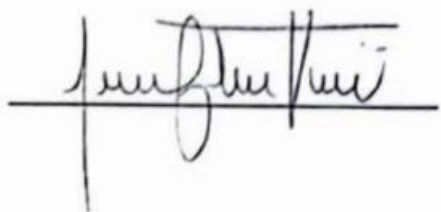
Campus Omar Dengo

Heredia, Costa Rica

Fecha (05/05/2024)

Este trabajo final de graduación ha sido aceptado y aprobado por el Tribunal Examinador de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, como requisito parcial para optar al grado de Licenciatura en la Enseñanza de las Matemáticas.

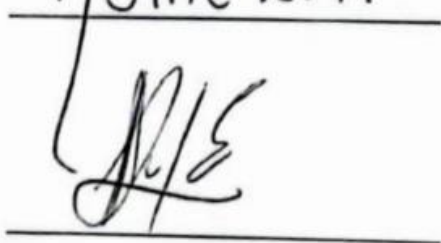
M.Sc. Jesennia Chavarría Vásquez
Representante del Decano
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



Dr. Gilberto Chavarría Arroyo
Representante de la Dirección
Escuela de Matemática




Dr. José Romilio Loría Fernández
Tutor

Romilio L.F.


M. Sc. Jonathan Espinoza González
Asesor.



Dra. Carmen Gloria Aguayo Arriagada
Asesora.



Bach. Melissa Pérez Montero
Estudiante

Tabla de contenido

CAPÍTULO I: Planteamiento de la investigación	7
1.1. Encuadre de la investigación	7
1.2. Antecedentes de la investigación.....	9
1.3. Pertinencia de la investigación	13
1.4. Objetivos de la investigación.....	15
1.5. Síntesis del capítulo	15
CAPÍTULO II: Marco Teórico	17
2.1. Perspectiva curricular del estudio	17
2.2. Tareas matemáticas escolares	19
2.3. La formación de profesores de matemáticas.....	25
2.4. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas.....	28
2.4.1 Conocimiento Matemático.....	29
2.4.2 Conocimiento Didáctico del Contenido.....	30
2.5. El profesor de matemática reflexivo	33
2.6. Balance del capítulo	36
Capítulo III: Marco Metodológico	39
3.1. Tipo de investigación.....	39
3.2. Diseño de la investigación	40
3.3. Fuentes de información.....	42
3.4. Instrumentos de recolección de información	44
3.5. Participantes de la investigación	45
3.6. La experiencia formativa	46
3.7. Análisis de la información	51

3.8. Categorías de análisis.....	54
3.8.1. Conocimiento Matemático (CM).....	55
3.8.2. Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC)	57
3.8.3. Vínculo entre elementos del análisis y categorías del MSTK	60
3.9. Balance del capítulo.....	62
CAPÍTULO IV: Resultados.....	64
4.1. Aplicación Guía Narrativa #1	64
4.2. Desarrollo del curso-taller.....	68
4.3. Guía Narrativa #2.....	73
4.4. Cambios en el conocimiento didáctico de los profesores en formación inicial	77
CAPÍTULO V: Conclusiones.....	79
5.1. Conclusiones	79
5.2. Cumplimiento de los objetivos de la investigación	80
5.3. Limitaciones del estudio	82
5.4. Líneas futuras de investigación.....	82
5.5. Recomendaciones	83
Referencias Bibliográficas.....	85
Anexos.....	96
Anexo 1	96
Anexo 2.....	102
Anexo 3.....	108
Anexo 4.....	109
Anexo 5.....	113
Anexo 6.....	157

Índice de Tablas

Tabla 2.1.	
<i>Niveles de reflexión para analizar tareas matemáticas escolares</i>	20
Tabla 2.2.	
<i>Procesos matemáticos considerados en el currículo costarricense</i>	23
Tabla 2.3.	
<i>Tipos de reflexión docente</i>	35
Tabla 2.4.	
<i>Niveles de reflexión docente</i>	35
Tabla 3.1.	
<i>Especificación de las etapas del diseño de la investigación</i>	44
Table 3.2.	
<i>Organización temporal de los contenidos</i>	48
Tabla 3.3.	
<i>Estructura de las sesiones</i>	49
Tabla 3.4.	
<i>Categorización del conocimiento matemático</i>	57
Tabla 3.5.	
<i>Categorización del Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático</i>	59
Tabla 3.6.	
<i>Operacionalización de las categorías según los instrumentos para recolectar los datos</i>	60
Tabla 3.7	
<i>Variables de tarea como indicadores del conocimiento didáctico</i>	61
Tabla 3.8	

<i>Variables presentes según las categorías</i>	63
Tabla 4.1	
<i>Variables de tarea como indicadores del conocimiento didáctico</i>	65
Tabla 4.2	
<i>Variables consideradas en el análisis de las tareas de la Guía Narrativa #1</i>	66
Tabla 4.3.	
<i>Variables consideradas en el análisis de las tareas de la Guía Narrativa #2</i>	74

Índice de Figuras

Figura 2.1.	
<i>Conocimientos profesionales en la formación de profesores</i>	27
Figura 2.2.	
<i>Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK)</i>	29
Figura 2.3.	
<i>Diferentes niveles de tareas en la formación de los profesores</i>	32
Figura 3.1.	
<i>Etapas de la investigación</i>	41
Figura 3.2.	
<i>Expectativa de cambios experimentados por los participantes</i>	51
Figura 3.3.	
<i>Ciclo de análisis de la información</i>	52
Figura 3.4.	
<i>Triangulación de fuentes de información</i>	54

CAPÍTULO I

Planteamiento de la investigación

La investigación que se plantea estudia los cambios en el conocimiento didáctico de un conjunto de profesores de matemática en formación inicial, a partir de su participación en una experiencia formativa sobre el análisis de tareas diseñadas para promover la competencia matemática escolar, con el fin de poder caracterizar este conocimiento. El foco de interés del estudio está en identificar y describir los conocimientos y las capacidades necesarias para que los profesores de matemáticas en formación inicial analicen tareas que promuevan el aprendizaje escolar.

En este capítulo se presenta el encuadre de la investigación, así como los antecedentes del estudio. Luego, se justifican el interés y la pertinencia del área problemática aproximada. Finalmente, se detallan el problema de investigación y los objetivos de estudio que se derivan de la problemática abordada.

1.1. Encuadre de la investigación

Esta investigación se ubica en el contexto de la reforma curricular en matemáticas en Costa Rica, por lo que se consideran los fines, los principios y las directrices de esta reforma para encuadrar el estudio. Los cambios que conlleva la reforma, interrelacionados entre sí, determinan los focos de interés que orientan este estudio: (1) la innovación curricular, centrada en la noción de competencia; (2) tareas matemáticas escolares como medio para el aprendizaje y (3) la formación de profesores, como promotores y gestores de los cambios curriculares.

En general se puede decir que las modificaciones introducidas en el currículo de matemáticas costarricense implican cambios importantes en la actividad de los profesores y por tanto en la formación, tanto inicial como continua. En este sentido, se deben replantear y modificar las competencias de los profesores para proyectar la enseñanza, para implementar lo planificado, para observar, gestionar y orientar el aprendizaje de los alumnos, y también de su competencia como evaluadores (Gil, 1999).

De manera específica, el primer foco de interés que contempla este estudio procede desde una perspectiva curricular, derivada de la inclusión de nuevas expectativas de aprendizaje. Las

habilidades básicas provienen de un modelo funcional de enseñanza y aprendizaje, en el cual el dominio de los procesos matemáticos se evidencia por su uso eficaz en tareas contextualizadas (Loría, 2020).

El segundo foco de interés procede del marco teórico de la reforma curricular que sugiere promover las competencias matemáticas mediante un tipo definido de tareas matemáticas escolares, comprendidas como herramientas mediante las cuales los estudiantes pueden realizar actividades relacionadas con las matemáticas y que son planificadas por los maestros con la intención de fomentar el aprendizaje o como instrumentos para evaluar el mismo (Moreno y Ramírez, 2016).

En palabras de Stein y Smith (1998, p. 268), “una tarea se define como un segmento de la actividad de clase que se dedica al desarrollo de una idea matemática particular”, siendo esta “el principal vehículo para suministrar a los escolares oportunidades de aprendizaje” (Lupiáñez, 2013, p. 96). Este tipo de tareas son relevantes para los procesos de enseñanza y aprendizaje porque con ellas se pretende fomentar el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos y su progreso en el sistema educativo.

De esta forma, la selección que los profesores hacen de las tareas matemáticas desempeña un papel crucial en el aprendizaje de los estudiantes (Boston y Smith, 2009; Hiebert y Wearne, 1997; Henningsen y Stein, 1997; Kilpatrick, 2001; Sullivan *et al.*, 2013). Por tanto, la identificación, selección y análisis de las tareas matemáticas escolares son acciones de vital importancia para planificar la enseñanza (Niss, 2011; Steketee y McNaught, 2007).

El tercer foco de interés se relaciona con las funciones de los profesores, singularmente como promotores y gestores de los cambios curriculares. Los profesores necesitan durante su formación, inicial y permanente, desarrollar y afianzar una serie de conocimientos, capacidades y actitudes que le permitan promover la alfabetización matemática escolar (Loría, 2020). El análisis de tareas matemáticas escolares es parte relevante de la actuación profesional de los profesores para el desarrollo y evaluación de la competencia matemática (Caraballo, 2014).

En este contexto, las tareas matemáticas escolares deben ser consideradas en la formación de los profesores. En conjunto estructuran una unidad didáctica, concretan y organizan la gestión de la clase y posibilitan el logro de las expectativas de aprendizaje escolar (Loría, 2020). Además,

determinan en qué medida el profesor es experto en la planificación de tareas y en su secuenciación (Loría y Lupiáñez, 2019).

Los focos de interés descritos anteriormente muestran cuestiones que deben abordarse por diversas razones educativas y sociales: (1) el bajo rendimiento en Matemáticas, que se da de modo sistemático en cualquier prueba que se aplique a los estudiantes costarricenses (Programa Estado de la Nación [PEN], 2023); (2) la ampliación del ámbito de trabajo del profesor de matemáticas, derivada de la consideración de la competencia matemática escolar, que fundamentan los cambios curriculares (Gil y Vilches, 2006); (3) el papel central que desempeñan en el aprendizaje de los alumnos las tareas matemáticas y su secuenciación (Kilpatrick *et al.*, 2001; National Council of Teachers of Mathematics, 1991) y (4) la necesaria mejora del dominio técnico por parte del profesor en ejercicio relativo a características, funciones y variables de las tareas matemáticas escolares (Baartman *et al.*, 2004; Boston y Smith, 2009; Zaslavsky, 2008).

1.2. Antecedentes de la investigación

A partir de los focos de interés de estudio, se puede ubicar a la investigación en dos líneas de investigación en Educación Matemática: (1) Formación de Profesores de Matemáticas (Aguayo-Arraigada, 2018; Castellanos, 2017; Gil, 1999; Gómez, 2007; Ramos, 2014; Rico y Lupiáñez, 2008; Lupiáñez, 2009; Rojas, 2014; Valverde, 2012); y (2) Diseño, Desarrollo e Innovación del Currículo de Matemáticas (Cañadas, 2007; Molina, 2007; Rico *et al.*, 2011; Romero, 1997). En ambas líneas de investigación se han llevado a cabo investigaciones orientadas a estudiar el papel de las tareas matemáticas escolares en la formación de profesores, así como estudios sobre innovación y cambio curricular, antecedentes que sustentan esta investigación.

Prestando atención a aspectos más contextuales, en Costa Rica, con la aprobación de los actuales Programas de Estudio en Matemáticas en 2012 se inicia un proceso de reforma curricular amplia y profunda, que introdujo un conjunto de cambios en los paradigmas que se venían manejando en la enseñanza de la disciplina. Para Ruiz (2019), los principales cambios introducidos en el currículo costarricense son: (1) El desarrollo consciente de cinco capacidades superiores (procesos matemáticos) en la mediación pedagógica, en la evaluación de aula y en las pruebas nacionales; (2) La integración de habilidades (específicas y generales) en toda la acción educativa; (3) Los cinco ejes curriculares (resolución de problemas, contextualización activa, potenciar actitudes y creencias positivas, uso inteligente de tecnologías, y uso de Historia de las

Matemáticas) que dan un orden de prioridades al currículo, y potencian e integran diversas acciones que están dispersas inevitablemente en este; y (4) Cada una de las áreas matemáticas (Números, Medidas, Geometría, Relaciones y álgebra y Estadística y probabilidad) se consideran con enfoques didácticos específicos.

Con respecto a esto, en el actual Estado de la Educación (PEN, 2023) se recomienda fortalecer el dominio de los programas de estudio en los profesores en cuanto: el enfoque curricular, las habilidades generales y específicas, los procesos matemáticos, la estrategia metodológica principal, la organización de las lecciones (según las etapas y momentos), los ejes disciplinares y los niveles de complejidad en las tareas asignadas. Además, se sugiere promover cursos de capacitación, presenciales o en línea, que le permitan al profesor mantenerse actualizado sobre temáticas como: la resolución de problemas como estrategia metodológica, experiencias exitosas acerca de la implementación de los programas, uso de tecnologías, didácticas específicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por su parte, Beckmann *et al.* (2004) sugieren que la reforma a un currículo escolar también implica modificaciones a los programas de estudio de las universidades encargadas de desarrollar las competencias profesionales de los profesores que gestionan e implementan el nuevo currículo. Asimismo, aseguran que el proceso de formación docente se ve fortalecido a través del planteamiento y análisis de tareas matemáticas escolares que profundicen en el abordaje didáctico de los contenidos matemáticos.

A partir de las ideas expuestas en los párrafos anteriores, surge la necesidad de abordar en este estudio la caracterización del conocimiento didáctico de un conjunto de profesores de matemática en formación inicial, a partir de su participación en una experiencia formativa sobre el análisis de tareas diseñadas para promover la competencia matemática escolar, según los fundamentos que sustentan el currículo de matemáticas en Costa Rica.

Para Sánchez (2011), el diseño y el análisis de tareas matemáticas escolares constituyen temas muy llamativos en las agendas actuales de investigación, sobre todo en el campo de la formación de profesores. En este sentido, las tareas matemáticas escolares son vistas bajo dos perspectivas: como tarea matemática escolar (TME), base para el aprendizaje de los alumnos, y como tarea formativa profesional (TFP), utilizada en la formación de profesores (Aguayo-Arraigada, 2018). Para Tirosh y Woods (2008), estas tareas se diferencian por los agentes a quien

están dirigidas y los sistemas educativos en que se plantean. Por tanto, cuando una tarea matemática escolar se aplica en la formación inicial de profesores, no solo se debe enfatizar en el contenido matemático, sino que a su vez se deben incorporar cuestiones de didáctica de la matemática (Liljedahl *et al.*, 2007). Como se ha mencionado anteriormente, en este estudio se prestará atención a los elementos didácticos que deben ser considerados para el análisis de las tareas.

En esta línea, Watson y Mason (2007) argumentan que hay tres formas de abordar las tareas matemáticas escolares en experiencias de formación con profesores: (1) Utilizarlas para “comprender el conocimiento matemático de los alumnos; (2) Utilizar tareas para desarrollar la propia conciencia matemática de los docentes, así como el desarrollo de habilidades vinculadas a los dominios didácticos propios de la disciplina; y (3) Utilizar tareas para pensar cómo las diferentes formas de enseñanza ofrecen diferentes posibilidades de aprendizaje matemático” (p. 212).

Para esta investigación, las tareas serán utilizadas como mecanismos que promuevan en los profesores en formación inicial los conocimientos y las capacidades didácticas necesarias para la selección de oportunidades de aprendizaje óptimas en el desarrollo de la competencia matemática escolar. García y Torres (2014) afirman que la formación inicial de los docentes es crucial en el logro de las competencias matemáticas escolares que se desean promover en el aula. Por lo tanto, las tareas matemáticas escolares constituyen uno de los ejes principales de la formación inicial de los profesores de matemática (Clarke *et al.*, 2009; Climent *et al.*, 2014; Tirosh y Woods, 2008).

Según Flores (2007) cada profesor en formación es un ser único, el cual se está transformando continuamente, por lo que todos son diferentes y con esto el deber de los formadores de profesores de matemática es fomentar en ellos la competencia de ser críticos y reflexivos; para esto es esencial saber cuáles son los conocimientos que tienen dichos sujetos.

En su investigación con profesores en formación, Gallart *et al.* (2014) fomentan la reflexión docente por medio del análisis de tareas que promuevan el uso y el planteamiento de modelos matemáticos. Avalo *et al.* (2012), sostienen que el análisis de tareas es una herramienta oportuna para desarrollar la reflexión docente, este tipo de estrategia les permite “reflexionar sobre la

coherencia entre los objetivos formativos que proponen a sus estudiantes y las actividades escolares que implementan para alcanzar tales objetivos” (p. 96).

Para Araújo, De Oliveira y De Albuquerque (2018) la reflexión docente es una competencia profesional que puede ser desarrollada cuando los profesores trabajan en conjunto, tanto al analizar sus propias prácticas educativas como las prácticas de los demás compañeros, durante su quehacer diario o bien por medio de experiencias de desarrollo profesional. En este sentido, Gómez (2007) plantea que en las experiencias formativas con las que se espera desarrollar la reflexión docente deben priorizarse los trabajos en grupo, las prácticas colaborativas y las discusiones, además se “debe partir de una visión funcional de tal forma que los conocimientos del profesor sean una consecuencia del análisis y descripción de las actividades que él debe realizar para planificar, gestionar y evaluar la instrucción” (p. 103).

Una estrategia para fomentar la reflexión en los docentes, según Castellanos (2017) es plantear como principal objetivo la comprensión de problemas profesionales, los cuales permitan “dar sentido al conocimiento profesional, planteándolo de manera funcional, con vistas a comprender mejor los problemas planteados” (p. 183). De esta manera, la reflexión que los docentes hacen tiene sentido para ellos. Madrigal (2009) afirma que los problemas profesionales que se plantean deben reflejar la forma en la que se concibe la educación en la actualidad, por tanto, concluye que el docente de matemáticas debe formarse desde un enfoque por competencias, en donde no solo se enseñe matemáticas, además debe contar con un conjunto de herramientas didácticas que le permitan poner en práctica todos los conocimientos aprendidos durante su formación.

En términos generales, la experiencia formativa que se ha implementado en esta investigación toma como base el marco teórico del currículo de matemáticas en Costa Rica y el conocimiento inicial que han manifestado los profesores participantes sobre los elementos didácticos que se deben considerar en el análisis de tareas que promuevan el desarrollo de la competencia matemática escolar. En consecuencia, las actividades de desarrollo profesional se han orientado de modo que les permita a los profesores participantes reflexionar sobre sus prácticas y las prácticas de sus colegas, a partir del planteamiento de problemas profesionales, el trabajo colaborativo y ejercicios de debate y discusión.

Finalmente, la investigación se enmarcó en el proyecto denominado “Conocimiento especializado del profesor de matemática para la enseñanza de los conceptos básicos de función desde la mirada profesional de situaciones de enseñanza”. Este proyecto profundizó y dio continuidad al estudio de las competencias profesionales del profesor realizado por un grupo de investigadores de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. De esta manera, para este estudio, se utiliza un sistema de categorías basado en el marco teórico del proyecto de investigación mencionado anteriormente (Ball *et al.*, 2008; Jacobs *et al.*, 2010; Llinares, 2016; Mason, 2002; Morris *et al.*, 2009; Sherin *et al.*, 2010), para analizar e interpretar los cambios en los conocimientos didácticos de los profesores participantes en la experiencia formativa sobre el análisis de tareas que promuevan el desarrollo de la competencia matemática escolar.

1.3. Pertinencia de la investigación

La orientación de los fines y principios de la reforma curricular hacia la mejora de la calidad del sistema educativo y del rendimiento escolar de los alumnos, destaca la importancia del papel del profesor y su responsabilidad por alcanzar los objetivos de mejora pretendidos (Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012). Para que los profesores interpreten y comprendan la naturaleza y el propósito de la introducción de la competencia matemática como una innovación curricular, deben buscar los mecanismos necesarios que les permitan desarrollar conocimientos didácticos y de prácticas docentes orientadas a gestionar la enseñanza, el desarrollo y la evaluación de esta competencia (Loría, 2020).

Atender las directrices del currículo costarricense reformado requiere que los profesores reflexionen sobre sus prácticas actuales y realicen los cambios y ajustes necesarios para adaptarse a las nuevas orientaciones. El éxito o fracaso de una reforma curricular depende de la implementación que cada profesor haga de ella en su respectivo centro educativo (Hall y Hord, 2001). Será exitosa en cuanto los profesores conozcan su alcance y se involucren activamente en el desarrollo e implementación de las directrices establecidas (Leander y Osborne, 2008; Luttenberg *et al.*, 2013).

La respuesta a esas directrices curriculares requiere, a su vez, orientación y desarrollo profesional que capacite a los profesores para enseñar matemáticas de manera integrada. Esta investigación con profesores en formación inicial se centra en sus conocimientos didácticos y

capacidades sobre el análisis de tareas matemáticas para desarrollar la competencia matemática general, es decir, el aprendizaje de conocimientos y el desarrollo de habilidades por los estudiantes a largo plazo.

El desarrollo de la competencia matemática depende del conocimiento del profesor y de su habilidad para analizar y seleccionar tareas que movilicen los procesos matemáticos fundamentales como razonar, argumentar, plantear y resolver problemas. Se espera brindar a los profesores un marco referencial como apoyo para profundizar o aprender sobre el análisis de tareas dirigidas a promover la competencia matemática. Se espera que, conforme los profesores dominen el marco referencial, se generen cambios en sus prácticas docentes para analizar tareas con ese propósito. Esta expectativa se apoya en la convicción de que, al reflexionar sobre su propia práctica, los profesores analizan y determinan qué tipo de ajustes resultan necesarios para enseñar de acuerdo con las directrices impuestas por la reforma curricular. A medida que reflexionen sobre su práctica de analizar tareas, los profesores deben de efectuar cambios importantes dirigidos a mejorar su competencia profesional de planificación de la enseñanza.

En este sentido, los resultados esperados serán de interés desde varias perspectivas. Desde un punto de vista teórico se pretende investigar qué aspectos deben atenderse para que los profesores adquieran destrezas necesarias para ajustar sus prácticas a las demandas curriculares, particularmente se espera fomentar y profundizar el conocimiento sobre tareas matemáticas escolares y su papel en la planificación de la enseñanza y la gestión del aula.

A partir del encuadre teórico establecido, se espera proponer una actividad de formación, en la modalidad de taller, encaminada a desarrollar en los profesores en formación su competencia profesional para analizar tareas adecuadas dirigidas a promover la competencia matemática escolar. El diseño del taller como un recurso de formación es el principal aporte de la investigación desde una perspectiva metodológica.

Finalmente, el principal aporte práctico de la investigación consiste en contribuir a la maduración del conocimiento de los profesores en formación, otorgando herramientas que ayuden a mejorar sus habilidades profesionales para el análisis de tareas que promuevan la competencia matemática.

1.4. Objetivos de la investigación

A partir de los apartados descritos anteriormente, se tiene que esta investigación analiza los cambios en el conocimiento didáctico de un grupo de profesores en formación inicial, después de analizar distintas tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar. Este cambio se efectúa durante su participación en un taller, como experiencia formativa, centrado en las variables de tarea del marco conceptual que sustenta la reforma curricular de las Matemáticas en Costa Rica.

Como pregunta de investigación se plantea la siguiente:

¿Qué conocimientos didácticos requieren los profesores en formación inicial para analizar tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar en los alumnos?

La pregunta de investigación orienta el objetivo general: Caracterizar el conocimiento didáctico, sobre el análisis de tareas diseñadas para promover la competencia matemática escolar, que desarrollan profesores en formación inicial a partir de su participación en una experiencia de desarrollo profesional. Este objetivo, a su vez, guía los objetivos específicos siguientes:

1. Establecer los conocimientos didácticos necesarios para el análisis de tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar, según los requerimientos establecidos en el currículo de matemática costarricense.
2. Describir los conocimientos didácticos, sobre el análisis de tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar, que tienen profesores en formación inicial.
3. Explicar los cambios en los conocimientos didácticos de profesores en formación inicial, sobre el análisis de tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar, luego de su participación en una experiencia formativa.

1.5. Síntesis del capítulo

El profesor juega un rol sobresaliente en el alcance de los objetivos de mejora para el sistema educativo costarricense que se establecen con los principios de la reforma curricular en Matemáticas. No obstante, para que los profesores interpreten y comprendan la naturaleza y el propósito de la introducción de la competencia matemática como una innovación curricular, deben

contar con los mecanismos necesarios que les permitan desarrollar conocimientos didácticos y prácticas docentes orientadas a gestionar la enseñanza y a desarrollar esta competencia.

En este sentido, los docentes deben reflexionar sobre los conocimientos que han desarrollado durante su formación, y realizar los cambios y ajustes necesarios para adaptar las prácticas aprendidas a la realidad de aula. El éxito o fracaso de una reforma curricular depende de la implementación que cada profesor haga de ella en su respectivo centro educativo. Será exitosa en cuanto los profesores conozcan su alcance y se involucren activamente en el desarrollo e implementación de las directrices establecidas.

De esta manera, se debe capacitar a los docentes en formación inicial para enseñar matemáticas de manera integrada, mediante la selección, el análisis y el diseño de tareas que promuevan la competencia matemática escolar. Este estudio con profesores en formación inicial se centra en sus conocimientos didácticos sobre el análisis de tareas a partir de la aplicación de las directrices curriculares de Costa Rica.

Con la experiencia formativa que se desarrolló y que se describe en esta memoria, se pretendía brindar un marco referencial como apoyo a los profesores en formación inicial para que profundicen o aprendan sobre los elementos didácticos que se deben considerar en el análisis de tareas matemáticas escolares. Se esperaba que conforme los profesores reflexionaran sobre su formación y dominaran el marco referencial expuesto, se generarían cambios en sus prácticas para analizar tareas y, a largo plazo, tener un impacto positivo en el aprendizaje de sus futuros estudiantes.

CAPÍTULO II

Marco Teórico

Esta investigación centra su atención en tres focos, derivados de los principales cambios introducidos y regulados por la reforma curricular de las Matemáticas en Costa Rica: (1) innovación curricular y noción de competencia; (2) tareas matemáticas escolares como medio para el aprendizaje y (3) formación de profesores de matemáticas como promotores y gestores de los cambios curriculares. Estas prioridades orientan la estructura de este capítulo.

Se describen aquí los fundamentos teóricos conceptuales que dan sustento a la investigación. El marco teórico que se desarrolla consiste en tres categorías principales: la perspectiva curricular del estudio, las tareas matemáticas escolares y la formación de profesores de matemáticas. Se destaca que la literatura consultada permitió clarificar las ideas que enmarcan el estudio y aproximarse a la problemática planteada en el capítulo anterior. Se finaliza este capítulo con un balance del marco conceptual.

2.1. Perspectiva curricular del estudio

La reforma curricular de las Matemáticas en Costa Rica, aprobada en el año 2012, marca una evolución de las orientaciones educativas costarricenses mediante la incorporación de la noción de competencia como componente integral del currículo.

Rico (1997) concibe el currículo como “toda actividad que planifique una formación” (p. 28). Bajo esta perspectiva, en la que formación y actuación educativa son aspectos que constituyen el currículo, el profesor representa el principal responsable de implementarlo tanto como plan de formación que como plan de actuación en el aula. Los profesores de matemáticas deben conocer, comprender y poner en práctica el currículo de su disciplina; este constituye una herramienta para su quehacer aúlico, aporta comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como criterios para tomar decisiones con su gestión diaria (Loría y Lupiáñez, 2019).

En cuanto a la noción de competencia matemática escolar, esta se formula en relación con el uso de las Matemáticas para describir, comprender y actuar en diversos contextos de su realidad (MEP, 2012). En este sentido, la competencia matemática resulta un saber imprescindible para que los alumnos se desempeñen adecuadamente en el ambiente en que viven mediante su aplicación

oportuna. Esta caracterización de la competencia matemática responde y se ajusta al aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva funcional.

Según Caraballo (2014) el modelo funcional del aprendizaje matemático se centra en cómo los alumnos aplican los conocimientos adquiridos mediante los contenidos curriculares para enfrentarse a situaciones de la vida real que le son familiares. También afirma que este modelo está conformado por tres dimensiones: “tareas contextualizadas, herramientas conceptuales y las capacidades del sujeto cognitivo que trabaja” (p. 43). El sujeto cognitivo usa las herramientas que tiene a su disposición para aproximarse a las tareas, movilizándolo y manifestando su competencia al efectuar los correspondientes procesos cognitivos (Rico y Lupiáñez, 2008). Esto implica el uso y la aplicación del conocimiento sobre conceptos matemáticos básicos a situaciones que lo requieran.

Desde esta perspectiva, el principal objetivo del currículo costarricense de matemáticas es fortalecer las capacidades cognoscitivas matemáticas (habilidades específicas y habilidades generales) de los estudiantes, en contextos que permitan al alumno familiarizarse con la disciplina (contextualización activa), y de esta manera se forje una vocación de la competencia matemática que aspire construir capacidades ciudadanas que contribuyan al progreso del país. Por lo tanto, se establece un modelo pedagógico centrado en la estrategia metodológica de Resolución de Problemas de forma activa por parte de los estudiantes, donde ocurra un “paso desde lo concreto hacia lo abstracto” (MEP, 2012, p. 11).

Así, un problema es “un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos” (MEP, 2012, p. 475) que debe cumplir con los requisitos siguientes: (1) las ideas matemáticas pensadas por los estudiantes, así como las soluciones de los problemas, para enfrentar el problema, deben ser nuevas y no explicadas a priori por el docente; y (2) los conceptos o los procedimientos matemáticos por enseñar deben ser afines al contexto del problema propuesto.

Esta visión de la educación matemática obliga a un planeamiento cuidadoso de las lecciones, involucrando el análisis y la selección de los problemas o tareas, los tiempos a destinar para cada paso, y la acción docente en cada momento (MEP, 2012).

2.2. Tareas matemáticas escolares

Una tarea matemática escolar es “una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para la evaluación del aprendizaje” (Moreno y Ramírez, 2016, p. 244). Las propuestas que no contemplan expectativas de aprendizaje, explícitas o implícitas, y cuyo resultado el profesor no pueda utilizar para evaluar sus logros, quedan excluidas de esta consideración (Caraballo *et al.*, 2011).

Para Gallart, *et al.* (2014, p. 329) las tareas matemáticas deben:

- Ser auténticas, con datos reales, relevantes en alguna situación real, y que hagan posible el uso de la experiencia de los alumnos. Por ello, el contexto se corresponderá con su entorno escolar.
- Ser abiertas, sin una solución estipulada de antemano.
- Promover la reflexión crítica y el debate entre los alumnos.
- Abarcar el proceso completo de modelización (todas las fases del ciclo).
- Promover el trabajo tanto con información matemática como no matemática, interpretando y validando los resultados en el contexto en que se sitúa el problema.
- Ser trabajadas en pequeños grupos de dos o tres alumnos.

De esta manera, el proceso de instrucción implica por parte del profesor la invención, diseño, análisis, selección y secuenciación de tareas escolares que le permitan al alumno ampliar sus conceptos matemáticos. Las tareas escolares que se proponen deben llevar al alumno a involucrarse significativamente con las matemáticas y proveer el contexto intelectual para el desarrollo de su competencia matemática (Chapman, 2013; Sanni, 2012).

Por su parte, Sullivan *et al.* (2013) aseguran que “el conocimiento que tiene un profesor se refleja en la manera como analiza, selecciona, elabora y usa las tareas en la sala de clase” (p. 15). Destacan la importancia de evitar dar por sentado que los profesores son capaces de traducir una tarea en una experiencia significativa de aprendizaje para los alumnos sin que reciban algún tipo de desarrollo profesional como apoyo; resulta crítico dar atención a aquellos aspectos del conocimiento especializado que puedan apoyar el análisis, la selección y el uso efectivo de tareas (p. 18).

En este sentido, Gómez (2012) señala que en la formación inicial de los profesores se espera que estos desarrollen cierto nivel de reflexión para analizar tareas escolares. Leone y Johnson (1991), citado por Orozco-Hormaza (2000), proponen un método de reflexión sobre tareas matemáticas escolares estructurado en cuatro niveles de análisis. En la Tabla 2.1. se describen los niveles de análisis establecidos en el método de Leone y Johnson.

Tabla 2.1.

Niveles de reflexión para analizar tareas matemáticas escolares

Niveles de análisis	Definición
Objetivo	Consiste en describir las características estructurales y sustantivas de la tarea, con la finalidad de comprender su complejidad.
Subjetivo	Permite la descripción del proceso de solución de la tarea desde el punto de vista de los sujetos que se enfrentan a la solución de esta.
Ultrasubjetivo	Este nivel realiza una recopilación de los esquemas y procesos utilizados por el alumno en momento exacto al resolver la tarea.
Metasubjetivo	Pretende lograr un análisis del desarrollo cognitivo de los estudiantes, con el fin de realizar una interpretación que conceda la modelización del comportamiento del alumno.

Nota: Tomado de Orozco-Hormaza (2000, pp. 140-143); Otárola (2007, pp. 22-23)

Para efectos de este estudio se consideran los niveles de reflexión objetivo y subjetivo como referencia para analizar tareas matemáticas escolares. De esta forma, un estudio metódico de las tareas, por medio del análisis de algunas de sus variables, permite comprenderlas mejor y decidir sobre su ajuste a las expectativas de aprendizaje planificadas y a las características de nuestros alumnos (Moreno y Ramírez, 2016).

Carballo (2014, p. 60) señala que para analizar tareas es necesario enumerar los componentes que las constituyen:

- a. Un resultado, meta o finalidad. El resultado inmediato que se espera.
- b. Un conjunto de recursos disponibles. Incluye la metodología, materiales, distribución del tiempo, organización del aula, agrupamiento de los alumnos.
- c. Un conjunto de operaciones que se aplican a los recursos para lograr la meta.
- d. Un contenido matemático que la sustenta. Implica interrelacionar los conocimientos nuevos adquiridos y los nuevos.
- e. Una situación de aprendizaje o contexto en que se propone su acción.

- f. Complejidad o demanda cognitiva de la tarea.
- g. Competencia que pretende promover la tarea.

Para esta investigación se ha elegido prestar atención a tres variables de tarea, pues se encuentran en concordancia con la perspectiva funcional del aprendizaje matemático; visión que sustenta el currículo de matemáticas costarricense. Estas variables son: el contenido matemático, las situaciones y el nivel de complejidad de la tarea.

El *contenido matemático* se considera constituido por ideas integradoras que se estructuran alrededor de diferentes fenómenos y que se organizan mediante conceptos, habilidades y estructuras matemáticas (Moreno y Ramírez, 2016). El MEP (2012) considera cinco áreas matemáticas para categorizar los contenidos, a saber: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra, Estadística y Probabilidad.

En términos generales, el grado en que una persona estudiante ha desarrollado su competencia matemática corresponde al logro de un conjunto de capacidades denominadas habilidades matemáticas, estas se encuentran asociadas directamente con cada una de las áreas matemáticas (Ruiz, 2017). Las capacidades generadas a corto plazo, y que se logran a través de problemas matemáticos, se denominan habilidades específicas; mientras que la generalización de este tipo de habilidades da paso a las habilidades generales (MEP, 2012). Cabe resaltar que existen diversas habilidades para cada una de las áreas matemáticas, que se proponen en los programas de estudio, como por ejemplo las habilidades aritméticas, algebraicas, geométricas entre otras.

Como se ha mencionado anteriormente, el enfoque de enseñanza-aprendizaje que fundamenta el currículo de matemáticas costarricense pretende que los estudiantes sean matemáticamente competentes. Para ello es necesario desarrollar habilidades que conduzcan al fomento de capacidades para enfrentar múltiples situaciones en diversos contextos.

Las *situaciones* permiten al estudiantado ubicar la tarea propuesta en un entorno conocido (Loría, 2020). Obviar este mecanismo provoca que los estudiantes enfrenten dificultades para resolver la tarea, debido a que la situación es uno de los componentes que establecen el sentido de un concepto o noción matemática (Castro-Rodríguez *et al.*, 2013). Para Moreno y Ramírez (2016) “las situaciones contribuyen a dotar de sentido a las tareas matemáticas escolares, muestran modos de uso, son indicadores de sentido y ayudan a profundizar sobre el mismo” (pp. 247-248).

Para el MEP (2012) las situaciones se agrupan en cinco categorías: matemáticas, personales, ocupacionales, sociales y científicas. Las últimas cuatro mantienen la formulación que hace la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE] (2016) en las pruebas Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA), aunque con una modificación: las tareas que se desarrollan enteramente dentro del mundo de las Matemáticas se excluyen de las tareas en situaciones científicas y se establecen en una categoría aparte. De esta manera, las situaciones pueden conceptualizarse así (Ruiz, 2017, p. 75):

- a. *Matemáticas*. Se centran exclusivamente en conceptos y procedimientos que no salen del seno de las Matemáticas.
- b. *Personales*. Se refieren a las actividades de uno mismo, su familia o sus iguales. Por ejemplo: preparación de alimentos, compras, juegos, salud personal, transporte personal, deportes, viajes, programación personal, finanzas personales, entre otros.
- c. *Ocupacionales*. Se refieren al mundo del trabajo. Pueden relacionarse con cualquier nivel de la fuerza laboral, desde el trabajo no calificado hasta los niveles más altos de trabajo profesional.
- d. *Sociales*. El enfoque de los problemas está en la perspectiva de la comunidad, aunque los individuos están involucrados en todas las actividades que sucedan en la comunidad de manera personal. Por ejemplo: sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas públicas, demografía, publicidad, estadísticas nacionales, economía, entre otros.
- e. *Científicas*. Se refieren a la aplicación de las matemáticas al mundo natural y temas relacionados con la ciencia y tecnología. Por ejemplo: clima, ecología, medicina, ciencia espacial, genética, medición, entre otros.

Aunque las Matemáticas son una ciencia y sus problemas pueden ser considerados científicos, las últimas cuatro situaciones son visualizadas como referidas a aplicaciones de las Matemáticas, es decir, al uso de estas en entornos reales (Ruiz, 2017). El currículo busca promover estas situaciones en las diversas acciones de aula (MEP, 2012).

Por otro lado, no se puede hablar del *nivel de complejidad* de una tarea sin hablar antes de los procesos matemáticos. Estos, que no dependen de áreas matemáticas, expresan modos de actuación para resolver e interpretar problemas y el fomento de su puesta en juego conduce y

articula el desarrollo de habilidades matemáticas en el estudiantado (Ruiz, 2017). Es decir, los procesos matemáticos describen lo que hace el estudiantado para relacionar la situación en la que se enmarca una tarea con las matemáticas y, de ese modo, resolverlo (Loría, 2020).

El MEP (2012) considera cinco procesos matemáticos: “Razonar y argumentar”, “Plantear y resolver problemas”, “Conectar”, “Comunicar” y “Representar”; definidos con un significado muy próximo al adoptado en el marco del proyecto PISA (OCDE, 2012) para estos modos de actuación cognitiva. En la Tabla 2.2. se describe cada uno de ellos.

Tabla 2.2.

Procesos matemáticos considerados en el currículo costarricense

Proceso matemático	Descripción
Razonar y argumentar	Este proceso matemático trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en el plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos, justificaciones. Se busca potenciar capacidades para desarrollar y discutir argumentaciones matemáticas, para formular y analizar conjeturas matemáticas, para usar fórmulas o métodos matemáticos que permitan la comprensión o desarrollo de informaciones presentes
Plantear y resolver problemas	Este proceso matemático refiere al planteamiento de problemas en contextos reales y al diseño de estrategias para resolverlos. Se busca fomentar capacidades en torno a la identificación, la formulación, el desarrollo, la adecuación, el contraste y la valoración de métodos y estrategias para resolver problemas y modelos matemáticos
Comunicar	Este proceso matemático refiere a la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos al docente o a los otros estudiantes. Se busca potenciar la capacidad para expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica).
Conectar	Este proceso matemático refiere a la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas, además del desarrollo de acciones para identificar dentro de situaciones no matemáticas aquellas en las cuales es posible un tratamiento matemático. De igual manera persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con distintos contextos
Representar	Este proceso matemático refiere a la organización, reconocimiento, interpretación y manipulación de las múltiples representaciones que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas y tabulares). También promueve la capacidad de pasar de una representación a otras, comprendiendo las ventajas y desventajas de cada una de estas en una situación específica.

Fuente: Programas de Estudio de Matemáticas (MEP, 2012, pp. 24-26)

Para Ruiz (2013), estos procesos matemáticos trabajan de manera integrada y provocan gradualmente las habilidades matemáticas, fortaleciendo a la vez la generación, a largo plazo, de

la competencia matemática escolar. El sentido de estos procesos matemáticos recae en: desarrollar el rigor y la capacidad matemática para la resolución de problemas; favorecer la aplicación, matematización o modelización de diferentes situaciones; y lograr mayores niveles analíticos en la justificación y argumentación matemática (MEP, 2012).

La complejidad de una tarea está determinada a partir de la estructura de intervención de los procesos matemáticos considerados, y se clasifican las tareas según el nivel de complejidad en (MEP, 2012, pp. 32-33):

- a. *Problemas de reproducción.* Son problemas relativamente familiares que demanden la reproducción de conocimientos ya practicados. Algunas tareas que se incluyen en este tipo de problemas son aquellas en las que se solicita conocer hechos, representar problemas comunes, reconocer objetos matemáticos equivalentes, identificar propiedades, realizar procedimientos rutinarios, aplicar algoritmos estándar, manipular expresiones con símbolos, fórmulas y cálculos sencillos, y resolver problemas rutinarios. Por ejemplo, resolver la ecuación $16x - 2 = 15x + 9$
- b. *Problemas de conexión.* Son problemas basados en capacidades que intervienen en el nivel de reproducción, pero van más lejos. Implican la conexión entre los diversos elementos del problema, en particular, entre distintas representaciones de la situación. Remite a la resolución de problemas que no son rutinarios pero que se desarrollan en ambientes familiares al estudiante. Por ejemplo, “Una pastelería vende queques en forma circular y con el mismo grosor en 2 tamaños: unos con diámetro de 20 cm. a 8000 colones, otros con diámetro de 30 cm. a 12 000 colones. ¿Con cuáles queques se obtiene una mejor oferta? Explique”.
- c. *Problemas de reflexión.* El elemento significativo de este tipo de problemas es la reflexión, realizada en ambientes que son más novedosos y contienen más elementos que los que aparecen en otro nivel de complejidad. Se plantea aquí la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. Se exige la participación de varios métodos complejos para su solución. Por ejemplo, “Un documental televisivo incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos. El Dr. Morales, un especialista

en sismología, afirmó: en los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Santa Eulalia es dos de tres. ¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del sismólogo?

- a) $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13$ por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la ciudad de Santa Eulalia.
- b) $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de San Eulalia en algún momento en los próximos 20 años.
- c) La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad de Santa Eulalia en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.
- d) No se puede decir lo que sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Justifique la su respuesta.

Un énfasis curricular que asume la resolución de problemas como su enfoque principal deberá de priorizar las tareas de conexión o reflexión sobre las de reproducción, ya que las primeros pondrán en movimiento más habilidades (MEP, 2012).

2.3. La formación de profesores de matemáticas

El papel que tiene el formador de formadores, en la formación, es de gran importancia, para la construcción del conocimiento y el desarrollo de capacidades que un profesional en educación matemática debe contar. La etapa como alumno contribuye al desarrollo de cada profesional, en esta época el docente en formación obtiene características que serán de gran influencia en su práctica educativa (Cardeñoso *et al.*, 2001).

Durante su formación inicial los profesores de matemática deberían desarrollar ciertas capacidades, que según Gómez (2012) son: (a) analizar cada tema del currículo con el que se trabaje, con el fin de poder producir material didáctico que les ayude a fomentar el desarrollo del aprendizaje de sus alumnos, (b) ser capaces de reproducir la información facilitada por otros docentes, (c) de igual manera, no basta con poder replicar la documentación encontrada, sino deben de ser capaces de organizar y relacionar lo que les ayuda tanto para su desarrollo profesional, como para el desarrollo del aprendizaje de sus estudiantes.

Por otro lado, es necesario distinguir que el conocimiento del docente gira en torno a dos ejes: aquel cuya preocupación es “cómo el futuro profesor, que no tiene experiencia docente, aprende a enseñar; y aquélla que centra su atención en el desarrollo profesional del profesor experimentado” (Gómez, 2007, p. 104)

Además, Ponte (2012) propone dos definiciones interesantes, recalca la diferencia entre formación y la formación de un profesional. Esta primera, hace referencia a lo que el autor describe como un movimiento “desde fuera hacia dentro”, el docente recibe los conocimientos que se le transmite en la academia, los analiza y saca provecho de ellos. A su vez, describe el desarrollo profesional como un proceso “desde adentro hacia fuera”, el papel del profesor se transforma, no es más un simple receptor, sino pasa a interpretarse como un conjunto de aspectos cognitivos, afectivos y relacionales.

De esta forma, Blanco *et al.* (1995) afirman que los profesores de matemática no solo son transmisores de información, sino, son mediadores, son las personas que transforman los conocimientos adquiridos, muchas veces abstractos, de forma que los estudiantes sean capaces de comprender las representaciones dadas por el docente.

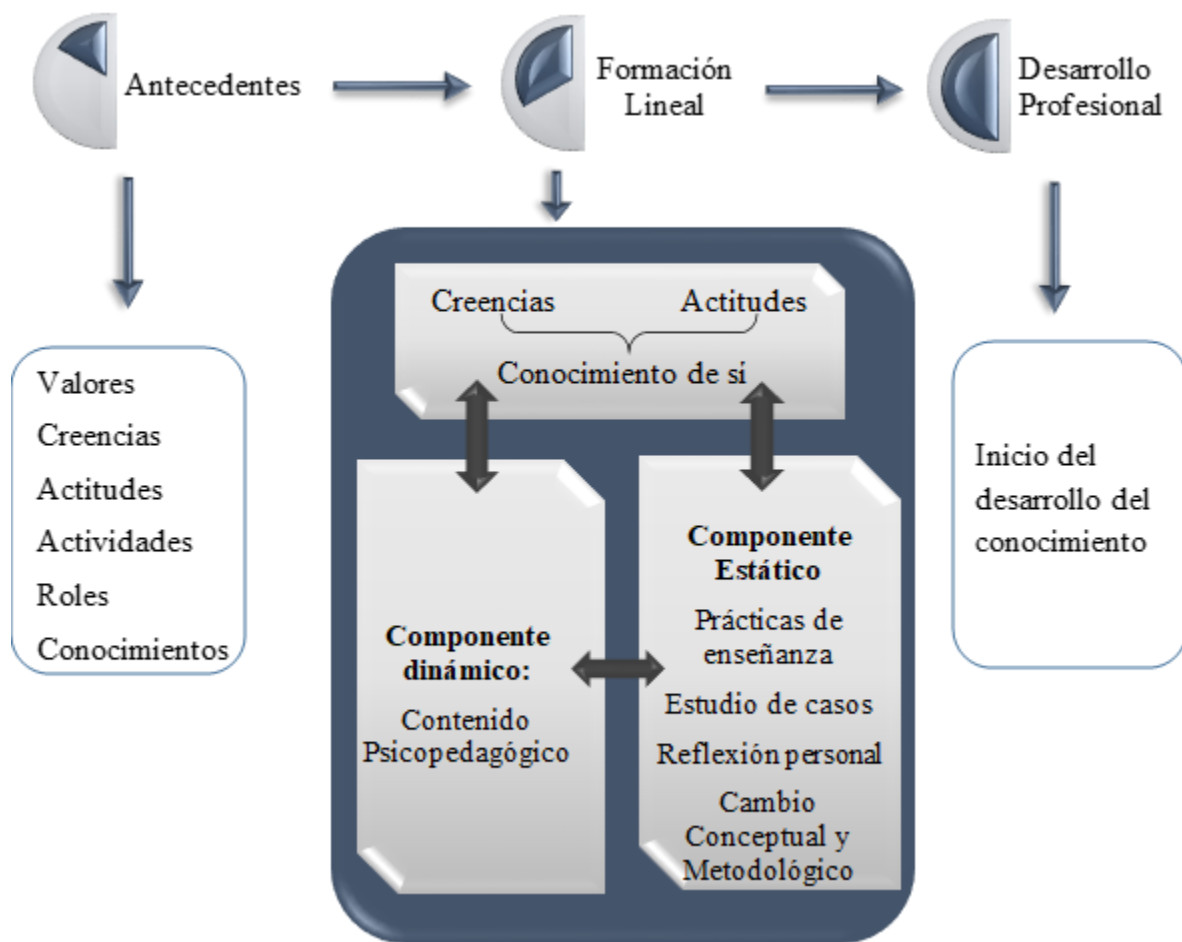
Por su parte, Blanco (1997) sostiene que la formación de los profesores atraviesa dos etapas, la estética y la dinámica. En la etapa estética el docente adquiere todos sus conocimientos base: los pedagógicos, los didácticos del contenido y los matemáticos. Estos conocimientos son adquiridos desde la niñez, las experiencias vividas y las actitudes y creencias adquiridas a lo largo de la vida de los profesores en formación, sin embargo, esta etapa no basta para el desarrollo completo de un profesional en educación, ya que la etapa estética del “profesor puede no afectar a su conocimiento práctico que es el que guía su conducta docente en el aula” (p. 35).

Es decir, lo que se aprende en la teoría rara vez es igual en la práctica; es acá donde entra la segunda etapa, la etapa dinámica, en la cual el docente pone en práctica todos los conocimientos desarrollados en la academia, también donde se construyen nuevos saberes y perfeccionan la capacidad de enfocarse en los estudiantes, en lo que es necesario para que estos aprendan de una manera adecuada (Blanco *et al.*, 1995; Blanco, 1997; Ivars *et al.*, 2016). Esto implica que, el proceso de formación no tiene un cierre, no culmina, ya que conforme el docente avanza en su práctica, avanza su aprendizaje.

La Figura 2.1. describe mediante un esquema las ideas que anteriormente se exponen sobre el proceso de formación del profesor de matemática. Presentado en tres etapas: la primera son los antecedentes, lo que forman el carácter del docente antes de iniciar la carrera en sí; la segunda etapa consiste en la formación profesional en la academia; por último, la tercera etapa que es el desarrollo profesional que, si bien es la última etapa, esta no llega a tener un final, ya que, el docente de matemática va desarrollando nuevas técnicas, conocimientos y capacidades a lo largo de su trayectoria laboral.

Figura 2.1.

Conocimientos profesionales en la formación de profesores



Nota: Adaptado de Blanco *et al* (1995)

Así, la formación de los profesores se ve como un proceso continuo que involucra la conducción de nuevas competencias, nuevos saberes que están identificados “por las dinámicas

sociales y colectivas, y depende en gran medida de las formas de articular intereses, necesidades y recursos del profesorado, así como del contexto profesional” (Ponte, 2012, p. 91).

Ahora, si bien esto es a nivel general, el docente de matemática necesita un desarrollo especializado, esta construcción del conocimiento conlleva no solo al saber de los contenidos, sino a la profundización de ellos, el profesor de matemática debe de estar instruido tanto en el ámbito de contenido matemático como el de contenido didáctico y pedagógico (Climent *et al.*, 2014). Por lo que, estas áreas deben ir de la mano para obtener un desarrollo profesional adecuado.

En este orden de ideas, se ha decidido abordar dos modelos innovadores en la formación de profesores de matemáticas. Considerar estos referentes teóricos es esencial para mejorar la calidad de la Educación Matemática y preparar a los profesores para enfrentar los desafíos actuales en el campo educativo, al mismo tiempo que permite clarificar cuestiones importantes relacionadas con la caracterización del conocimiento didáctico de los profesores que manifiestan al analizar tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar.

2.4. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

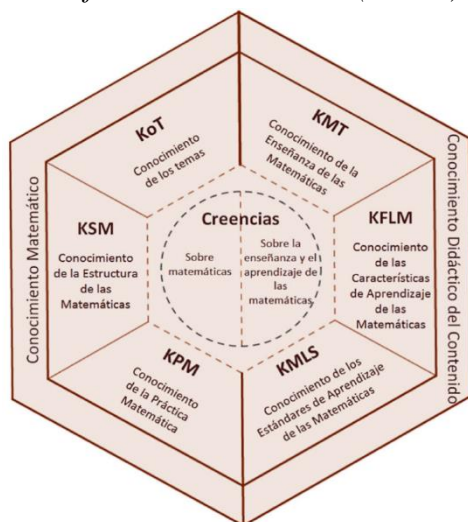
El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), está basado en el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MTK) de Ball *et al.* propuesto en el 2008. El MTSK se manifiesta como respuesta a algunos de los obstáculos encontrados en la metodología de Ball y colaboradores, por lo cual este modo de análisis aborda ciertos subdominios que en el MTK no se exploraron en profundidad (Flores-Medrano *et al.*, 2014).

Es así como, el MTSK realiza una exhaustiva investigación con el fin de analizar “cuál es el contenido del conocimiento del profesor, entendiendo que los modelos que se construyen no pretenden reflejar cómo se organiza el conocimiento del profesor, sino cómo puede enfocarse” (Climent *et al.*, 2014, p.43), por lo cual, este método se divide en dos grandes áreas que son Conocimiento Matemático y Conocimiento Didáctico del Contenido, los cuales a su vez derivan en varios subdominios (véase la Figura 2.2.).

Estos dominios y subdominios se describen a continuación. Es importante señalar que se destacará la descripción de los aspectos del conocimiento didáctico del contenido, pues es orientan el eje central de esta investigación.

Figura 2.2.

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK)



Nota: Tomado de Aguilar *et al* (2014)

2.4.1 Conocimiento Matemático

Este conocimiento se refiere al contenido matemático en sí, y se divide en tres subcategorías las cuales se basan en los conocimientos matemáticos que los sujetos poseen, estos subdominios y sus categorías son:

- *El conocimiento de los temas.* Este hace referencia a los conocimientos del docente acerca de los temas que va a enseñar, ya que no solo incluye a la matemática en sí, sino a la matemática escolar también, en donde tiene relevancia las definiciones y procedimientos que éste realiza (Flores-Medrano *et al.*, 2016; Sosa *et al.*, 2016). Según Flores-Medrano, *et al.* (2014) este conocimiento se caracteriza a partir de los siguientes indicadores: (1) Conocimiento sobre el sentido y modos de uso; (2) Conocimiento sobre propiedades y definiciones; (3) Conocimiento sobre representaciones; y (4) Conocimiento sobre procedimientos.
- *El conocimiento de la estructura matemática.* Este conocimiento hace referencia a las relaciones transversales que el docente crea sobre los distintos conceptos y contenidos que conoce, estos contenidos los puede estar estudiando con su clase o no (Flores-Medrano, *et al.*, 2016; Sosa, *et al.*, 2016). Este subdominio hace referencia a las conexiones que se dan entre los temas matemáticos tratados, el cual, según Flores-

Medrano, *et al.* (2014) se divide en tres categorías, que son: (1) Enlace potenciador; (2) Enlace transversal; (3) Enlace Instrumental.

- *El conocimiento de la práctica matemática.* Este conocimiento hace énfasis a la parte del desarrollo lógico que tiene el profesor, los conocimientos de cómo se genera el contenido matemático que está enseñando, hace alusión a la demostración matemática, la forma en la que procede a desarrollar distintos tipos de ejercicios (Flores-Medrano, *et al.*, 2016; Sosa, *et al.*, 2016). Este subdominio tiene cinco categorías, según Flores-Medrano, *et al.* (2014) estas son: (1) Planificación en el proceder de la resolución de problemas matemáticos; (2) Formas de validación y demostración; (3) Uso del lenguaje formal; (4) Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación); (5) Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

2.4.2 Conocimiento Didáctico del Contenido

Esta dimensión hace referencia a los conocimientos que pone en juego el docente en su quehacer de aula, “estas características le atribuyen un papel importante dentro de la conformación del conocimiento profesional” (Flores-Medrano *et al.*, 2014, p. 79). Es decir, corresponde al conocimiento específico que requiere el docente de matemática del contenido de la enseñanza y que además es la base necesaria para que el proceso de enseñanza sea eficaz (Carrillo *et al.*, 2018).

En otras palabras, se puede entender como el conocimiento que necesita el docente para saber cómo impartir los temas que se deben estudiar, de una manera clara y comprensible a sus educandos. Tiene sentido que este dominio se considere dentro del MTSK, ya que una de las principales labores de un profesor es impartir el conocimiento a sus estudiantes y enseñarles la utilidad de este en su vida cotidiana.

Otro aspecto importante para considerar es que el cuerpo teórico de este subdominio es compartido con los conocimientos matemáticos, pero se enfoca más en cómo desarrollar los temas en las lecciones de matemáticas, contrario a lo establecido en la dimensión del contenido matemático (Escudero, 2015).

Este conocimiento se divide en tres subcategorías las cuales se basan en reconocer el conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido como objeto de aprendizaje, a continuación, se presentan los tres subdominios y categorías:

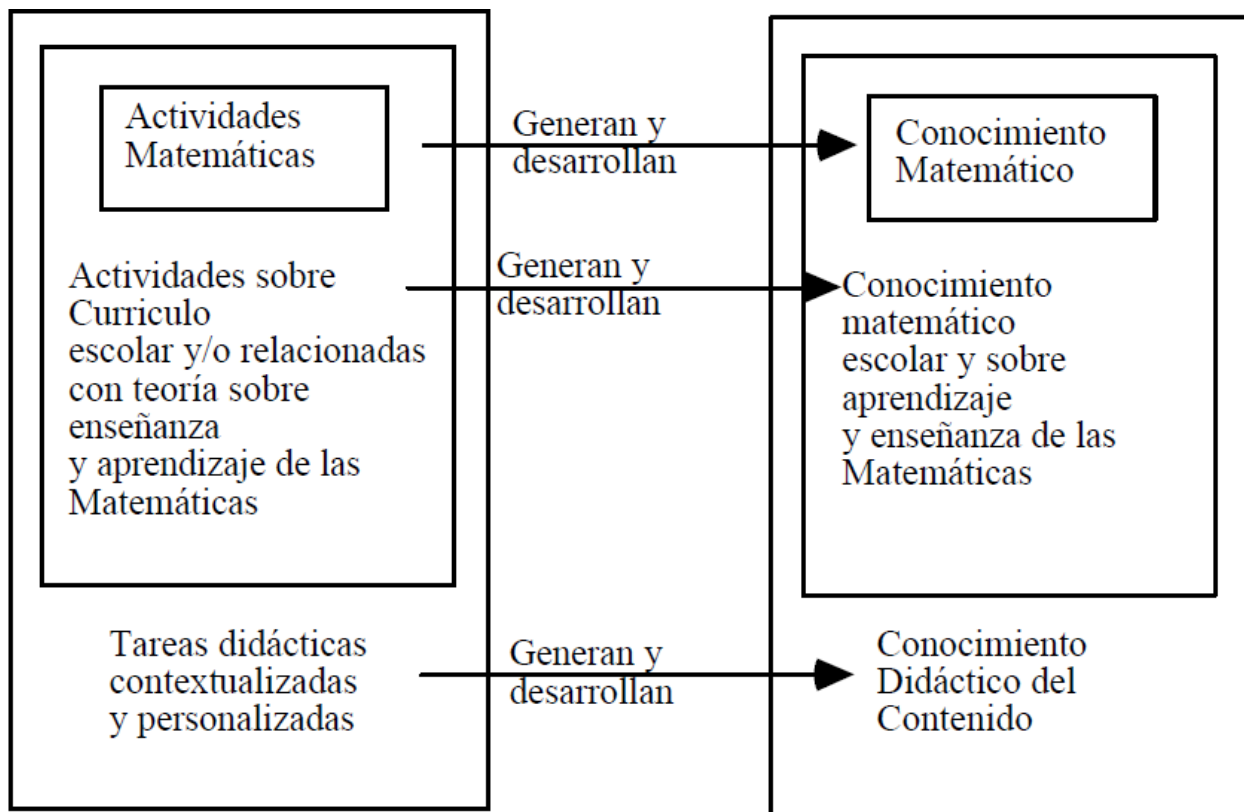
- *El conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas.* Es el conocimiento que tiene el docente al momento de seleccionar ejemplos, libros de texto, o los métodos que este haya desarrollado para mostrar la enseñanza de un concepto o procedimiento matemático. Estos también se pueden ver como los recursos que este utiliza para impartir sus lecciones (Flores-Medrano, *et al.*, 2016; Sosa, *et al.*, 2016). Según Flores-Medrano, *et al.* (2014) “no se trata de conocimiento de matemáticas por un lado y de la enseñanza por otro, sino que se incluyen tan solo aquellos conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza” (p. 81). Este subdominio está dividido en tres categorías, las cuales son: (1) Metodologías de enseñanza; (2) Medios para la enseñanza; y (3) Tareas para la enseñanza.
- *El conocimiento de las características de aprendizaje de las Matemáticas.* Este conocimiento destaca el aprendizaje de los estudiantes, como éste se desarrolla, y como se relacionan los alumnos con los contenidos facilitados por el docente. Este subdominio hace énfasis en el cómo aprende el estudiante, no en el estudiante en sí (Flores-Medrano, *et al.*, 2016; Sosa, *et al.*, 2016). Además, tiene cuatro categorías, las cuales, según Flores-Medrano, *et al.* (2014) son: (1) Formas de aprendizaje; (2) Fortalezas y limitaciones; (3) Interacción de los alumnos con el contenido matemático; y (4) Concepciones de los alumnos sobre las matemáticas.
- *El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas.* Este subdominio hace referencia al conocimiento que posee el docente sobre el currículo que los alumnos deben aprender, que se espera que aprenda y el nivel de complejidad que se va a desarrollar en cada clase (Flores-Medrano, *et al.*, 2016; Sosa, *et al.*, 2016). De igual manera, Flores-Medrano *et al.* (2014) menciona que este subdominio posee tres categorías que son: (1) Expectativas de aprendizaje; (2) Conocimiento de los contenidos matemáticos que se requieren enseñar; y (3) Secuencias de los temas.

Por otra parte, en la dinámica del modelo MTSK es viable promover conocimientos en los profesores por medio del uso de tareas matemáticas escolares como herramientas formativas (Climent *et al.*, 2014). En este sentido, Blanco (1997) asegura que los conocimientos desarrollados por los profesores dependen del tipo de tarea que se implemente. La Figura 2.3. describe el tipo de conocimiento que se genera a partir del tipo de tarea matemática, las cuales pueden adaptarse a

tres clases: las actividades matemáticas en sí, las actividades sobre currículo y el aprendizaje matemático, y las tareas contextualizadas.

Figura 2.3.

Diferentes niveles de tareas en la formación de los profesores



Nota: Tomado de Blanco (1997, p. 38)

Para efectos de esta investigación, se consideran las tareas didácticas contextualizadas y personalizadas para generar cambios en el conocimiento didáctico de los profesores en formación inicial, particularmente el relacionado con el análisis de tareas matemáticas escolares. En este sentido, se comprenden las tareas contextualizadas y personalizadas como actividades que están diseñadas teniendo en cuenta el contexto específico y las necesidades individuales de una persona o situación (Blanco, 1997). En conjunto, en el ámbito educativo, este tipo de tareas mejoran la relevancia y eficacia de las actividades. La adaptación a las circunstancias específicas y a las características individuales puede llevar a una mayor participación, comprensión y éxito en la realización de las tareas.

Resumiendo, se detalla lo que Torres-Rodríguez *et al.* (2019) afirman sobre el conocimiento didáctico del contenido. Para ellos:

El Conocimiento Didáctico del Contenido, es un elemento central que puede representar apropiadamente al conjunto de conocimientos base como sustento del cómo enseñar a aprender [...] hoy día un docente debe desempeñar roles distintos, ya no se trata sólo de transmitir conocimientos, sino además suscitar en los estudiantes el aprendizaje autónomo, independiente y problematizador. (p. 267-268)

Por tanto, queda resaltada la importancia del conocimiento didáctico en la formación de los profesores de matemática. No basta únicamente con el conocimiento del contenido matemático, más aún, se deben de tomar en cuenta ambos tipos de conocimientos para llegar a tener un conocimiento general eficiente. Por ahora, en este estudio el foco de interés está orientado al conocimiento didáctico de los profesores en formación inicial.

Aunado a lo anterior, es importante referirse a los profesores reflexivos, pues estos son agentes de cambio positivo en el ámbito educativo. Su disposición a examinar críticamente su propia práctica y a buscar constantemente maneras de mejorar beneficia no solo a ellos mismos sino también a sus estudiantes y a la comunidad educativa en general. De manera tangencial, una implicación de esta investigación se relaciona con la concientización de los profesores de la capacidad que tienen en cuanto al papel crucial que juegan en la mejora continua de la educación y el aprendizaje de los estudiantes.

2.5. El profesor de matemática reflexivo

Desde hace varios años un tema que se ha estudiado mucho es como formar a profesionales reflexivos, en primer lugar, ¿qué se considera como reflexión?, según la Real Academia Española (2014) reflexionar viene del término latín tardío *reflexio*, “acción de volver atrás”, en la parte física significa “acción y efecto de reflejar o reflejarse”. Si se ve desde la parte educativa, esta definición se puede interpretar como la acción de evaluarse a sí mismo, de reflejarse en las prácticas pedagógicas de otros docentes, de esta manera aprender lo bueno que pueda ver en ellas.

De modo similar, Blanco-Álvarez y Castellanos (2017) consideran “la reflexión como un proceso de pensamiento responsable y sistemático que surge de una situación problemática que requiere disposición para analizar, comprender y actuar ante las situaciones de dicha práctica” (p.

8). De esta manera, un profesor reflexivo no es solo aquel que tiene la capacidad de analizar ciertas condiciones, más aún, es aquel que puede volver sobre sus pisadas para aprender de las situaciones por las que ya ha pasado. Un profesor reflexivo es aquel que es capaz de generalizar y abordar los actos pedagógicos positivos que ha visto o vivido con anterioridad.

Por su parte, Castellanos *et al.* (2017) coinciden con esta propuesta, y afirman que:

La reflexión implica una representación activa de la realidad, que incluye la mirada retrospectiva sobre las acciones en dichas experiencias, el reconocimiento de las concepciones que en ellas están implicadas y la toma en consideración de las consecuencias de tales acciones, culminando con la exploración de posibles alternativas. (p. 410)

Ahora bien, al iniciar la formación de los profesores de matemática, uno de los objetivos principales de los formadores debe ser formar un profesional reflexivo. Lograr esto no es tan sencillo como se cree, para ello es necesario afrontar etapas que presenten un reto para los docentes en formación, de tal manera que, al afrontar los retos de la realidad laboral, puedan poner en práctica las estrategias que aprendan según cada etapa, esto lleva a que los docentes tomen actitudes reflexivas (Flores, 2007). Por lo que, no basta con quedarse solo con la formación de la academia, sino el llevar esta práctica reflexiva al aula es un punto crucial para lograr ser un docente reflexivo (Blanco-Álvarez y Castellanos, 2017).

Según Castellanos *et al.* (2017) “desde hace varios años se habla de la reflexión como una cualidad deseable del profesor. Muestra de esto es la profusa literatura internacional que informa experiencias de reflexión con profesores” (p. 409). Esto evidencia que no solo es fundamental fomentar la reflexión en los docentes que inician su formación, sino también en los docentes que están ejerciendo actualmente.

Hasta cierto punto, entre las actitudes que un docente reflexivo debe tomar está la “actuación artística, no una actuación técnica, ya que su actuación realiza valores, a la vez busca logros” (Flores, 2007, p. 142). Cada conflicto que el profesor logra superar puede representar el inicio de una nueva reflexión.

Por otro lado, se pueden encontrar distintos tipos de reflexión, Van Manen (1998) los divide “según el momento en que se realiza” (citado por Flores, 2007, p. 143). Estos tipos se resumen en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3.*Tipos de reflexión docente*

Reflexión	Definición
Anticipativa	Se puede presentar de dos formas, antes de afrontarlas, como la reflexión sobre situaciones pedagógicas o la sistemática como en la planificación de las clases
Activa o interactiva	Permite al profesor afrontar problemas que aparecen en el momento
La conciencia de la actuación	Exige una separación entre dos tipos de egos: Yo y Mí
Reflexión sobre los recuerdos	Da sentido a experiencias pasadas

Nota: Tomado de Flores (2007, pp. 143-144)

Antes de enfrentarse al mundo laboral, los profesores en formación, en su mayoría, pueden hacer frente a la reflexión anticipativa, analizando situaciones pedagógicas que su docente formador le presente, o planificando alguna clase. Igualmente, pueden enfrentarse a la reflexión sobre los recuerdos, asociando las memorias que tienen de cuándo fueron estudiantes colegiales y tomando una crítica sobre esto para mejorarlas en el momento en el que tengan que enfrentar algo similar. No obstante, es difícil capacitar a los docentes en formación para que desarrollen la reflexión activa o la conciencia de actuación, ya que estos aún no se han enfrentado al mundo laboral, al llegar a esta etapa podrán afrontar distintos retos que los hagan afrontar estos tipos de reflexiones (Blanco-Álvarez y Castellanos, 2017).

Para Flores (2007) la reflexión docente se puede medir por niveles. En la Tabla 2.4. se describen estos niveles.

Tabla 2.4.*Niveles de reflexión docente*

Nivel	Definición
Racionalidad técnica (nivel empírico-analítico)	Se basa en la aplicación eficaz de las habilidades y conocimientos técnicos
Acción práctica (nivel hermenéutico-fenomenológico)	Pretende comprender la interacción entre individuos
Reflexión crítica (nivel crítico-teórico)	Se llega a cuestionar los criterios morales, éticos y normativos relacionados con el aula.

Nota: Flores (2007, p. 144)

Los niveles de reflexión se pueden presentar durante la formación de los docentes (Castellanos *et al.*, 2017). La racionalidad técnica se puede desarrollar en la academia, en el ámbito pedagógico se debe promover un pensamiento crítico que fundamente la aplicación de los contenidos, tanto matemáticos como pedagógicos y didácticos. Más aún, el nivel de acción práctica, ya que entre los mismos pares se corrigen, critican y reflexionan sobre sus propias acciones y actitudes pedagógicas. Por supuesto, la reflexión crítica va de manera dual con este último nivel, ya que del análisis realizado hacia los compañeros se puede autoevaluar tanto los criterios morales como éticos.

Conviene destacar que para Guerrero (2008) una educación crítica reflexiva no solo basta con ser un docente reflexivo, sino también uno crítico. Para que se dé una pedagogía crítica debe de existir diálogo, una plática entre el alumno y el docente. El crear un diálogo en el aula fomenta en los futuros profesores “no solo a una reflexión práctica sobre el conocimiento didáctico del contenido a enseñar, sino a reflexionar críticamente cómo sus acciones pedagógicas tienen repercusiones morales y éticas sobre los demás” (Rico, 1998, p. 4). Este punto es de gran importancia, ya que las actitudes que presente un profesor pueden repercutir tanto positiva como negativamente en los alumnos.

2.6. Balance del capítulo

En este apartado se realiza un resumen de los conceptos fundamentales y términos relevantes de la investigación, con la finalidad de dar claridad a los mismos para una mejor comprensión en el siguiente capítulo. Los conceptos estarán ordenados según aparecen en este capítulo. Cada uno de estos conceptos es un resumen de los apartados anteriores, por lo que, se omiten las citas, ya que estas están debidamente citadas en cada sección correspondiente, de esta manera poder dar fluidez a la lectura de cada termino o concepto descrito.

- *Currículo.* Toda actividad que planifique una formación.
- *Competencia matemática.* Es la capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, subraya una relación de esta disciplina con los entornos físicos y socioculturales, así como, también brindar un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas.
- *Tarea matemática escolar.* Es una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para

el aprendizaje o como instrumento para la evaluación del aprendizaje. Las tareas matemáticas escolares desempeñan un papel determinante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se encuentran en todas las fases del proceso escolar: planificación, mediación y evaluación. Aquellas que llevan al estudiantado a involucrarse significativamente con las matemáticas son centrales y esencialmente determinan las oportunidades y experiencias que se exponen en el aula. Además, proveen el contexto intelectual para el desarrollo de la competencia matemática. Las tareas deben plantear demandas cognitivas en diferentes niveles de complejidad, mediante sistemas de representación, situaciones y contextos variados.

- *Formación del profesor de matemáticas.* Es un proceso por el cual el papel del profesor se transforma, ya no es más un simple receptor, sino es capaz de interpretar el conjunto de aspectos cognitivos, afectivos y relacionales que determinan su quehacer de aula. La formación conlleva dos etapas, las cuales son:
 - ✓ *Etapá estética.* En esta el docente adquiere todos sus conocimientos base, tanto los pedagógicos de contenido como los matemáticos, estos conocimientos son adquiridos desde la niñez, las experiencias vividas y las actitudes y creencias adquiridas a lo largo de la vida de los profesores en formación.
 - ✓ *Etapá dinámica.* Que es donde el docente pone en práctica todos los conocimientos desarrollados en la academia, también donde se construyen nuevos saberes y perfeccionan la capacidad de enfocarse en los estudiantes, en lo que es necesario para que estos aprendan de una manera adecuada.
- *Conocimiento especializado del profesor de matemática.* Este conocimiento se divide a su vez en otros dos conocimientos: el conocimiento matemático de contenido y el conocimiento didáctico del contenido.
 - ✓ *Conocimiento matemático de contenido.* En este se toman en cuenta los aspectos matemáticos, centrándose en la enseñanza y aprendizaje de los contenidos, donde cada uno de estos se relaciona el currículo con el que se trabaja en el momento, los temas que va a enseñar, las relaciones transversales que el docente crea sobre los distintos conceptos y contenidos que conoce, para dar un énfasis a la parte del desarrollo lógico que tiene el profesor.

- ✓ *Conocimiento didáctico del contenido.* Estos son los conocimientos que posee el docente en su quehacer de enseñanza, como al momento de seleccionar ejemplos, libros de texto, de igual manera, los métodos que éste haya desarrollado para mostrarla enseñanza de un concepto, y destacar el aprendizaje de los estudiantes y como éste se desarrolla, también, tener conocimiento del que se espera que aprenda el alumno y el nivel de complejidad que se va a desarrollar en cada clase.
- *Profesor reflexivo.* Es aquel capaz de generalizar y abordar los actos pedagógicos positivos que ha visto o vivido con anterioridad, siendo capaz de representar esto de una forma activa de la realidad, el reconocimiento de las concepciones que en ellas están implicadas y la toma en consideración de las consecuencias de tales acciones, culminando con la exploración de posibles alternativas.

Capítulo III

Marco Metodológico

En este capítulo se presentan los lineamientos y procedimientos que guían la investigación con el fin de asegurar el logro de los objetivos planteados. Primero, se expone el enfoque que tiene el estudio, luego se describe el diseño de la investigación. Posteriormente se profundiza en varios aspectos relevantes para la metodología de la investigación como los participantes, las técnicas y los instrumentos de recolección de información, la experiencia formativa que se implementó y, por último, se explica el proceso que orientó el análisis de los datos recolectados.

3.1. Tipo de investigación

La investigación se desarrolla bajo el paradigma interpretativo, constituyéndose como un estudio de carácter explicativo y descriptivo. Se desea comprender, interpretar y explicar los cambios en el conocimiento didáctico, de un conjunto de profesores de matemática en formación inicial, a partir de su participación en una experiencia formativa sobre el análisis de tareas que promuevan la competencia matemática escolar. Además, en la situación que se plantea, el problema es práctico, por lo cual, la investigación debe exclusivamente partir de una descripción profunda de este (Abreu, 2012; Jiménez, 1998).

Además, otra de las características que destaca a este paradigma es la participación del investigador durante el proceso de recolección de la información, este juega un papel relevante en cada fase del proceso, es un ente activo que observa lo que sucede sin alterar los resultados, es un sujeto externo a la opinión de los involucrados (Hernández *et al.*, 2014).

En este sentido, los investigadores deben esforzarse por mantenerse imparciales y evitar influencias personales o sesgos que puedan distorsionar la interpretación de los datos (Del Villas, 1994; Ricoy-Lorenzo, 2006). Es importante señalar que la investigadora fue una de las docentes a cargo de la experiencia formativa en la que participaron los profesores en formación inicial, sin embargo, tanto en el proceso de recolección de la información como en la fase de análisis, procuró mantener una posición objetiva, crítica, integral y ética.

En cuanto a los datos, este paradigma no pretende generalizar la información, su finalidad es explicar los diversos significados y hechos, observando el comportamiento de los sujetos de

estudio, de esta manera, poder describir las conductas que responden a los objetivos por cumplir (González-Monteagudo, 2001; Ricoy-Lorenzo, 2006). Es así, como existe una relación con doble sentido, donde estos individuos desarrollan un papel activo interpretando y valorando la realidad que el investigador les presenta. Los docentes en formación inicial que participan en la investigación realizaron reflexiones sobre las tareas matemáticas, descritas con anterioridad, a la vez que la investigadora se encarga de interpretar dichas reflexiones.

De esta manera, el estudio se aborda desde el enfoque cualitativo. Según Ricoy-Lorenzo (2006) este se puede describir como un “fenomenologismo (comprensión), interesado en comprender la conducta humana desde el propio marco de referencia del que actúa, no generalizable, se queda en estudio de casos aislados” (p. 13). El fin de la investigación es caracterizar el conocimiento didáctico de un grupo de profesores en formación sobre el análisis de tareas escolares que promuevan la competencia matemática, por lo que, el enfoque cualitativo se ajusta a la perfección al objetivo planteado.

Las investigaciones cualitativas siguen un proceso inductivo, donde es necesario partir de datos específicos y detallados para llegar a conclusiones más generales o teorías. En otras palabras, se extraen patrones, temas o categorías a partir de la información recopilada, en lugar de comenzar con una hipótesis o teoría predefinida (González-Monteagudo, 2001).

En el contexto de las investigaciones cualitativas, el proceso inductivo implica la inmersión en los datos y la exploración activa de los detalles (Quecedo y Castaño, 2002). Por lo tanto, los investigadores suelen utilizar métodos como el análisis de contenido, la codificación abierta y la identificación de patrones para organizar y entender los datos de manera inductiva.

En síntesis, se considera la investigación cualitativa como el enfoque de este estudio en cuanto proporciona una comprensión enriquecedora y contextualizada del fenómeno que se estudia, mediante la exploración de las perspectivas y experiencias de los participantes en la experiencia formativa.

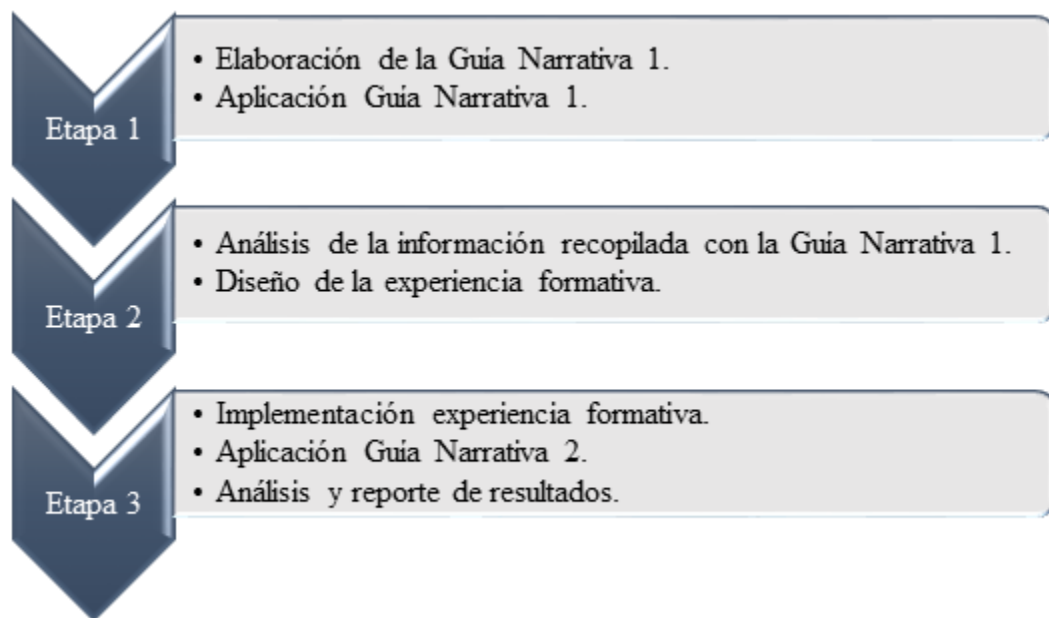
3.2. Diseño de la investigación

En este apartado se describe la estructura que se siguió para llevar a cabo el estudio, permitiendo recopilar, analizar e interpretar los datos con el objetivo de responder la pregunta de investigación. Se procuró seleccionar el diseño metodológico más apropiado según la naturaleza

del fenómeno que se aborda para garantizar la validez y la confiabilidad de los resultados obtenidos. El diseño metodológico se estructura en tres etapas, las cuales se muestran en la Figura 3.1.

Figura 3.1.

Etapas de la investigación



Fuente: Elaboración propia

La guía narrativa es un documento o conjunto de instrucciones que proporciona una estructura o esquema para desarrollar una narrativa (Quecedo y Castaño, 2002). En investigación la guía narrativa es un instrumento valioso que permite a los participantes estructurar la narrativa sobre sus experiencias, permitiendo a los investigadores recopilar datos significativos y ricos en detalles (Ivars *et al.*, 2016). La guía narrativa puede incluir preguntas abiertas que animen a los participantes a contar sus historias de manera completa y reflexiva; cada sujeto describe lo que considera importante de lo cuestionado (Cohen *et al.*, 2011). La función principal de la narrativa es crear una relación entre el recuerdo y la reflexión de un tema en específico, esto de una manera secuencial (Hernández *et al.*, 2014).

Como se muestra en la figura anterior, sobre las etapas de la investigación, los principales instrumentos para recopilar la información, sujeta a análisis en este estudio, fueron dos guías narrativas. En esencia las dos guías narrativas son el mismo instrumento, su diferencia radica en el momento de la investigación en el que se aplican. Ambas guías incluyen cuatro tareas orientadas

a promover la competencia matemática escolar; estas tareas son las mismas en cada guía y fueron seleccionadas luego de un arduo proceso de revisión documental (libros-tesis, artículos científicos, entre otros).

La Guía Narrativa 1 (Anexo 1) se aplicó previo a la experiencia formativa y su propósito consistía en determinar los conocimientos sobre análisis de tareas con los que contaban los profesores en formación inicial que participarían en el estudio. En la guía se les solicita a los profesores que analicen las tareas a partir de sus conocimientos y su experiencia. Esta información fue de mucha utilidad pues la experiencia formativa se diseñó a partir de las necesidades de formación, manifestadas por los profesores que completaron la guía, respecto al análisis de tareas matemáticas escolares.

Luego, una vez diseñada la experiencia formativa, esta se implementó con la finalidad de desarrollar los conocimientos didácticos sobre el análisis de tareas matemáticas escolares que requerían los profesores participantes, tomando en cuenta el encuadre teórico que se ha considerado para el estudio: el modelo MTSK, la reflexión docente y las variables de tarea.

Al final de la experiencia formativa, se aplicó la Guía Narrativa 2 (Anexo 2), que como se explicó anteriormente incluye las mismas tareas de la Guía Narrativa 1. Sin embargo, se esperaba que los profesores recurrieran a los conocimientos desarrollados en la experiencia formativa para analizar las tareas.

De esta manera, se considera como unidad de estudio cada una de las reflexiones que los profesores en formación inicial hicieron sobre el análisis de las tareas matemáticas escolares que se les presentó en las guías narrativas. En este contexto, las reflexiones son consideradas como la ponderación o perspectiva, de forma escrita, de los participantes sobre los conceptos tratados en cada una de las sesiones de la experiencia formativa. Las reflexiones de los participantes expresaban sus conocimientos didácticos.

3.3. Fuentes de información

Las fuentes de información en una investigación son los recursos o materiales que los investigadores consultan para obtener datos, evidencia, ideas y contextos relevantes relacionados con su tema de estudio (Hernández *et al.*, 2014). Estas fuentes pueden variar en formato y origen,

y su selección dependerá del tipo de investigación, el campo académico y los objetivos específicos del estudio (Cohen *et al.*, 2011).

Para Quecedo y Castaño (2002) las fuentes de información se pueden clasificar en dos categorías: las fuentes primarias y las fuentes secundarias. La diferencia principal entre ambas radica en su relación directa con el evento o fenómeno que se está estudiando.

Según Torres *et al.* (2006) las fuentes primarias son documentos, datos, materiales o testimonios que provienen directamente de eventos, personas o períodos que están siendo estudiados. Estas fuentes ofrecen una visión directa y no interpretada de los eventos. Igualmente, estos autores explican que las fuentes secundarias son interpretaciones, análisis o recopilaciones de información basadas en fuentes primarias. Estas fuentes ofrecen una visión más distante y a menudo incluyen la interpretación y la síntesis de varios eventos o datos.

Por su parte, Miles *et al.* (2014) afirman que las fuentes primarias tienen dos subcategorías:

- *Fuente directa.* El investigador toma directamente los datos de la población, sin necesidad de cuestionarios ni entrevistadores.
- *Fuente indirecta.* La información no es obtenida directamente por el investigador, ya que precisa de un cuestionario, encuesta, entrevistador u otros medios para obtener los datos del estudio.

De esta manera, esta investigación contó con fuentes de información primaria, con observación indirecta, ya que, fue necesario aplicar las guías narrativas a los profesores participantes en la experiencia formativa. Además, se contó con una fuente secundaria, ya que los principales insumos para el diseño de la experiencia formativa se obtuvieron mediante la aplicación de la Guía Narrativa 1 y el análisis de los datos recopilados con esta.

En la tabla 3.1., se detallan las etapas de investigación, su finalidad, las actividades que se ejecutaron en cada una de ellas, y las fuentes de información consideradas.

Tabla 3.1.*Especificación de las etapas del diseño de la investigación*

Etapa	Finalidad	Actividad	Fuentes de información
Etapa 1	<ul style="list-style-type: none"> Los profesores de matemática en formación inicial analizan tareas, a partir de sus conocimientos y su experiencia. Con esta información se determinan los conocimientos previos de los profesores sobre el análisis de tareas matemáticas escolares. 	Aplicación Guía Narrativa 1	Profesores en formación inicial Fuente primaria
Etapa 2	<ul style="list-style-type: none"> Se identifican vacíos en la formación de los profesores relacionados con aspectos sobre el análisis de tareas matemáticas escolares, a partir del análisis de la información recolectada con la Guía Narrativa 1. Se diseña la experiencia formativa según las necesidades de formación, manifestadas por los profesores que completaron la Guía Narrativa 1, respecto al análisis de tareas matemáticas escolares. 	Análisis de información Diseño de la experiencia formativa	Guía Narrativa 1 Fuente secundaria
Etapa 3	<ul style="list-style-type: none"> Se implementa la experiencia formativa. Los profesores de matemática en formación inicial analizan tareas, a partir de los conocimientos desarrollados en la experiencia formativa. Identificación de cambios en el conocimiento didáctico sobre análisis de tareas en los profesores participantes como resultado de su participación en la experiencia formativa. 	Implementación de la experiencia formativa Aplicación Guía Narrativa 2 Redacción de resultados	Profesores en formación inicial Fuente primaria.

Fuente: Elaboración propia

3.4. Instrumentos de recolección de información

Los instrumentos que se utilizaron para recolectar la información son las guías narrativas que, como se mencionó anteriormente, están compuestas por cuatro tareas matemáticas escolares orientadas a promover la competencia matemática escolar.

Tres de las tareas fueron tomadas de un material didáctico, el cual es el resultado principal de una investigación denominada “Análisis Didáctico, como fundamentación teórica, en la

creación de materiales didácticos congruentes con el Programa de Estudios de Matemática de Costa Rica: el caso de la función lineal y de la función cuadrática” (Fernández *et al.*, 2018). Estas tareas se caracterizan por qué promueven la competencia matemática escolar, su redacción y formato son llamativos para los estudiantes, y su diseño incluye todas las variables de tarea que fueron objeto de estudio durante la experiencia formativa: contenido matemático, habilidades, procesos matemáticos, sistemas de representación, situaciones, entre otros.

Por otro lado, la otra tarea (Tarea 3 en las guías narrativas) carece de los elementos abordados en la experiencia formativa. En este sentido, no promueve la competencia matemática escolar según la visión funcional del aprendizaje matemático; constituye un ejercicio rutinario cuya resolución implica la repetición de procedimientos y no se desliga del mundo matemático.

De esta manera, las tareas constituyen reactivos significativos para desarrollar en los profesores conocimientos para el análisis de estas. La reflexión que los profesores en formación inicial han hecho sobre los elementos que conforman las tareas proporcionaron los insumos suficientes para explicar los cambios en sus conocimientos didácticos.

Las guías narrativas se sometieron a una validación por juicio de expertos. El juicio de expertos es crucial en la validación de instrumentos, ya que aporta una evaluación informada y especializada sobre la calidad y pertinencia del instrumento diseñado para recopilar la información (Cohen *et al.*, 2011). Se consultaron cuatro expertos, todos con formación en Didáctica de la Matemática y dedicados a la investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Tres de los expertos son académicos de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, y la otra experta es académica de la Universidad de Almería, España.

3.5. Participantes de la investigación

En el estudio participaron seis profesores de matemática en formación inicial, inscritos en la carrera Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica. Los participantes fueron seleccionados luego de satisfacer los siguientes criterios:

1. Haber cursado de forma completa el Bachillerato en Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional, Costa Rica. Este requisito se planteó con el propósito de garantizar que los participantes en el estudio contaran con nociones básicas sobre los conceptos, las técnicas y los métodos propios de la Didáctica de la Matemática; mediante

los cursos que se ofrecen en el plan de estudios de dicha carrera correspondientes a esta disciplina educativa.

2. Manifestar interés por mejorar sus conocimientos sobre aspectos relacionados con el análisis de tareas matemáticas escolares.
3. Tener disponibilidad de participar en todas las etapas de la investigación: implicación activa en las actividades de la experiencia formativa y completación de instrumentos.

3.6. La experiencia formativa

La experiencia formativa surge como una respuesta a las dificultades que manifiestan los profesores en formación inicial para analizar tareas matemáticas escolares. La incorporación de la noción de competencia matemática escolar como parte integral del currículo, requiere de una atención especial en el desarrollo profesional del profesorado, pues estos deben ser capaces de analizar, seleccionar y diseñar tareas que promuevan la competencia matemática escolar (Loría, 2020).

Con la experiencia formativa se pretendía establecer y organizar los aspectos teóricos y conceptuales relevantes para el análisis de tareas matemáticas escolares y lograr que los profesores participantes pudieran involucrarse activamente en una experiencia de desarrollo profesional mediante su participación en diálogos, debates, reflexiones y mediante la producción de trabajos técnicos y prácticos.

De esta manera, lo más conveniente, según los propósitos de formación establecidos, fue establecer una modalidad de formación que combinara las características de un curso académico con las de un taller educativo. Es decir, que incluya aspectos teóricos y aplicaciones prácticas. El curso-taller se ajustó a la formación teórico-práctica que se esperaba desarrollar. Del curso se conserva la programación y estructuración de los contenidos; del taller, la idea del aprendizaje activo: orientado a la producción, en un ambiente de colaboración, y promovido mediante el desarrollo continuo de los participantes.

La fortaleza del curso-taller como herramienta de formación radica en el rol activo, participativo, e investigativo del sujeto que aprende en el binomio teoría y práctica; los encargados actúan como facilitadores del aprendizaje, los participantes construyen su aprendizaje mediante el predominio de la práctica (Careaga *et al.*, 2006; Castillo, 2003; Ortíz, 2002).

Los meses previos a la implementación del curso-taller, se determinó su contenido curricular y, con base a los contenidos definidos, la secuencia temporal, la documentación necesaria y los recursos para su puesta en práctica. Posteriormente, se hizo la selección de los participantes, se estableció la organización temporal de los contenidos, la propuesta de los trabajos y actividades, los guiones de desarrollo preliminares y el espacio virtual donde tendría lugar el curso-taller. La experiencia formativa se desarrolló de manera virtual por recomendación de los profesores en formación inicial participantes.

Establecidos los elementos relativos al diseño de la experiencia formativa, se procedió a recabar el juicio de expertos con el propósito de validarla y planificar el momento de su implementación. El equipo de expertos que validó el curso-taller estaba constituido por académicos de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica, todos con un grado académico de Maestría o Doctorado en Didáctica de la Matemática. Los expertos validaron la necesidad de formación que se había identificado y las decisiones tomadas respecto a los contenidos, la finalidad, y todo lo concerniente a la programación del curso-taller. Asimismo, todos los expertos concluyeron que el planteamiento de la propuesta formativa era coherente con la fundamentación de los programas de estudio en matemáticas vigentes en Costa Rica, y que tanto los objetivos del curso-taller como el diseño de las actividades desarrolladas en las sesiones eran pertinentes ante la necesidad de capacitar a los profesores de matemática en formación inicial sobre el análisis de tareas; medios para desarrollar en los estudiantes su competencia matemática escolar.

De esta manera, el tema central del curso-taller y sobre el que se enfatizaron las sesiones fueron las características de las tareas matemáticas escolares y su ajuste al modelo funcional del aprendizaje matemático. Las decisiones respecto a los documentos de trabajo propuestos en las distintas sesiones del curso-taller se basaron en los contenidos identificados. En la tabla 3.2. se detalla la organización secuencial de los contenidos del curso-taller.

Table 3.2.*Organización temporal de los contenidos*

Sesión	Contenidos
1	<ul style="list-style-type: none">• Nociones básicas de los programas de estudio de matemáticas en Costa Rica.• Tareas Matemáticas Escolares: caracterización y variables que las componen.
2	<ul style="list-style-type: none">• El modelo MTSK: herramienta que enriquece el análisis de las tareas matemáticas escolares.
3	<ul style="list-style-type: none">• Análisis de tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar.

Fuente: Elaboración propia

Se determina que el curso-taller requeriría de 15 horas de trabajo para completarse exitosamente. De estas, 9 horas se desarrollaron en presencialidad remota, mediante la plataforma de videoconferencia Zoom, y se distribuyeron en las tres sesiones planificadas (cada sesión tuvo una duración de tres horas). Las otras 6 horas se destinaron para que los profesores en formación inicial completasen las guías narrativas (tres horas para la completación de cada guía narrativa). A solicitud de los profesores el curso-taller se implementó durante el mes de junio del año 2022; los últimos tres miércoles de dicho mes. Para esas fechas los profesores se encontraban menos comprometidos con sus obligaciones universitarias.

Se determinó la estructura de cada sesión en términos de las actividades que se planificaron y el cumplimiento de los objetivos de formación previamente establecidos. La tabla 3.3. muestra las actividades que se desarrollaron y los objetivos de formación abordados en cada sesión.

El curso-taller fue diseñado y desarrollado por el equipo de investigación; compuesto por la estudiante de grado, investigadora principal y autora de esta tesis, y el investigador de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica, Dr. José Romilio Loría Fernández, tutor de esta. Ambos investigadores estuvieron a cargo de las actividades de formación y la redacción de los documentos de trabajo. La investigadora principal se encargaría también de asuntos técnicos tales como registrar la asistencia, seguir las producciones de los participantes y analizar las grabaciones de las sesiones.

Tabla 3.3.*Estructura de las sesiones*

Sesión	Actividades	Objetivo de formación
1	<ul style="list-style-type: none"> • Bienvenida al curso-taller. • Presentación sobre los elementos claves del currículo costarricense de matemáticas. • Actividad 1. En grupos, los participantes analizan una tarea considerando las nociones claves del currículo expuestas anteriormente. • Revisión Actividad 1. Los participantes exponen. Se presenta el análisis experto de la tarea. • Cierre didáctico. Reflexión docente. Conclusiones generales de la sesión. ¿Qué he aprendido? 	<p>Identificar elementos clave del marco teórico que enmarca la reforma curricular de los programas de matemática en Costa Rica, para el desarrollo de la competencia matemática escolar.</p> <p>Caracterizar tareas matemáticas escolares en términos de las variables que las constituyen: contenido matemático, situaciones y contextos, niveles de complejidad.</p>
2	<ul style="list-style-type: none"> • Repaso de conocimientos previos. • Presentación sobre el modelo del conocimiento del profesor de matemáticas MTSK. • Actividad 2. Reflexión sobre el vínculo entre las nociones claves del currículo costarricense de matemáticas y los subdominios del conocimiento didáctico del contenido del MTSK. • Discusión Actividad 2. Explicar el vínculo entre las nociones claves del currículo costarricense de matemáticas y los subdominios del conocimiento didáctico del contenido del MTSK. • Actividad 3. Por grupos, los participantes analizarán dos tareas considerando la fundamentación teórica brindada (Currículo y MTSK). Luego, se revisará el análisis realizado. • Cierre didáctico. Reflexión docente. Conclusiones generales de la sesión. ¿Qué he aprendido? 	<p>Reconocer nociones del modelo del conocimiento del profesor de matemáticas, MTSK, que enriquecen el análisis de tareas matemáticas escolares.</p>
3	<ul style="list-style-type: none"> • Repaso de conocimientos previos. • Actividad 4. En grupos, los participantes analizan dos tareas a partir de la fundamentación teórica brindada. • Revisión Actividad 4. Presentar el análisis experto de las tareas. • Asignación Guía Narrativa 2. • Cierre didáctico. Conclusiones generales de la sesión. Valoración de la experiencia formativa. 	<p>Analizar tareas diseñadas para el desarrollo de la competencia matemática escolar.</p>

Fuente: Elaboración propia

La dinámica del curso-taller motivó y facilitó el trabajo colaborativo e implicó la participación activa de los profesores participantes. La estrategia empleada en la fundamentación

teórica permitió que los profesores participantes se familiarizaran con los conceptos teóricos y reflexionarán sobre sus prácticas y las de otros colegas para analizar tareas matemáticas escolares. El ambiente de trabajo facilitó las intervenciones de los participantes durante la conceptualización. Para completar las actividades se fomentó el trabajo en equipos de dos o tres personas. Con esta agrupación los profesores participantes tuvieron oportunidad de compartir ideas y profundizar en su comprensión de las consideraciones teóricas discutidas en las sesiones, así como alcanzar un mejor desempeño en las actividades propuestas.

Cabe señalar que todas las sesiones del curso-taller fueron grabadas. Antes de iniciar con la experiencia formativa, al completar la Guía Narrativa 1, se consultó a los profesores en formación inicial sobre su posición en cuanto a la grabación de la totalidad de las sesiones. Todos estuvieron de acuerdo y consintieron el procedimiento.

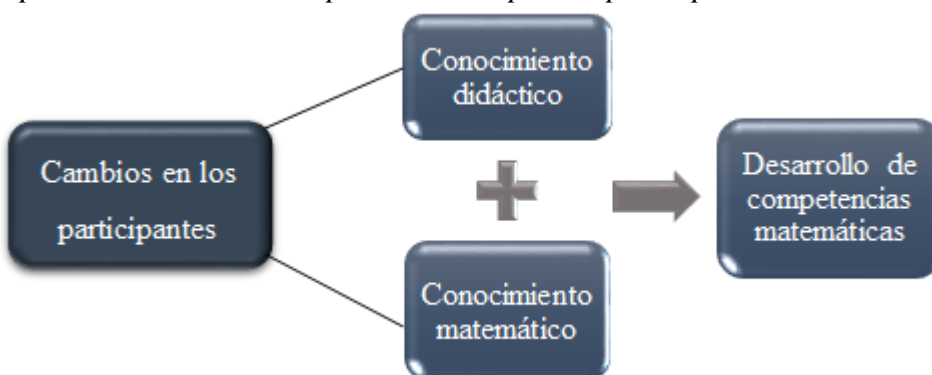
De igual manera, todos los participantes mostraron siempre una conducta de compromiso hacia el curso-taller, esto se manifestó en la puntualidad al ingresar a la reunión virtual, la implicación en las actividades propuestas y en las consultas realizadas durante las sesiones.

Con respecto a actividades de evaluación, se asume que el interés principal de los profesores en formación inicial que participan en la experiencia formativa es el desarrollo y fortalecimiento de los conocimientos didácticos para analizar tareas matemáticas escolares. De esta manera, se consideró que el curso-taller no debía tener una calificación numérica final, al contrario, se apostó por una evaluación integradora y continua de las etapas del proceso formativo con el fin de mejorar los conocimientos sobre el tema tratado.

Al finalizar el curso-taller se esperaba que los profesores participantes tuvieran alcance a un conjunto de capacidades y herramientas para que puedan analizar tareas, destacando las dimensiones del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido en cada una de ellas. Más aún, se esperaba que unifiquen estos conocimientos para que en sus futuras prácticas educativas selección, analicen y diseñen tareas orientadas al desarrollo de la competencia matemática escolar, tal y como se muestra en la figura 3.2.

Figura 3.2.

Expectativa de cambios experimentados por los participantes



Fuente: Elaboración propia

En el siguiente capítulo de esta memoria se hará referencia a los resultados alcanzados a partir de la implementación del curso-taller.

3.7. Análisis de la información

En este apartado, se describe el proceso mediante el cual se examinan, interpretan y evalúan los datos recopilados con el objetivo de obtener conclusiones significativas y extraer conocimiento relevante. Este paso es crucial en el ciclo de investigación, ya que permite transformar datos crudos en información útil para responder a las preguntas de investigación o para abordar los objetivos planteados.

Para el análisis de la información, recolectada antes de la implementación del curso-taller y durante su ejecución, se establece que las unidades de análisis corresponden a cada una de las reflexiones que los profesores en formación inicial realizan en sus narrativas.

Desde esta perspectiva, el análisis de la información recorre sucesivamente cuatro etapas o fases (Miles *et al.*, 2014):

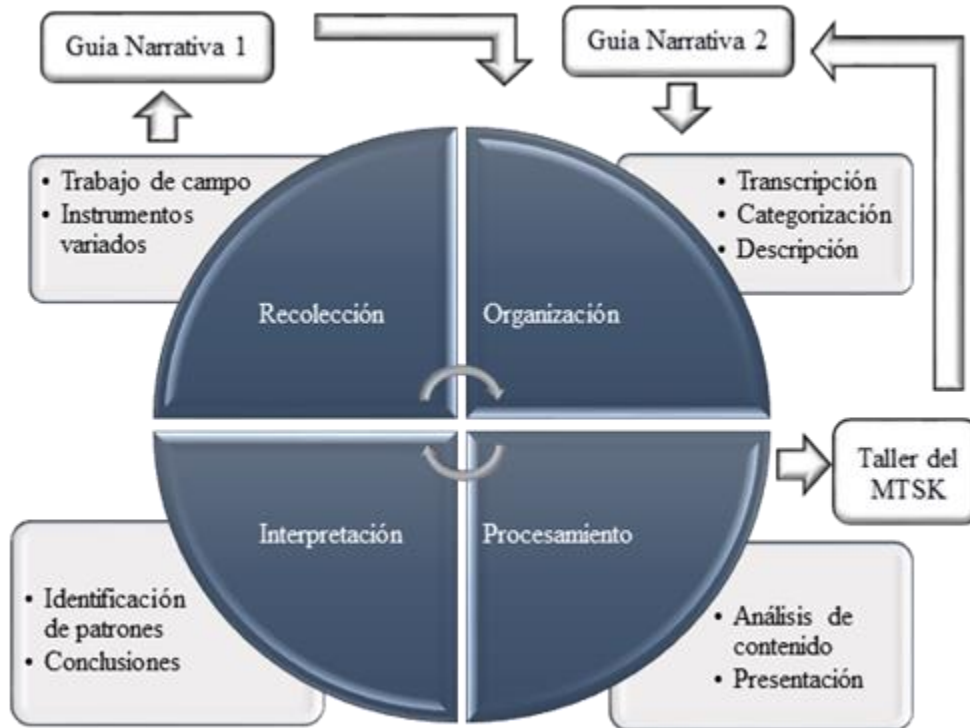
- *Recolección.* En esta etapa se realiza el trabajo de campo con los distintos instrumentos, en este caso se aplican las guías narrativas.
- *Organización.* En esta etapa se transcriben los datos recolectados con las guías narrativas, se categorizan las unidades de análisis y se describe cada una de ellas.
- *Procesamiento.* En esta etapa se analiza el contenido de cada unidad de análisis. Además, se decide como será la presentación que van a tener estas.

- *Interpretación.* En esta etapa se identifican los patrones que tienen los datos recolectados y se realizan las conclusiones.

En la figura 3.3. se describe el proceso cíclico que conlleva el análisis de la información.

Figura 3.3.

Ciclo de análisis de la información



Fuente: Elaboración propia

Primero se recolectaron los datos mediante la aplicación de la Guía Narrativa 1, se prosigue al siguiente nivel que corresponde a la organización de las unidades de análisis encontradas. A partir de este punto, se continúa con el procesamiento de estos datos, y de esta manera se desarrolla el curso-taller. Al final de la implementación de la experiencia formativa se aplica la Guía Narrativa 2, lo que conlleva a volver al nivel de organización de la información, siguiendo con el análisis de las nuevas unidades de estudio encontradas en este punto.

Según Thomas (2006) esta estrategia de transformación de datos cualitativos permite establecer relaciones entre los objetivos de una investigación y los hallazgos derivados de los datos, por lo que se pueden condensar una gran cantidad de información textual en forma resumida a partir de un modelo sobre la estructura evidente en los datos. De esta forma, se puede asegurar que estas relaciones puedan ser justificadas y demostradas (Miles *et al.*, 2014).

Una vez condensadas las reflexiones de los profesores en formación, estas fueron tratadas mediante la técnica del análisis de contenido, la cual no solo se trata de la simple recolección y comprensión de la información, por el contrario, consiste en la aplicación de procedimientos metódicos en el análisis de los datos (Ñaupás *et al.*, 2014).

En palabras de Bardin (2002, p.32), el análisis de contenido es “el conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones tendentes a obtener indicadores por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción (contexto social) de estos mensajes”. Específicamente, el análisis de contenido cualitativo favorece el análisis de pequeños fragmentos de texto, donde el estudio que se realiza ya no es únicamente descriptivo, sino que se debe tomar a conciencia, intentando llegar a poder aplicar la inferencia a cada uno de los datos obtenidos (Cohen *et al.*, 2011).

Por otra parte, para garantizar la validez de los resultados de la investigación, se opta por aplicar la técnica metodológica de *triangulación de fuentes*, la cual pretende analizar a través de distintos puntos de vista un mismo fenómeno. Esta metodología consiste en verificar y comprobar por medio de distintas fuentes de información los datos obtenidos con la aplicación de los instrumentos (Benavides y Gómez-Restrepo, 2005). Para Cohen *et al.* (2011) esta técnica ayuda a asegurar la convergencia y corroboración de resultados, así como a aumentar su credibilidad y fiabilidad.

En la figura 3.4. se detalla la triangulación metodológica aplicada en esta investigación. Cabe señalar que se consideraron las principales fuentes de información de acuerdo con las etapas establecidas en el diseño de la investigación.

Figura 3.4.

Triangulación de fuentes de información



Fuente: Elaboración propia

3.8. Categorías de análisis

En este apartado se definen las categorías, subcategorías y unidades de análisis con las que se clasifican los datos recolectados, para su posterior análisis.

La investigación se enmarca en el modelo MTSK, el cual ya tiene prefijadas sus categorías y subcategorías, sin embargo, debido a los propósitos de esta investigación no todas ellas son de interés, por lo que, a continuación, se presentan las categorías del modelo MTSK adaptadas al tema abordado en este estudio. Por lo tanto, la codificación y los significados son distintos a los que se tienen propiamente en el marco teórico de dicho modelo sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Como se mencionó anteriormente, el marco teórico del modelo MTSK, se divide en dos grandes áreas o categorías, estas a su vez, se dividen en tres subcategorías, las cuales incluyen diferentes tipos de indicadores. Es así como se define la siguiente categoría, y sus respectivas subcategorías e indicadores:

3.8.1. Conocimiento Matemático (CM)

Hace referencia a la identificación, directa o indirecta, de un contenido matemático (concepto o procedimiento) desde un punto de vista de la matemática como disciplina científica. Está dividida en tres dimensiones.

Conocimiento del Tema (CT)

Corresponde a los conocimientos sobre contenido matemático en sí. Se consideran cinco aspectos que caracterizan este conocimiento, que destacan las aplicaciones, propiedades, representaciones, definiciones y procedimientos asociados al contenido matemático. Cuyos indicadores son:

- *CT1. Conocimiento Sobre el Sentido y Modos de Uso.* Fenómenos asociados al tema (situaciones), así como las diferentes formas de utilizar y aplicar el concepto matemático (contextos).
- *CT2. Conocimiento Sobre Propiedades y Definiciones.* Argumentación matemática de los atributos o cualidades de un concepto, procedimiento o definición.
- *CT3. Conocimiento Sobre Representaciones.* Uso de distintos sistemas de representación para hacer presente un concepto matemático.
- *CT4. Conocimiento Sobre Procedimientos.* ¿Cómo se hace?, ¿Cuándo puede hacerse?, ¿Por qué se hace así? Características del resultado.

Estructura Matemática (EM)

Este hace referencia a las relaciones transversales que el docente crea sobre los distintos conceptos y contenidos matemáticos que se abordan en el mismo nivel educativo o en otros. Sus indicadores corresponden a:

- *EM1. Enlace Potenciador.* Relaciones entre conceptos que favorecen su enseñanza.
- *EM2. Enlace Transversal.* Relaciones entre conceptos a partir de sus cualidades o atributos comunes.
- *EM3. Enlace Instrumental.* Conceptos entendidos como herramientas para el desarrollo de otros.

Práctica Matemática (PM)

Hace énfasis a la parte del desarrollo lógico que tiene el profesor, señala razonamientos que justifican el proceder en la matemática como disciplina, que trascienden el conocimiento del concepto y de sus propiedades. Los indicadores de esta subcategoría son:

- *PM1. Planificación en el Proceder de la Resolución de Problemas Matemáticos.* Se cuenta con los datos correspondientes para la planificación adecuada para la resolución del problema.
- *PM2. Formas de Validación y Demostración.* Estructuras lógicas generales de pensamiento de la Matemática que argumenten los procedimientos.
- *PM3. Uso del Lenguaje Formal.* Uso adecuado del lenguaje simbólico y verbal.
- *PM4. Prácticas Particulares del Quehacer Matemático (Por Ejemplo, Modelación).* Estructuras lógicas específicas de pensamiento para abordar un tema o contenido matemático.
- *PM5. Condiciones Necesarias y Suficientes para Generar Definiciones.* Evidencias de los datos necesarios para lograr abordar de la manera correcta el problema en cuestión.

En la tabla 3.4. se presenta un resumen de las subcategorías e indicadores asociados a la categoría del conocimiento matemático. Es importante recordar que para cumplir los objetivos de este estudio se prioriza sobre algunos elementos relacionados con el conocimiento del tema, pues las habilidades que se esperan promover mediante las tareas sujetas a análisis se vinculan con los objetos matemáticos (el tema).

Tabla 3.4.*Categorización del conocimiento matemático*

Categoría	Subcategoría	Indicadores
CM: Conocimiento matemático	CT: Conocimiento del tema	CT1: Conocimiento sobre el sentido y modos de uso
		CT2: Conocimiento sobre propiedades y definiciones
		CT3 Conocimiento sobre representaciones
		CT4 Conocimiento sobre procedimientos
CM: Conocimiento matemático	EM: Estructura matemática	EM1: Enlace potenciador
		EM2: Enlace transversal
		EM3: Enlace instrumental
CM: Conocimiento matemático	PM: Práctica matemática	PM1: Planificación en el proceder de la resolución de problemas matemáticos
		PM2: Formas de validación y demostración
		PM3: Uso del lenguaje formal
		PM4: Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)
		PM5: Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones

Fuente: Elaboración propia

3.8.2. Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC)

Esta categoría permitió analizar e identificar los conocimientos didácticos que los docentes manifestaron sobre el análisis de tareas orientadas a promover habilidades relacionadas con los conceptos u objetos matemáticos.

El Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (CEM)

Conocimiento que posee el docente para desarrollar un contenido o un concepto específico, recursos, materiales y tareas que este emplee para la instrucción del tema en cuestión. Sus indicadores son:

- *CEM1. Metodologías de Enseñanza.* Teorías o propuestas de enseñanza específicas de la Educación Matemática que promuevan el diseño de ambientes de aprendizaje.
- *CEM2. Medios para la Enseñanza.* Recursos o materiales, físicos o virtuales, disponibles para la enseñanza de un contenido matemático particular.

- *CEM3. Tareas para la Enseñanza.* Demandas cognitivas que el profesor propone a los estudiantes sobre un contenido matemático específico para promover o evaluar una habilidad matemática.

Aprendizaje de las Matemáticas (AM)

Se destacan particularidades del aprendizaje de un concepto matemático. Sus indicadores son:

- *AM1. Formas de Aprendizaje.* Maneras en que aprenden los estudiantes las matemáticas.
- *AM2. Fortalezas y Limitaciones.* Potencialidades que tiene un contenido matemático para el aprendizaje de las matemáticas, así como a los obstáculos asociados a su aprendizaje.
- *AM3. Interacción de los Alumnos con el Contenido Matemático.* Formas en que los estudiantes manipulan el contenido matemático.
- *AM4. Concepciones de los Alumnos Sobre las Matemáticas.* Expectativas e intereses de los estudiantes hacia las matemáticas.

Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (EAM)

Conocimiento sobre el currículo, los contenidos y los conceptos, para la enseñanza de las matemáticas en un nivel escolar específico. Sus indicadores corresponden a:

- *EAM1. Expectativas de Aprendizaje.* Aprendizajes que se pretenden lograr con la implementación de la tarea.
- *EAM2. Conocimiento de los Contenidos Matemáticos que se Requieren Enseñar.* Temas en los que se enmarcan las habilidades matemáticas que se espera promover en un nivel escolar específico.
- *EAM3. Secuencias de los Temas.* Distribución de temas y el alcance de capacidades en los distintos niveles escolares.

En la tabla 3.5. se presenta un resumen de las subcategorías e indicadores asociados a la categoría del conocimiento didáctico del contenido matemático.

Tabla 3.5.*Categorización del Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático*

Categoría	Subcategorías	Indicadores
	CEM: Conocimiento de Enseñanza de la matemática	CEM1. Metodologías de enseñanza CEM2. Medios para la enseñanza CEM3. Tareas para la enseñanza
CDC: Conocimiento didáctico del contenido matemático	AM: Aprendizaje de las matemáticas	AM1. Formas de aprendizaje AM2. Fortalezas y limitaciones AM3. Interacción de los alumnos con el contenido matemático. AM4. Concepciones de los alumnos sobre las matemáticas.
	EAM: Estándares de aprendizaje de las matemáticas	EAM1. Expectativas de aprendizaje EAM2. Conocimiento de los contenidos matemáticos que se requieren enseñar EAM3. Secuencias de los temas

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 3.6. se describe la operacionalización de cada una de las tareas con las categorías de análisis y sus respectivos indicadores, así se verifica que en su totalidad serán contempladas ambas guías narrativas para recolectar información.

Ahora, se logra observar la diferencia que existe entre cada tarea, por ejemplo, la tarea T.3 contiene pocos indicadores, comparada con las otras tareas (T.1, T.2 y T.4). Otro detalle que destaca es que la tarea T.4, contiene la mayoría de los indicadores deseados, eso expresa que está bien construida y se pueden obtener datos importantes de la misma. Esto no implica que la tarea T.3 carezca de relevancia para la investigación, por tener pocos indicadores asociados a ella. El análisis que se hace de esta tarea gira en torno a los elementos que hacen falta en su diseño y en las posibles propuestas de mejora que los profesores en formación inicial puedan sugerir.

Tabla 3.6.*Operacionalización de las categorías según los instrumentos para recolectar los datos*

Categorías		Tareas					
		T.1	T. 2	T. 3	T. 4		
CM	CT	CT1	X	X		X	
		CT2		X	X	X	
		CT3	X	X	X	X	
		CT4	X	X		X	
	EM	EM1	X	X		X	
		EM2		X		X	
		EM3				X	
	PM	PM1	X	X	X	X	
		PM2	X			X	
		PM3	X	X	X	X	
		PM4		X			
		PM5	X		X	X	
	CPC	CEM	CEM1	X	X		X
			CEM2	X	X		X
			CEM3	X	X	X	
AM		AM1		X		X	
		AM2	X	X	X	X	
		AM3	X	X	X	X	
		AM4	X			X	
EAM		EAM 1	X			X	
		EAM 2	X	X	X	X	
		EAM 3	X	X			

Fuente: Elaboración propia

3.8.3. Vínculo entre elementos del análisis y categorías del MSTK

Para el análisis de las tareas, se definieron variables, las cuales fueron objeto de estudio durante el curso-taller. A estas variables se les otorga un código para clarificar el vínculo de cada una de ellas con los indicadores de las subcategorías del modelo MTSK que se adaptaron y

priorizaron para esta investigación. La tabla 3.7. presenta la codificación de las variables consideradas en el análisis de las tareas.

Tabla 3.7

Variables de tarea como indicadores del conocimiento didáctico

Código	Variable
E1	Redacción clara del enunciado
E2	Situación
E3	Contenido matemático
E4	Autenticidad de la situación
E5	Procedimientos asociados a la resolución
E6	Procesos matemáticos que intervienen
E7	Nivel de complejidad
E8	Cuestión relevante
E9	Teorías de enseñanza
E10	Habilidades asociadas al contenido
E11	Sistemas de representación
E12	Recursos y materiales
E13	Conocimientos previos
E14	Errores y dificultades

Fuente: Elaboración propia

Estas variables se toman como los elementos que nos permiten medir el conocimiento didáctico que tiene el profesor en formación antes y después del curso-taller, cada elemento es tomado del currículo costarricense y se relacionan con los indicadores del MTSK, en la tabla 3.8 se detalla el vínculo que se encuentra entre ambas, creando de esta manera las variables con las que se miden el conocimiento didáctico en esta investigación.

Por ejemplo, el indicador del AM1, maneras en las que aprenden los estudiantes, se vincula con las variables cuyo código corresponde a E1-Redacción clara del enunciado, E2-Situación, E4-Autenticidad de la situación, E5- Procedimientos asociados a la resolución y E10- Habilidades asociadas al contenido.

3.9. Balance del capítulo

El trabajo empírico está orientado por la necesidad de capacitar a profesores de matemática en formación inicial, ajustándose al modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK y al modelo funcional de las Matemáticas que organiza el currículo costarricense. De esta manera, se diseña una experiencia formativa, concretada en un curso-taller, con la finalidad de desarrollar y profundizar en los profesores conocimientos didácticos sobre el análisis de tareas orientadas a promover la competencia matemática escolar, según las directrices curriculares.

Los informantes voluntarios en el estudio fueron los profesores en formación inicial que asistieron al curso-taller; previo a la implementación de la experiencia formativa y durante el desarrollo de las sesiones, se recopiló información empírica de los participantes. Para ello se emplearon dos guías narrativas y el registro de las reflexiones hechas durante las sesiones de la experiencia formativa.

Con el propósito de garantizar que la información obtenida fuera consistente y considerar todos los ángulos posibles de acuerdo con los objetivos de la investigación, se procede a una triangulación metodológica. Por lo que se agrupan las principales fuentes de información de acuerdo con la etapa de la investigación en la que tuvieron lugar. Para analizar e interpretar los cambios en los conocimientos didácticos de los profesores en formación inicial se utilizó técnicas del análisis de contenido y un sistema de categorías basado en el modelo MTSK y las variables definidas para el análisis de tareas. Es importante aclarar que las nociones sobre la reflexión docente permearon las actividades que se suscitaron en la dinámica del curso-taller.

Tabla 3.8.

Variables presentes según las categorías

Categoría	Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
AM	AM1	x	x		x	x					x				
	AM2	x	x	x		x	x	x	x						
	AM3	x		x	x	x	x	x	x	x					
	AM4		x	x											
CEM	CEM1	x	x	x	x	x		x	x	x	x				
	CEM2		x			x			x		x				
	CEM3	x	x	x	x	x	x			x		x	x		
EAM	EAM1	x		x	x	x	x	x		x				x	x
	EAM2		x	x	x				x	x	x			x	
	EAM3		x					x		x			x	x	

Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO IV

Resultados

Esta investigación estudia los cambios en los conocimientos didácticos de un grupo de profesores en formación inicial sobre el análisis de tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar. Estos cambios se producen durante su participación en una experiencia formativa, concretada en un curso-taller, centrado en el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK, y el modelo funcional de las Matemáticas que organiza el currículo costarricense. La fundamentación teórica sobre la Reflexión Docente permea de forma transversal el desarrollo de las actividades del curso-taller.

En este capítulo se presenta el análisis de la información recogida durante el trabajo de campo, para describir la naturaleza de dichos cambios y si, en efecto, estos cambios pueden relacionarse con las actividades realizadas durante la experiencia formativa. La información recogida es de carácter cualitativo y se analiza con un enfoque interpretativo, explicativo y descriptivo. Se organiza el análisis de acuerdo con el progreso en los conocimientos didácticos manifestado por los profesores participantes en momentos clave de la investigación: aplicación Guía Narrativa #1, desarrollo del curso-taller, y aplicación Guía Narrativa #2. El análisis realizado y los resultados obtenidos siguen a continuación.

4.1. Aplicación Guía Narrativa #1

Al aplicar la Guía Narrativa #1 se exploró, antes de que diera inicio la experiencia formativa, los conocimientos didácticos de los profesores participantes sobre el análisis de tareas matemáticas escolares. Durante la administración de dicho instrumento los profesores también manifestaron sus expectativas de aprendizaje y los intereses personales y profesionales que motivaron su participación en el curso-taller. Vale recordar que la Guía Narrativa #1 incluye cuatro tareas para que los profesores las analizaran a partir de sus conocimientos y su experiencia (ver anexo 1).

En la tabla 4.1. se detallan las variables que fueron establecidas en esta investigación como indicadores del conocimiento didáctico de los profesores sobre el análisis de tareas matemáticas escolares. La identificación de estas variables en el análisis de las tareas realizado por los

participantes, y el nivel de reflexión que manifiestan sobre estas variables, determinan el estado inicial del conocimiento didáctico de los profesores en formación inicial.

Tabla 4.1

Variables de tarea como indicadores del conocimiento didáctico

Código	Variable
E1	Redacción clara del enunciado
E2	Situación
E3	Contenido matemático
E4	Autenticidad de la situación
E5	Procedimientos asociados a la resolución
E6	Procesos matemáticos que intervienen
E7	Nivel de complejidad
E8	Cuestión relevante
E9	Teorías de enseñanza
E10	Habilidades asociadas al contenido
E11	Sistemas de representación
E12	Recursos y materiales
E13	Conocimientos previos
E14	Errores y dificultades

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 4.2. se puntualizan las variables que los profesores participantes consideraron en el análisis de las cuatro tareas incluidas en la Guía Narrativa #1. Para garantizar la confidencialidad de los profesores en formación inicial, se asignó aleatoriamente un código a cada uno de ellos (P_i , $i=1, \dots, 6$).

Los profesores participantes que más variables identificaron al analizar las cuatro tareas fueron P_2 , P_3 y P_5 . Específicamente se refirieron a: la situación usada para enmarcar las tareas, el contenido matemático abordado en estas, y procedimientos vinculados con las resoluciones. Asimismo, destacan la resolución de problemas como la teoría de enseñanza que va acorde con el planteamiento de las tareas, puntualizan errores y dificultades que se pueden manifestar en su abordaje y mencionan representaciones con las que se pueden expresar las ideas matemáticas. Adicionalmente, P_2 y P_5 hacen referencia a la redacción de los enunciados, P_2 hace alusión a los conocimientos previos que son necesarios para resolver las tareas y P_5 menciona recursos que pueden usarse para su abordaje.

Por su parte, P₁ y P₄ solamente identifican en las tareas procedimientos vinculados con las resoluciones y la teoría de enseñanza en la que se pueden encuadrar; nuevamente la resolución de problemas es la estrategia de enseñanza señalada. El profesor P₆ entrega la Guía Narrativa #1 sin completar, y afirma que no tiene conocimientos para analizar las tareas.

Tabla 4.2.

Variables consideradas en el análisis de las tareas de la Guía Narrativa #1

Profesor	Tarea	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
P1	T1					x				x					
	T2					x				x					
	T3									x					
	T4					x				x					
P2	T1	x	x	x		x				x				x	
	T2	x	x	x											x
	T3		x	x		x				x		x			
	T4					x				x				x	
P3	T1		x	x		x				x		x			
	T2									x		x		x	
	T3		x	x		x				x		x			
	T4		x	x						x				x	
P4	T1		x							x					
	T2									x				x	
	T3					x				x					
	T4					x				x					
P5	T1	x	x	x		x				x		x			
	T2	x	x							x			x		x
	T3		x	x		x				x					
	T4	x	x	x											
P6	T1														
	T2														
	T3														
	T4														

Fuente: Elaboración propia

Aun cuando la mayoría de los profesores en formación inicial hicieran referencia a algunas de las variables establecidas para determinar su conocimiento didáctico, estas no se presentaron con la misma intensidad en el análisis de todas las tareas. Salvo el profesor P₁ que en todas las tareas solamente señaló procedimientos vinculados con las resoluciones y la teoría de resolución de problemas como estrategia de enseñanza principal, los demás profesores que completaron la guía no logran identificar la misma variable en todas las tareas. Por ejemplo, P₅ identifica el contenido matemático en tres tareas y solo se refiere a recursos o a errores y dificultades en una tarea.

En cuanto a las variables de tarea más identificadas por los profesores de matemática en formación inicial sobresalen la situación que se emplea para enmarcar las tareas, los procedimientos vinculados a las resoluciones y las teorías de enseñanza. Por su parte, cinco de las variables no fueron identificadas por alguno de los profesores, a saber: la autenticidad de la situación, si la cuestión planteada es relevante, los procesos matemáticos, el nivel de complejidad y las habilidades.

Nótese que a pesar de haberse identificado las situaciones en algunas de las tareas los profesores no se refieren a la autenticidad de estas; información importante para determinar si las tareas dan lugar a la contextualización activa. Además, al no determinarse el nivel de complejidad, mediante la identificación del grado de intervención de los procesos matemáticos, y al no reconocer las habilidades asociadas a los contenidos matemáticos que se abordan, el profesor en formación inicial carece de información para valorar si las tareas analizadas satisfacen la función para la cual fueron diseñadas, la cual corresponde a promover la competencia matemática escolar.

Asimismo, el nivel de reflexión manifestado por los profesores en formación inicial en esta etapa de la investigación es básico. El análisis que hacen de las tareas se fundamenta en la identificación de las variables, acompañada de una descripción diluida o inapropiada de estas, es decir, se refieren a las variables de tarea con pocos argumentos, en su mayoría carentes de claridad y precisión. Por ejemplo, al analizar la Tarea 1, el profesor P₅ menciona que *“el servicio de UBER es la situación que tiene la tarea, la cual permite que el estudiante vea la matemática aplicada a la vida cotidiana”*, por su parte el profesor P₂ indica que *“la tarea está bien redactada pero tiene muchos pasos por lo que tiene un nivel de complejidad difícil”*. Este tipo de argumentaciones pone

en evidencia que los profesores en formación inicial conocen de algunos elementos para el análisis de las tareas pero no comprenden la relación entre estos.

En este sentido, un análisis profundo de la tarea requiere determinar si la situación identificada refleja la realidad de manera genuina y genera una cuestión relevante para el contexto planteado. Igualmente, es indispensable diferenciar entre la dificultad y la complejidad de una tarea. La dificultad es una noción más subjetiva y puede variar de una persona a otra, lo que puede ser difícil para una persona puede no serlo necesariamente para otra, esto depende de las habilidades y las experiencias individuales. Por su parte, la complejidad, como ya se ha mencionado anteriormente, depende exclusivamente de los procesos matemáticos que se movilicen en esta.

Con respecto a las expectativas de aprendizaje e intereses, tanto personales como profesionales, de los profesores en formación inicial, se logra constatar que con la experiencia formativa esperaban clarificar y mejorar sus conocimientos en cuanto a la identificación y comprensión de elementos que les permitan analizar tareas matemáticas escolares, lo cual repercutirá favorablemente en sus prácticas de enseñanza. El profesor P₁ comentó: *El curso me va a preparar para cuando sea docente en un aula, a la vez que me permitirá comprender cada noción definida en los programas de estudio de matemáticas.* El profesor P₆ mencionó: *Me inscribí en este curso porque considero muy importante abordar aspectos teóricos sólidos que me permitan analizar tareas que permitan desarrollar lo que se pretende en el programa de estudios.*

Las imprecisiones detectadas en el análisis de las cuatro tareas incluidas en la Guía Narrativa #1 y las expectativas con el curso-taller expresadas por los profesores en formación inicial, robustecen la necesidad de contribuir al fortalecimiento de sus conocimientos didácticos que les permitan implementar satisfactoriamente las directrices curriculares; particularmente aquellas relacionadas con el análisis de tareas que fomenten la alfabetización matemática de sus estudiantes; una vez se incorporen a trabajar en alguna institución educativa.

4.2. Desarrollo del curso-taller

Primera sesión

En la primera sesión de la experiencia formativa los profesores en formación inicial reflexionaron sobre el marco conceptual en el que se sustenta el curso-taller, con el propósito de

establecer una conexión entre las nociones básicas que fundamentan el currículo costarricense de matemáticas, y así, los profesores pudieran reconocer las implicaciones de esta relación: plantear tareas que favorezcan el desarrollo de la competencia matemática escolar. A continuación, se detallan las reflexiones llevadas a cabo en esta sesión del curso-taller.

Los profesores identificaron las siguientes nociones: las habilidades; los procesos matemáticos; las áreas temáticas; los ejes disciplinares, particularmente la resolución de problemas y la contextualización activa; y las etapas para organizar el desarrollo de las lecciones. Es importante destacar que ninguno de los profesores mencionó la competencia matemática como una noción central del currículo.

Además, consideraron que las relaciones entre estas nociones están orientadas al propósito de la enseñanza, esto es, enseñar para la aplicación de contenidos y el logro de habilidades. En palabras del profesor P₄ *“se deben proponer problemas en contextos reales para que los estudiantes puedan aplicar todo lo aprendido, tanto los conceptos como las habilidades que se establecen en los programas de estudio, el punto complicado en todo esto es que no sé cómo hacerlo”*. Este tipo de reflexión evidencia que los profesores comprenden la finalidad que en conjunto persiguen las nociones del currículo, no obstante, no tienen clara la vinculación entre dichas nociones.

Al reflexionar sobre el papel de la competencia matemática en el currículo, los profesores mencionaron que esta permite el desarrollo de conocimientos y la aplicación de estos para resolver problemas, lo que conlleva el planteamiento de estrategias metodológicas que permitan al estudiante tener un rol activo en el progreso de su aprendizaje; destacaron la resolución de problemas contextualizados como metodología de trabajo en las aulas. El profesor P₅ manifestó que *“la resolución de problemas, entendida desde la perspectiva propuesta en los programas de estudio, permitiría que los estudiantes cuenten con las habilidades necesarias para que por sí solos puedan valorar la realidad que los rodea de forma crítica”*. Así, se puede afirmar que los profesores reconocen la utilidad práctica de la noción de competencia como parte integral del currículo.

Sin embargo, ignoran la importancia de la competencia matemática como elemento curricular. Por ejemplo, el profesor P₃ señaló que *“para promover el aprendizaje de los estudiantes es suficiente con contextualizar los conceptos por medio de situaciones reales, mostrando a los*

estudiantes la utilidad que tiene la matemática en su vida”. Este tipo de razonamiento desmerita el papel de otros elementos del currículo, que en su articulación son fundamentales para el desarrollo de la competencia matemática escolar, como los procesos matemáticos.

En este sentido, los profesores consideran que el aprendizaje está vinculado a la cantidad de conocimientos matemáticos que tiene el estudiante y a la manera en que se usan estos conocimientos en situaciones reales. El profesor P₄ comentó que *“para ver si los estudiantes están aprendiendo, usted debe proponerles, en un examen o en una práctica, que resuelvan un problema de la vida cotidiana en el que apliquen todo lo que saben”*. El considerar el contexto en el que se plantean los problemas como una prioridad, sugiere la aplicación del conocimiento matemático a situaciones reales como medio para desarrollar la competencia matemática. Ningún profesor consideró el análisis de tareas como aspectos relevantes para promover la competencia matemática escolar.

Ahora bien, al reflexionar sobre el concepto de tarea matemática escolar, los profesores se refirieron a obligaciones que el estudiante debe atender en tiempo fuera de clase y cuya finalidad se centra en repasar los contenidos ya estudiados; en la mayoría de los casos mediante la resolución de listas extensas de ejercicios. Aunado a esto, afirmaron que para proponer una tarea tomarían en cuenta los programas de estudio y los libros de texto; de los primeros considerarían los contenidos y las habilidades, y de los segundos las listas de ejercicios. Estas reflexiones ponen de manifiesto una noción de tarea alejada de la visión que se tiene de esta en el currículo. Por tanto, aseveran que propondrían tareas a partir de aquellos aspectos que consideran importantes y no manifiestan disponer de conocimiento conceptual y técnico sobre el análisis de tareas matemáticas escolares.

Segunda sesión

En la segunda sesión del curso-taller los profesores en formación inicial se enfrentaron a actividades que les permitiera conceptualizar y caracterizar las tareas matemáticas escolares, y conceptualizar variables de tarea según el marco conceptual del currículo costarricense de matemáticas y el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK. Además, estas actividades permitieron la valoración y aplicación de las variables de tarea en el análisis de tareas matemáticas escolares. Primero se conceptualizaron cada una de las variables de tarea por sí misma hasta terminar con la interrelación de todas ellas. A continuación se detallan las reflexiones llevadas a cabo en esta sesión del curso-taller.

Al reflexionar sobre las variables de tarea que se debían considerar en el análisis de tareas matemáticas escolares, los profesores en formación inicial mencionaron las siguientes variables: el contenido matemático, las situaciones, las habilidades, los procesos matemáticos, los niveles de complejidad, los procedimientos vinculados a la resolución de las tareas, los posibles errores y dificultades que pueden manifestar los estudiantes que resuelven las tareas, y aspectos sobre la instrucción (organización y características de los estudiantes).

Con respecto a las variables contenido matemático, situaciones y habilidades, los profesores lograron relacionarlas y destacar este vínculo para el análisis de tareas. En palabras del profesor P₂ *“las situaciones son medio para desarrollar las habilidades que están relacionadas a los contenidos matemáticos”*. El profesor P₅ agrega que *“al relacionar las situaciones con las habilidades y los contenidos matemáticos los estudiantes podrán aprender con mayor sentido, es decir, serán capaces de comprender la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana”*.

Es así como los profesores puntualizaron la importancia de la modelización para la contextualización activa. Los profesores consideran que la modelización es una herramienta fundamental en el análisis de tareas porque todos los modelos que dan sentido a la modelización matemática emergen de la realidad. El profesor P₄ mencionó que *“La modelización es una herramienta que contextualiza la matemática con fenómenos naturales reales, además nos ayuda a desarrollar problemas cercanos para los alumnos”*. El profesor P₁, haciendo uso de lo aprendido en la sesión, complementó, *“con la modelización se pueden proponer problemas en contextos reales y con cuestiones relevantes y auténticas”*.

Por otro lado, los profesores reflexionaron sobre la articulación entre los procesos matemáticos, las habilidades y la noción de competencia matemática. En sus reflexiones describían a los procesos matemáticos como las actividades cognitivas que favorecen el desarrollo de habilidades, las cuales están vinculadas a la competencia matemática. El profesor P₅ señaló que *“la competencia se desarrollará dependiendo de los procesos a los que se hayan visto expuestos los estudiantes”*. El profesor P₂ explicó que *“las tareas van a depender de las expectativas que tenga el profesor y el vínculo es que todas las variables están ligadas, esto se debe a que los procesos impulsan las habilidades que se proponen en los programas y las habilidades responden a las competencias que se persiguen”*. El profesor P₆ puntualizó que *“la habilidad está relacionada con el contenido matemático, la competencia se enfoca en la capacidad para aplicar*

esa habilidad en la resolución de problemas en contextos reales, y con respecto a los procesos estos se deben aplicar para el desarrollo de la habilidad. Por ejemplo, en el desarrollo de la habilidad pueden darse varios procesos, no necesariamente solo uno.

En cuanto a la complejidad de una tarea, los profesores reflexionaron sobre cómo el grado de intervención de los procesos matemáticos que se movilizan en esta determinan su complejidad. En este orden de ideas el profesor P₄ comentó, *“la complejidad de una tarea depende del tipo de procesos matemáticos que se proponen, entre más procesos se propongan y ojalá en grados 2 ó 3, la tarea será una tarea de conexión o reflexión, con este tipo de tareas la competencia se fomenta.*

Las reflexiones realizadas por los profesores en esta sesión del curso-taller evidenciaron un progreso en su conocimiento didáctico sobre el análisis de tareas matemáticas escolares, en comparación con el conocimiento manifestado en la Guía Narrativa #1 y en la primera sesión de la experiencia formativa. Los profesores manifiestan con mayor claridad la relación entre las diferentes variables a considerar en el análisis de tareas que pretendan el desarrollo de la competencia matemática. Particularmente manifestaron un progreso en el concepto de tarea. El profesor P₂ explicó, *“una tarea matemática escolar es una actividad que el profesor propone para que en su resolución el estudiante use las matemáticas aprendidas”*. El profesor P₅ agregó que *“las tareas deben ser demandas cognitivas estructuradas y en su diseño intervienen variables como el contenido matemático, las habilidades, los procesos matemáticos, el contexto y los niveles de complejidad”*.

Tercera sesión

En la tercera sesión del curso-taller los profesores en formación inicial abordaron actividades que les permitieran analizar tareas matemáticas escolares, esto con el propósito de afianzar los conocimientos, conceptos y técnicas estudiadas previamente. Para este punto de la experiencia formativa las reflexiones que se hicieron iban orientadas a la valoración del curso-taller; particularmente sobre la utilidad de lo aprendido para su formación profesional. A continuación, se detallan las reflexiones llevadas a cabo en esta sesión.

Bajo esta consideración, los profesores aseguran haber experimentado un avance en su conocimiento teórico al comprender la importancia de la noción de competencia como parte

integral del currículo y el vínculo entre las nociones curriculares. El profesor P₁ identificó como avance teórico *“la claridad con la que ahora visualizo la competencia matemática, su papel en el currículo, y como los contenidos, las habilidades, los procesos matemáticos, y otros conceptos se relacionan para garantizar el desarrollo de la competencia de los estudiantes”*.

Asimismo, valoran la adquisición y el desarrollo de conocimientos sobre tareas, su análisis y caracterización, así como las variables que las integran. El profesor P₆ señaló que *“en la primera sesión tenía una noción de tarea que fue mejorando a lo largo del curso. Ahora me cuestiono el tipo de tareas que veo en los libros y cuáles podría usar más adelante para promover la competencia matemática*. El profesor P₃ mencionó que *“ahora tengo mayor cantidad de criterios para poder tomar la decisión de que problema puede promover la competencia matemática*.

También reportaron cambios en sus actitudes. Para ellos, su participación en el curso-taller fomentó: una postura más positiva hacia las directrices curriculares; la visión crítica de sus futuras prácticas de aula; la motivación de aplicar lo aprendido; y la intención de compartir con otros profesores en formación inicial la experiencia.

Finalmente, los profesores valoraron los beneficios del curso-taller como experiencia de desarrollo profesional y admitieron haber adquirido capacidades y conocimientos directamente relacionados con sus competencias profesionales sobre currículo, enseñanza y aprendizaje.

4.3. Guía Narrativa #2

Al aplicar la Guía Narrativa #2 se indagó, después de que acabara la experiencia formativa, los conocimientos didácticos de los profesores participantes sobre el análisis de tareas matemáticas escolares. Vale recordar que la Guía Narrativa #2 incluye las mismas cuatro tareas que los profesores analizaron en la Guía Narrativa #1, la diferencia recae en que ahora el análisis de las tareas se hizo a partir de los conocimientos desarrollados durante su participación en el curso-taller. En la tabla 4.3. se puntualizan las variables que los profesores participantes consideraron en el análisis de las cuatro tareas incluidas en la Guía Narrativa #2.

En el análisis de las tareas todos los profesores en formación inicial identificaron al menos 11 variables. Las variables que no fueron identificadas por algunos de los profesores corresponden a: redacción clara del enunciado (no fue identificada por los profesores P₂ y P₃), recursos y materiales (no fue identificada por los profesores P₁, P₂ y P₆) y conocimientos previos (no fue

identificada por los profesores P₃ y P₆). Cabe mencionar que durante el desarrollo del curso-taller se le dio mayor prioridad a las 11 variables que fueron identificadas por los profesores, por lo que es natural que las otras tres variables no fueran referidas por algunos de los profesores en formación inicial.

Tabla 4.3.

Variables consideradas en el análisis de las tareas de la Guía Narrativa #2

Profesor	Tarea	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
P1	T1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x
	T2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x
	T3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	
	T4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	
P2	T1		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			
	T2		x	x	x		x	x	x	x	x	x			x
	T3		x	x	x		x	x	x	x	x	x			
	T4		x	x	x	x	x	x	x	x	x				
P3	T1		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
	T2		x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x
	T3		x	x	x		x	x	x	x	x		x		x
	T4		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		x
P4	T1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x	
	T2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x
	T3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	T4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x	
P5	T1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	T2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	T3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	T4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
P6	T1	x	x	x	x		x	x	x	x	x				x
	T2	x	x	x	x		x	x	x	x	x				x
	T3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			
	T4	x	x	x	x		x	x	x	x	x				

Fuente: Elaboración propia

La identificación de la mayoría de las variables se da con la misma intensidad en el análisis de todas las tareas, esto es, que los profesores identificaron la misma variable en las cuatro tareas. Los procedimientos asociados a la resolución de las tareas, los procesos matemáticos y los sistemas de representación, son las variables que no fueron identificadas en las cuatro tareas por el mismo profesor. Por ejemplo, el profesor P₃ solamente reconoce algunos procedimientos para resolver las tareas T1 y T2, identifica procesos matemáticos para todas las tareas excepto para la tarea T3 y solo menciona sistemas de representación para las tareas T1 y T3.

En cuanto a las variables de tarea más identificadas por los profesores de matemática en formación inicial sobresalen: la situación, el contenido matemático, la autenticidad de la tarea, los procesos matemáticos, el nivel de complejidad, la cuestión relevante, teorías de enseñanza y habilidades asociadas al contenido matemático. Estas variables fueron identificadas por todos los profesores en formación inicial.

Al contrastar los análisis hechos en ambas guías narrativas, es notorio el aumento en la cantidad de variables que los profesores en formación inicial lograron identificar en el análisis posterior a su participación en la experiencia formativa. En particular destaca el profesor P₆, quien pasa de no completar la Guía Narrativa #1, según el participante por falta de conocimientos necesarios para analizar tareas, a identificar la mayoría de las variables en las cuatro tareas.

Además, los profesores reconocieron información suficiente para determinar si las tareas analizadas satisfacen la función para la cual fueron diseñadas. Una vez identificada la situación, tuvieron criterios para referirse a la autenticidad de esta y a la relevancia de las cuestiones que se plantearon, por lo que pudieron determinar si mediante las tareas tenía lugar la contextualización activa. Por otro lado, el vínculo entre habilidades y contenido matemático y la identificación de procesos matemáticos favoreció la determinación del nivel de complejidad de las tareas.

Igualmente, el nivel de reflexión manifestado por los profesores en formación inicial en esta etapa de la investigación mejoró considerablemente. El análisis que hacen de las tareas se basa en la identificación de las relaciones entre las variables de tarea, la evaluación crítica de las tareas y la búsqueda de alternativas de mejora. Además, sus argumentos, claros y precisos, se fundamentan en el marco conceptual abordado durante el desarrollo del curso-taller. A continuación se mostraran ejemplos que ilustran el análisis profundo que los profesores en formación inicial hicieron de las cuatro tareas.

Al analizar la Tarea 1, el profesor P₅ menciona que *“la tarea se enmarca en una situación bastante cercana al estudiantado, además es una temática actual, el UBER está de moda, por lo que puedo determinar que la situación es personal. Considero también que la situación es auténtica, pues se basa en tarifas reales, ajustadas a la realidad. De la misma manera, se puede decir que las cuestiones que se plantean son relevantes, en el sentido de que las preguntas que se hacen solo pueden contestarse apelando a la situación planteada, es decir, las preguntas se conectan significativamente con la situación que se plantea”*.

Por su parte, al determinar el nivel de complejidad de la Tarea 2 el profesor P₁ explica que *“en la tarea los estudiantes deben: establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas; expresar ideas, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático; y usar la conexión entre conceptos y procedimientos matemáticos y una situación real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos. De esta manera, los procesos matemáticos que aparecen en la tarea son de grado 3. Por lo tanto, la tarea es de reflexión”*. El profesor P₆ afirma que *“el estudiante debe realizar razonamientos matemáticos donde muestre que comprende los objetos matemáticos usados en la tarea y también debe resolver procedimientos no rutinarios. Estas acciones son de un grado superior por lo que puedo el nivel de complejidad de la tarea es reflexión”*.

Los profesores P₂ y P₄ proponen mejoras a la Tarea 3. El profesor P₂ indica que *“la tarea no genera una cuestión relevante, se queda en el mundo matemático, usted le quita el contexto y la tarea se resuelve sin ningún problema. Sugiero que se pregunten otras cosas que sean más pertinentes a la situación usada, además que se fomente la argumentación y que se soliciten más sistemas de representación”*. En este mismo orden de ideas, el profesor P₄ recomienda que *“la tarea debería impulsar el trabajo activo del estudiante, se debe promover la comprensión profunda y el desarrollo de habilidades matemáticas prácticas, para ello, yo redactaría la tarea diferente, inclusive agregaría pasos más puntuales para ir orientando al estudiante en su proceso de aprendizaje y para que resuelva la tarea con éxito. La tarea debe tener una cuestión clara y relevante y debe ser un problema de reflexión como mínimo para fomentar la competencia matemática de modelización”*.

El profesor P₃ sintetiza el análisis de la Tarea 4 de la siguiente manera: *“el contenido que se aborda en la tarea son las ecuaciones cuadráticas, y se le asocia la habilidad de resolver*

problemas en contextos reales utilizando la función cuadrática. Para resolver la tarea se deben utilizar tres sistemas de representación: tabular, gráfica y algebraica. Además, clasifico el problema como una tarea de conexión porque se tiene que razonar y argumentar, comunicar y representar; todo esto en grado 2. Las dificultades que se pueden presentar al resolver la tarea tienen que ver con errores algebraicos al resolver las ecuaciones que se planteen y calcular de manera equivocada el discriminante”.

Al finalizar el curso-taller los profesores son capaces de analizar una tarea matemática escolar mediante la caracterización de esta en términos de las variables de tarea estudiadas en el curso-taller: el contenido matemático tratado, las habilidades asociadas al contenido, la situación en la que se ubica la tarea, los procesos matemáticos que intervienen y el nivel de complejidad de la tarea a partir de la estructura de intervención de los procesos matemáticos, entre otros.

4.4. Cambios en el conocimiento didáctico de los profesores en formación inicial

Al caracterizar la competencia profesional de los profesores en términos de sus conocimientos didácticos sobre el análisis de tareas matemáticas escolares, conviene referirse específicamente a cada uno de los componentes de ese conocimiento y establecer diferencias entre los profesores en cuanto al desarrollo de su aprendizaje.

Uno de los principales cambios que experimentaron los profesores es la mejora en el conocimiento sobre la noción de competencia como componente curricular. A partir del análisis de las tareas hecho por los profesores en la Guía Narrativa #1 y sus reflexiones al iniciar el curso-taller, la formación se enfocó en el estudio de las nociones claves que sustentan el currículo, se conceptualizaron y se caracterizaron para posteriormente articularlas y justificar la importancia de esta articulación en la promoción de la competencia matemática escolar. De manera paralela los profesores ampliaron su comprensión de las tareas matemáticas escolares a partir de las variables de tarea que las componen.

Primero se atiende el vínculo entre habilidades y procesos matemáticos. Se constata que la perspectiva de los profesores sobre la competencia matemática, entendida esta como el dominio de un mayor número de contenidos matemáticos, se modificó en cuanto los profesores manifiestan que la movilización de los procesos matemáticos por medio de tareas persigue el desarrollo de habilidades.

Luego, al vínculo descrito anteriormente se agrega la variable situación. De esta manera, los profesores podían describir las tareas matemáticas escolares en términos de su relevancia y autenticidad, y resaltar el sentido práctico del contenido que se trabaja en el análisis de tareas.

Finalmente, se presenta la variable complejidad. El conjunto de criterios facilitados para determinar la complejidad de las tareas constituyó una herramienta valiosa para ampliar el conocimiento didáctico de los profesores. Se confirma que los profesores comprenden que el grado de intervención de los procesos matemáticos en una tarea matemática determina su complejidad en cuanto en el análisis de tareas asignan niveles distintos de complejidad a partir de los criterios estudiados en el curso-taller.

Al finalizar el curso-taller se puede constatar mediante la completación de la Guía Narrativa #2 que los profesores son capaces de analizar tareas que sean ricas matemáticamente en términos de contenido, pedagógicamente en términos de permitir el aprendizaje de las matemáticas de manera significativa y con una comprensión profunda, y personalmente para los estudiantes en términos de su interés y necesidades de aprendizaje.

Aunque no es un objetivo de la investigación, se logró determinar cambios en las actitudes de los profesores, se puede afirmar que estos participaron activamente en las actividades realizadas durante el curso-taller; esto pone en evidencia su actitud positiva hacia los temas y conceptos discutidos. Asimismo, manifestaron cambio en sus actitudes referentes a la motivación para aplicar lo aprendido en el aula, una vez inicien a trabajar y compartir la experiencia formativa con otros profesores en formación inicial.

Se puede asegurar que no existen diferencias significativas en el progreso de los profesores, todos manifestaron cambios en su conocimiento didáctico sobre el análisis de tareas matemáticas escolares en un nivel muy similar. Esto se puede observar en las intervenciones y reflexiones de los profesores durante las sesiones del curso-taller y en los argumentos que emplean al analizar las tareas en la Guía Narrativa #2, las cuales evidencian, para todos los profesores, un dominio significativo de los temas tratados en la experiencia formativa y un nivel de reflexión docente caracterizado por la criticidad y la argumentación fundamentada.

CAPÍTULO V

Conclusiones

Este capítulo consiste en una evaluación global de la investigación a partir de los resultados presentados en el Capítulo IV de esta memoria. En primer lugar, se detallan las conclusiones a las que se llegan. Inmediatamente se puntualiza el cumplimiento de los objetivos de investigación propuestos. Luego se discuten las limitaciones del estudio y se establecen algunas líneas de investigación futuras. Finalmente, se sugieren algunas recomendaciones. Se insiste en que los hallazgos corresponden exclusivamente a los participantes que forman parte de este estudio, por lo que no es posible establecer generalizaciones.

5.1. Conclusiones

La experiencia formativa que se diseñó e implementó proporcionó a los profesores en formación inicial un marco reflexivo común para analizar tareas que atendieran el desarrollo de la competencia matemática escolar. Con base a los objetivos que guiaron esta investigación, el marco teórico que la sostiene y los hallazgos presentados en el Capítulo IV de esta memoria, se enuncian las siguientes conclusiones:

- Los conocimientos didácticos necesarios para que los profesores en formación inicial analicen tareas que promuevan la competencia matemática escolar se ajustaron a los aspectos conceptuales que articulan el currículo costarricense de Matemáticas y al modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK. Las conceptualizaciones desarrolladas y las actividades realizadas en el curso-taller aportaron a los profesores las explicaciones pertinentes para que comprendieran las condiciones que, como promotores de la competencia matemática, deben satisfacer.
- El marco analítico, reflexivo y sistemático que se compartió con los profesores en formación inicial durante el curso-taller les permitió tanto revisar y estructurar sus conocimientos didácticos como avanzar en su desarrollo y profundización.
- Los profesores en formación inicial mejoraron su conocimiento sobre la noción de competencia como componente curricular y las implicaciones pedagógicas de los elementos curriculares para su práctica docente. Además, comprendieron la noción

de tarea matemática escolar a partir de las variables que la caracterizan y su función en los procesos de planificación, aprendizaje de sus alumnos y organización del trabajo docente.

- Los profesores en formación inicial desarrollaron la capacidad de analizar tareas que sean ricas matemáticamente en términos de contenido, pedagógicamente en términos de permitir el aprendizaje de las matemáticas de manera significativa y con una comprensión profunda, y personalmente para los estudiantes en términos de su interés y necesidades de aprendizaje.
- Los profesores en formación inicial participaron activamente en las actividades realizadas durante el curso-taller; esto pone en evidencia su actitud positiva hacia los temas y conceptos discutidos. Asimismo, manifestaron cambios en sus actitudes referentes a la motivación para aplicar lo aprendido en el aula y compartir la experiencia formativa con otros profesores en formación inicial.
- La medida y dirección descritas en los cambios en el conocimiento didáctico, las capacidades y las actitudes que evidenciaron los profesores en formación inicial, mediante contraste entre el estado inicial y el estado final de sus conocimientos, puso de manifiesto el avance en su competencia profesional para analizar tareas orientadas a promover la competencia matemática escolar.
- Los profesores en formación inicial valoraron los beneficios del curso-taller como experiencia de desarrollo profesional y admitieron haber adquirido capacidades y conocimientos relacionados con el análisis de tareas matemáticas escolares.
- Evidencias de otras investigaciones sugieren que la formación docente centrada en la competencia profesional sobre el análisis de tareas matemáticas promueve la alfabetización matemática escolar (Sullivan *et al.*, 2013). En este sentido, se puede afirmar que la potencialidad de los cambios experimentados por los profesores en formación inicial que participaron en el curso-taller permitirá mejorar y desarrollar la competencia matemática de sus futuros alumnos.

5.2. Cumplimiento de los objetivos de la investigación

Luego de analizar los resultados, la pregunta esencial que se debe formular en esta etapa de la investigación es qué implicaciones tienen los resultados obtenidos para los objetivos del

estudio. En otras palabras, ¿hasta qué punto se cumplieron los objetivos propuestos? Primero, se considera el cumplimiento de los objetivos específicos, y luego se evaluará el cumplimiento del objetivo general que orienta esta investigación.

Objetivo específico 1

El primer objetivo específico de esta investigación pretendía establecer los conocimientos didácticos necesarios para el análisis de tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar, según los requerimientos establecidos en el currículo de matemática costarricense. En el Capítulo II de esta memoria se conceptualizaron y caracterizaron las tareas matemáticas escolares, y se conceptualizaron variables de tarea según el marco conceptual del currículo costarricense de matemáticas y el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK. La valoración y aplicación de las variables de tarea articulan el conocimiento didáctico necesario para analizar tareas matemáticas escolares. Por lo tanto, se declara haber cumplido con el primer objetivo específico de la investigación.

Objetivo específico 2

El segundo objetivo específico de esta investigación pretendía describir los conocimientos didácticos, sobre el análisis de tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar, que tienen profesores en formación inicial. En el Capítulo IV de esta memoria se describen, ejemplifican y explican los argumentos con los que los profesores en formación inicial analizan las tareas matemáticas escolares propuestas en las dos guías narrativas. También se detallan las reflexiones hechas por los profesores durante su participación en el curso-taller. Sus argumentos y reflexiones dan cuenta sobre el conocimiento didáctico sobre análisis de tareas manifestado por los profesores. Con base a dichos resultados, se concluye que el segundo objetivo específico fue alcanzado.

Objetivo específico 3

El tercer objetivo específico de esta investigación pretendía explicar los cambios en los conocimientos didácticos de profesores en formación inicial, sobre el análisis de tareas orientadas a la promoción de la competencia matemática escolar, luego de su participación en una experiencia formativa. De acuerdo con los resultados valorados se determina que los profesores en formación inicial evidenciaron progreso en su conocimiento didáctico, durante el desarrollo de las sesiones

de la experiencia formativa. Estas evidencias permitieron describir el progreso en la competencia profesional para analizar tareas matemáticas escolares, cumpliendo así el tercer objetivo específico de la investigación.

Objetivo general

El objetivo general que orienta esta investigación es caracterizar el conocimiento didáctico, sobre el análisis de tareas diseñadas para promover la competencia matemática escolar, que desarrollan profesores en formación inicial a partir de su participación en una experiencia de desarrollo profesional. En términos generales, se caracteriza el conocimiento didáctico de los profesores en formación inicial en términos de la valoración y la aplicación de variables de tarea para el análisis de tareas matemáticas. Dichas variables fueron conceptualizadas durante una experiencia de desarrollo profesional en la que participaron los profesores. Por lo tanto, se concluye que la evaluación del objetivo general de la investigación es afirmativa: el objetivo general se ha cumplido.

5.3. Limitaciones del estudio

Se reconoce que la investigación presenta dos limitaciones principales.

1. Aunque la información aportada por los seis profesores en formación inicial que participaron en la experiencia formativa ha sido rica y relevante, se comprende que con un mayor número de asistentes se hubiera obtenido mayor variedad en los resultados y, eventualmente, los aportes serían más contrastables.
2. El curso-taller se realizó de forma virtual, a petición de los profesores en formación inicial, esto como repercusión de la situación sanitaria provocada por la pandemia de la Covid-19, lo que llevó a replantearse el diseño del curso-taller, planificado originalmente en una edición presencial. La experiencia formativa implementada de forma presencial hubiera permitido el desarrollo más pausado de los objetivos de formación y la profundización de otros elementos interesantes para el análisis de tareas, por ejemplo, la función que cumple una tarea en una secuencia didáctica.

5.4. Líneas futuras de investigación

A la luz de los resultados evaluados, las conclusiones derivadas de estos y la revisión de las áreas que se estiman más apropiadas para la investigación continua sobre las tareas matemáticas

escolares y el conocimiento del profesor de matemáticas, se sugieren las siguientes líneas futuras de investigación:

1. Replicar la investigación en otros contextos, por ejemplo con profesores de primaria o secundaria, y aplicar una metodología que permita establecer la relación entre el desarrollo profesional, las prácticas de aula y el desempeño de los alumnos.
2. Estudios orientados a determinar el conocimiento del profesorado de matemáticas en servicio o en formación inicial, sobre el diseño de tareas matemáticas escolares orientadas tanto a la promoción como a la evaluación de la competencia matemática escolar.
3. Evaluar el impacto de la experiencia formativa a largo plazo, cómo el aprendizaje adquirido y las capacidades desarrolladas influyen en el desempeño diario en términos de cuáles cambios relacionados con la experiencia de desarrollo profesional aportada con el curso-taller se mantienen.

5.5. Recomendaciones

A continuación, se presentan algunas recomendaciones que se pusieron de manifiesto durante el análisis de información. Se indican según la instancia o al conjunto de personas a las que van dirigidas.

Recomendaciones para la Escuela de Matemática de la UNA

El curso-taller Análisis de Tareas Matemáticas se puede implementar como parte del programa de estudios de la carrera Enseñanza de la Matemática, mediante un curso optativo, donde se conceptualicen las variables de tarea necesarias para el análisis de las tareas matemáticas escolares. Asimismo, el curso-taller podría ajustarse al diseño de tareas matemáticas escolares.

Recomendaciones para el MEP

Realizar capacitaciones donde se enseñe a los docentes en servicio a seleccionar, analizar y diseñar tareas matemáticas escolares según el marco conceptual del currículo costarricense de matemáticas y el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK.

Recomendaciones para los profesores en servicio

El desarrollo profesional es un viaje continuo. Por lo que se sugiere a los profesores de matemáticas en servicio a mantenerse comprometidos con su crecimiento profesional, buscando oportunidades para aprender y adaptando sus prácticas pedagógicas para satisfacer las necesidades cambiantes de los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

- Abreu, J. L., (2012). Hypothesis, Method y Research Design. *Daena: International Journal of Good Conscience*, 7(2), 187-197.
- Aguilar, A., Carmona, E., Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Flores, P., Huitrado, J. L., Montes, M. A., Muñoz-Catalán, M. C., Rojas, N., Sosa, L., Vasco, D. y Zakaryan, D. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. <http://dx.doi.org/10.13140/2.1.3107.4246>
- Aguayo-Arraigada, C. G. (2018). *El análisis didáctico en la formación inicial de maestros de primaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/54625/62921.pdf>
- Araújo, T., De Oliveira, M. y De Albuquerque, R. (2018). La formación docente en el programa institucional de becas de iniciación a la docencia (PIBID). *Calidad en la Educación*, (49), 234-264. DOI: <http://dx.doi.org/10.31619/caledu.n49.581>
- Avalo, A., Bedoya, N. M., Gallo, E. A. y Tovar, A. (2012). Análisis de tareas matemáticas propuestas a niños sordos en los primeros años de escolaridad. *Matemática Educativa*, 92-98. <http://funes.uniandes.edu.co/2358/1/AnalisisAvaloAsocolme2012.pdf>
- Baartman, L. K. J., Bastiaens, T. J. y Kirschner, P. A. (2004). *Requirements for competency assessment programmes*. Onderwijs Research Dagen.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>.
- Bardin, I. (2002). *El análisis de contenido*. Editorial Akal.
- Beckmann, C. E., Wells, P. J., Gabrosek, J., Billings, E. H., Aboufadel, E. F., Curtiss, P., Dickinson, W., Austin, D. y Champion, A. (2004). Enhancing the mathematical understanding of prospective teachers: Using standards-based, grades K-12 activities. *Perspectives on the teaching of mathematics*, 151-163.
- Benavides, M. O., y Gómez-Restrepo, C. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Revista colombiana de psiquiatría*, 34(1), 118-124.

- Blanco-Álvarez, H., y Castellanos, M. T. (2017). La formación de maestros reflexivos sobre su propia práctica y el estudio de clase. *Observatório da educação III: práticas pedagógicas na educação básica*. 7-18.
- Blanco, L., Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento didáctico del contenido en ciencias y matemáticas y formación del profesorado. *Revista de Educación*, 427-446.
- Blanco, L. J. (1997). *Tipos de tareas para desarrollar el conocimiento didáctico del contenido*. Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 34-40.
- Boston, M. y Smith, M. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: Increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 119-156.
- Cañadas, M.C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/1581>
- Caraballo, R. M. (2014). *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas: Una experiencia con profesores*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/35214>
- Caraballo, R. M., Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2011). *Pruebas autonómicas de diagnóstico para evaluar la competencia matemática en educación secundaria*. Actas del XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 107-118.
- Cardeñoso, J. M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). *El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática*. En P. Gómez, y L. Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Careaga, A., Sica, R., Cirillo, A. y Da Luz, S. (2006). *Aportes para diseñar e implementar un taller*. Comunicación presentada en el 8vo Seminario-Taller en Desarrollo Profesional Médico Continuo (DPMC). Segundas Jornadas de Experiencias Educativas en DPMC. Departamento de Maldonado, Uruguay.

- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D.D. y Muñoz-Catalán, C. (2018). *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) Model. Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.
- Castellanos, M. T. (2017). *Reflexión de futuros profesores durante las prácticas de enseñanza*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/49019>
- Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2017). Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre problemas profesionales relacionados con la enseñanza del álgebra escolar. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 31(57). 408-429. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a20>
- Castillo, E.M. (2003). *Los métodos de la enseñanza problemática como estrategia para el taller integrador I de la FIME*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Nuevo León]. <http://cdigital.dgb.uanl.mx/te/1020148506.PDF>
- Castro-Rodríguez, E., Castro, E. y Torralbo, M. (2013). *El análisis fenomenológico en la formación inicial de profesores*. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en educación matemática* (pp.141-160). Granada, España: Editorial Comares.
- Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 1-6. <https://doi:10.1007/s10857-013-9234-7>.
- Clarke, B., Grevholm, B. y Millman, R. (2009). *Tasks in primary mathematics teacher education. Purpose, use and exemplars*. Nueva York, NY: Springer.
- Climent, N., Escudero-Ávila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C. y Sosa, L. (2014). *El conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática. Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK*, 42-69.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203224342>.
- Del Villas, F. (1994). La credibilidad de la Investigación cualitativa en la enseñanza de la educación física. *Apuntes: Educación Física y Deportes*, 37, 26-33.

- Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. [Tesis de Doctorado, Universidad de Huelva]. <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456>
- Fernández Álvarez, H., Morales Reyes, J. L. y Quesada Segura, S. (2018). *Análisis didáctico, como fundamentación teórica, en la elaboración de materiales didácticos coherentes con el Programa de Estudios de Matemática de Costa Rica: el caso de la función lineal y de la función cuadrática*. [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Costa Rica]. <http://hdl.handle.net/11056/26060>
- Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA*. 1(4), 139-159.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo J. (2014). *Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK*, 70-92.
- Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C. y Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Boletín de Educación Matemática*, 30(54), 204-221. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10>
- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). *Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo*. En M. T. González, M. Codes, D. ArnauT y Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 327-336). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- García, G. y Torres, L. (2014). *Una propuesta para el diseño curricular en el área de Geometría Euclídea, basada en un enfoque por competencias, para la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica*. [Tesis de grado, Universidad Nacional de Costa Rica]. <http://hdl.handle.net/11056/25898>
- Gil, F. (1999). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]

- Gil, D. y Vilches, A. (2006) ¿Cómo puede contribuir el proyecto PISA a la mejora de la enseñanza de las ciencias (y de otras áreas de conocimiento)?. *Revista de Educación, Extraordinario*, (1), 295-311.
- González-Monteaquedo, J. (2001). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: nuevas respuestas para viejos interrogantes. *Cuestiones pedagógicas*, (15), 227-246.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemática de secundaria*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada] <http://hdl.handle.net/10481/1483>
- Gómez, P. (2012). *Análisis didáctico en la práctica de la formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria*. En Gómez, Pedro (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp.1-18). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Guerrero, O. (2008). Educación matemática crítica. Influencias teóricas y aportes. *Evaluación e Investigación*, 1(3), 2-14.
- Hall, G. E. y Hord, S. M. (2001). *Implementing change: Patterns, principles, and potholes*. Boston: Allyn and Bacon.
- Henningsen, M. y Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549. <https://doi.org/10.2307/749690>.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México.
- Hiebert, J. y Wearne, D. (1997). Instructional tasks, classroom discourse and student learning in second grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30(2), 393-425. <https://doi.org/10.3102/00028312030002393>.
- Ivars, P., Ferandéz, C. y Llinares, S. (2016). Las narrativas de los estudiantes para maestro en las que describen lo que ellos consideran relevante sobre el aprendizaje se convierten así en una herramienta para su aprendizaje. *La matematica e la sua didattica*, 24(1). 79-96.

- Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169- 202.
- Jiménez, R. (1998). *Metodología de la investigación elementos básicos para la investigación clínica*. La Habana.
- Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, 47(1), 101-116.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding in up: Helping children learn mathematics*. Washington D.C.: National Academy Press.
- Leander, K. y Osborne, M. (2008). Complex positioning: teachers as agents of curricular and pedagogical reform. *Journal of Curriculum Studies*, 40(1), 23-46. <https://doi:10.1080/00220270601089199>
- Liljedahl, P., Chernoff, E. y Zaskis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4): 239-249.
- Llinares, S. (2016). *Enseñar matemáticas y aprender a mirar de manera profesional la enseñanza. (Del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente: mirar profesionalmente)*. En G. A. Perafán, E. Badillo, A. Aduriz (coor) (2016). *Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas*. (pp. 211-236). Bogota, Colombia: Editorial Aula de Humanidades.
- Loría, J.R. y Lupiáñez, J.L. (2019). Estudio del conocimiento de profesores de secundaria sobre procesos matemáticos. *PNA*, 13(4), pp. 247-269.
- Loría, J.R. (2020). *Diseño de tareas para la evaluación de la Competencia Matemática escolar. Una experiencia con profesores de Costa Rica [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]*. <http://hdl.handle.net/10481/68159>
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de Aprendizaje y Planificación curricular en un Programa de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria [Tesis doctoral, Universidad de Granada]*. <http://hdl.handle.net/10481/2726>

- Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico. La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 103-120). Editorial Comares.
- Luttenberg, J., Van Veen, K., y Imants, J. (2013). Looking for cohesion: The role of search for meaning in the interaction between teacher and reform. *Research Papers in Education*, 28(3), 289-308. <https://doi:10.1080/02671522.2011.630746>.
- Madrigal, E. (2009). *Percepción de docentes en servicio sobre las competencias matemáticas y pedagógicas recibidas en la carrera de bachillerato y licenciatura en enseñanza de la matemática en la Universidad Nacional*. [Tesis de grado, Universidad Nacional de Costa Rica].
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice*. The discipline of noticing. London: Routledge Falmer.
- Miles, M., Huberman, A. y Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis*. Sage Publications.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Reforma curricular en ética, estética y ciudadanía. Programas de estudio de matemáticas*. San José, Costa Rica. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>
- Molina, M. (2007). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/1402>
- Moreno, A. y Ramirez-Uclés, R. (2016). *Variables y funciones de las tareas matemáticas*. En L. Rico & L. Moreno (Eds.), *Elementos de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp.243-255). Madrid, España: Pirámide.
- Morris, A. K., Hiebert, J., Spitzer, S. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can pre-service teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education*, (45), 491–521.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

- Niss, M. (2011). The Danish KOM Project and possible consequences for teacher education. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6(9), 13-24.
- Ñaupas, H., Mejía, E., Novoa, E., y Villagomez, A. (2014). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis*. Ediciones de la U. <https://corladancash.com/>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2012). *Synergies for better Learning: An International Perspective on Evaluation and Assessment*. OCDE.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematics and Financial Literacy*. OCDE Publishing.
- Orozco-Hormaza, M. (2000). El análisis de tareas: Cómo utilizarlo en la enseñanza de la matemática en primaria. *REVISTA EMA*, 5(2), 139-151.
- Otárola, Y. (2007). *El análisis de tareas como estrategia metodológica para acceder a la cognición encubierta. Evaluación de competencias básicas en grado cero: transición*. Ministerio de educación nacional de Colombia. Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española*. (23.^a ed.). Madrid.
- Ortíz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/55153>
- Ponte, J. P. (2012). *Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas*. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.
- Programa Estado de la Nación (2019). *Séptimo informe del Estado de la Educación*. Costa Rica.
- Programa Estado de la Nación (2023). *Vigésimo noveno informe del Estado de la Educación*. Costa Rica.
- Quecedo, R. y Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de psicodidáctica*, 14, 1-27.
- Rico, L. (Ed.) (1997). *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid.

- Rico, L. (1998). Concepto de Currículum desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum*, 1(4), 7-42.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid.
- Rico, L., Díez, A., Castro, E. y Lupiáñez, J. L. (2011). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el periodo 1945-2010. *Educación siglo XXI*, 29(2). 139-172.
- Ricoy-Lorenzo, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Educação*, 31(1), 11-22.
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/35199>
- Romero, I. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Editorial Comares.
- Ruiz, A. (2013). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, número especial*, 29-44.
- Ruiz, A. (2017). Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, número especial*, 57-138.
- Ruiz, A. (2019). *Desafíos de las pruebas FARO frente a la reforma de matemática*. Contribución especial realizada para el Séptimo Informe Estado de la Educación. San José: PEN.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.
- Sanni, R. (2012). Selection and implementation of tasks: an account of teacher's task practices. *Research Journal in Organizational Psychology & Educational Studies*, 1(2), 129-136.
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (Eds) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

- Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28(2), 151-174. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40546500006>
- Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Steketee, C. y McNaught, K. (2007). The Complexities for New Graduates Planning Mathematics Based on Student Need. En J. Watson y Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 671-677). MERGA.
- Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning*. New York: Springer.
- Tirosh, D. y Woods, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 2). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Thomas, D.A. (2006). General Inductive Approach for Analyzing Qualitative Evaluation Data. *American Journal of Evaluation*, 27(2), 237-246. <https://doi.org/10.1177/1098214005283748>.
- Torres-Rodríguez, A. A., Morales-Maure, L. M., Cáceres-Mesa, M. L. y Campos-Nava, M. (2019). Validación de un instrumento para caracterizar el Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor de matemáticas. *Revista Conrado*, 15(70), 267-273. <http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado>
- Torres, M., Paz, K. y Salazar, F. G. (2006). Métodos de recolección de datos para una investigación. *Rev. Electrónica Ingeniería Boletín*, 3, 12-20. http://fgsalazar.net/LANDIVAR/ING-PRIMERO/boletin03/URL_03_BAS01.pdf
- Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/23890>

Watson, A. y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 205-215.

Zaslavsky, O. (2008). *Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning*. En T. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 93-114). Rotterdam: Sense Publishers.

Anexos

Anexo 1



Guía Narrativa 1

Este documento consiste en una Guía narrativa que se enmarca dentro de una investigación titulada Conocimientos especializados que tienen los profesores en formación de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica sobre el análisis de tareas que promuevan la competencia matemática, cuyo objetivo principal es caracterizar los conocimientos especializados que tienen los profesores en formación de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica sobre el análisis de tareas que promuevan la competencia matemática.

Se agradece de antemano su participación en la investigación, y la colaboración y el tiempo brindado. La información recopilada, será confidencial y se utilizará únicamente para efectos de investigación.

Datos personales
Nombre: _____
Sexo: <input type="checkbox"/> Hombre <input type="checkbox"/> Mujer
Edad: _____
Año de la carrera en el que se encuentra: _____
Realizó práctica supervisada: <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Si
Labora en alguna institución actualmente: <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Si. Donde: _____.

Guía Narrativa 1

La presente guía narrativa tiene como principal propósito organizar sus aportes y recopilar información valiosa para la investigación. Consiste en una guía de trabajo con “tareas matemáticas”, entendidas como el objetivo de una actividad matemática, cuyo propósito es servir como herramienta para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje.

La Guía contiene cuatro tareas, que no necesariamente tienen que ser resueltas, sino, lo que se solicita es reflexionar sobre los procesos de resolución que pueden implicar y el trasfondo teórico y metodológico de las mismas. Las tareas propuestas fueron tomadas de libros de texto y exámenes de bachiller y son tareas que promueven el desarrollo de las competencias matemáticas.

Vistas las tareas por primera vez, es importante que tenga en cuenta las temáticas y las actividades desarrolladas en experiencias anteriores (tales como cursos de la carrera o ejemplos de la vida cotidiana).

Para estudio de esta Guía y realizar sus correspondientes narraciones, le sugerimos tomar el papel de profesor especializado en la enseñanza de la matemática.

Cada una de las cuatro tareas que componen la guía, se acompaña de un cuadro para escribir las narrativas que se desprendan del análisis de las mismas, con los aspectos que considere importantes evidenciar, respecto a la situación de enseñanza-aprendizaje observada. Puede utilizar consideraciones personales (ideas, pensamientos, puntos de vista) tanto objetivos como subjetivos, conocimientos adquiridos en su formación o experticia, entre otros.

Una vez leídas las consideraciones anteriores, puede proceder con la redacción de la narrativa, de ser necesario puede utilizar el espacio al reverso de cada página.

Tarea 2

En el jardín de una casa se desea colocar una decoración, similar a la de la imagen adjunta, sobre una sección triangular de medidas 2.5, 1.5 y 1.5 metros. Se pretende construir sobre él un prisma circular, y de concreto, de 1 metro de altura, de manera que el centro del prisma coincida con el centro del triángulo.

a. Determina la fórmula que modela el área de la base del prisma rectangular de la decoración.

b. Como parte de la decoración, al prisma, se le colocará cerámica; determina el costo a pagar por la cantidad de cerámica a comprar, se desea que la base del prisma tenga la mayor área posible (realiza la estimación con precio que ofrecen en la página web de El Lagar).



si
el

Narrativa de la Tarea 2

Tarea 4

Cuando un conductor de automóvil, que viaja a cierta velocidad, mira un obstáculo en la carretera, transcurre cierto intervalo de tiempo para que el conductor presione los frenos, lo que se conoce como tiempo de reacción, y otro intervalo de tiempo para que el vehículo se detenga (tiempo de frenado). Entre los intervalos de tiempo mencionados el vehículo recorre siempre cierta distancia, la cual depende de la velocidad con la que se transite. El siguiente cuadro presenta la velocidad en que transita un automóvil y la distancia total recorrida desde el instante en que el conductor mira el obstáculo y el automóvil se detiene.

¿Cuál es la velocidad máxima, que un vehículo debe mantener, para no chocar con el vehículo del frente que si detiene de repente? Tome en cuenta que, las leyes costarricenses obligan que un vehículo pesado se mantenga a una distancia mayor a 50 m del vehículo que va adelante, y suponga que los conductores siempre aplican esta ley.

Velocidad (km/h)	Distancia total recorrida (m)
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139

Narrativa Tarea 4

Anexo 2



Guía Narrativa 2

Este documento consiste en una Guía narrativa que se enmarca dentro de una investigación titulada Conocimientos especializados que tienen los profesores en formación de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica sobre el análisis de tareas que promuevan la competencia matemática, cuyo objetivo principal es caracterizar los conocimientos especializados que tienen los profesores en formación de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica sobre el análisis de tareas que promuevan la competencia matemática.

Se agradece de antemano su participación en la investigación, y la colaboración y el tiempo brindado. La información recopilada, será confidencial y se utilizará únicamente para efectos de investigación.

Datos personales
Nombre: _____
Sexo: <input type="checkbox"/> Hombre <input type="checkbox"/> Mujer
Edad: _____
Año de la carrera en el que se encuentra: _____
Realizó práctica supervisada: <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Si
Labora en alguna institución actualmente: <input type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Si. Donde: _____.

Guía Narrativa 2

La presente guía narrativa tiene como principal propósito organizar sus aportes y recopilar información valiosa para la investigación. Consiste en una guía de trabajo con “tareas matemáticas”, entendidas como el objetivo de una actividad matemática, cuyo propósito es servir como herramienta para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje.

La Guía contiene cuatro tareas, que no necesariamente tienen que ser resueltas, sino, lo que se solicita es reflexionar sobre los procesos de resolución que pueden implicar y el trasfondo teórico y metodológico de las mismas. Las tareas propuestas fueron tomadas de libros de texto y exámenes de bachiller y son tareas que promueven el desarrollo de las competencias matemáticas.

Vistas las tareas por primera vez, es importante que tenga en cuenta las temáticas y las actividades desarrolladas en experiencias anteriores (tales como cursos de la carrera o ejemplos de la vida cotidiana).

Para estudio de esta Guía y realizar sus correspondientes narraciones, le sugerimos tomar el papel de profesor especializado en la enseñanza de la matemática.

Cada una de las cuatro tareas que componen la guía, se acompaña de un cuadro para escribir las narrativas que se desprendan del análisis de las mismas, con los aspectos que considere importantes evidenciar, respecto a la situación de enseñanza-aprendizaje observada. Puede utilizar consideraciones personales (ideas, pensamientos, puntos de vista) tanto objetivos como subjetivos, conocimientos adquiridos en su formación o experticia, entre otros.

Una vez leídas las consideraciones anteriores, puede proceder con la redacción de la narrativa, de ser necesario puede utilizar el espacio al reverso de cada página.

Tarea 1

Juan fue a Nova Cinemas de Repretel con su novia a ver la película Liga de la Justicia, salieron de la sala a las 8:00pm, como saben que a esa hora es peligroso caminar por las afueras del lugar, ya que pueden ser víctimas de un asalto, y que el sector donde viven se ubica a 5km, entonces deciden contactar un servicio de transporte, en este caso un Uber. Ellos saben que, actualmente para trasladarse en un Uber, el costo varía dependiendo de si es un UberX o un UberXL; dado que en un UberX pueden viajar 4 personas, mientras que en un UberXL pueden viajar 6 personas. Las tarifas toman en cuenta los kilómetros de viaje y el tiempo de duración del mismo en la siguiente tabla aparece el costo de cada rubro, para cada uno de los tipos de Uber.

Tipo	Tarifa base (1km)	Costo por minuto	Costo por km adicional
UberX	400	40	240
UberXL	750	75	450

Fuente: www.ubertarifa.com

Determine la tarifa, aproximada, que debe pagar Juan por dicho viaje; considerando que, por el congestionamiento vehicular de nuestro país, el automóvil podría durar alrededor de 10 minutos para trasladarse desde el cine, donde andaban, hasta su casa de habitación.

Narrativa de la Tarea 1

Tarea 2

En el jardín de una casa se desea colocar una decoración, similar a la de la imagen adjunta, sobre una sección triangular de medidas 2.5, 1.5 y 1.5 metros. Se pretende construir sobre él un prisma circular, y de concreto, de 1 metro de altura, de manera que el centro del prisma coincida con el centro del triángulo.

a. Determina la fórmula que modela el área de la base del prisma rectangular de la decoración.

b. Como parte de la decoración, al prisma, se le colocará cerámica; determina el costo a pagar por la cantidad de cerámica a comprar, se desea que la base del prisma tenga la mayor área posible (realiza la estimación con precio que ofrecen en la página web de El Lagar).



EL LAGAR TODO EN UN MISMO LUGAR				
INICIO	ACABADOS ▾	ACERO ▾	HERRAMIENTAS ▾	HOGAR ▾
PISO CERAM ALAMEDA BLANCO PISO 40X40CM ECUACER (CAJA 2MTRS)	PISO CERAM ALAMEDA NEGRO PISO 40X40CM ECUACER (CAJA 2MTRS)			
€ 9,599.46 I.V.I	€ 9,599.46 I.V.I			

si
el

Narrativa de la Tarea 2

Tarea 4

Cuando un conductor de automóvil, que viaja a cierta velocidad, mira un obstáculo en la carretera, transcurre cierto intervalo de tiempo para que el conductor presione los frenos, lo que se conoce como tiempo de reacción, y otro intervalo de tiempo para que el vehículo se detenga (tiempo de frenado). Entre los intervalos de tiempo mencionados el vehículo recorre siempre cierta distancia, la cual depende de la velocidad con la que se transite. El siguiente cuadro presenta la velocidad en que transita un automóvil y la distancia total recorrida desde el instante en que el conductor mira el obstáculo y el automóvil se detiene.

¿Cuál es la velocidad máxima, que un vehículo debe mantener, para no chocar con el vehículo del frente que si detiene de repente? Tome en cuenta que, las leyes costarricenses obligan que un vehículo pesado se mantenga a una distancia mayor a 50 m del vehículo que va adelante, y suponga que los conductores siempre aplican esta ley.

Velocidad (km/h)	Distancia total recorrida (m)
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139

Narrativa Tarea 4

--

Elemento	Contiene	No contiene	Modificación
Datos claros y reales			
Situación autentica			
Contexto			
Aprovechamiento del contexto			
Elementos necesarios para la solución			
Etapa de ejecución (Introdutorio, desarrollo, cierre)			
Procesos matemáticos que intervienen			
Complejidad			
Forma de aprendizaje (Activo-reflexivo, visual-verbal, entre otros)			
Contenidos matemáticos utilizados			
Representaciones (grafica, simbólica, tabular...)			
Habilidades Utilizadas			
Conocimientos previos			
Posibles errores			

Anexo 4

Análisis de Expertos

En este apartado se analiza cada tarea presentada en las Guías Narrativas, este análisis es realizado por los expertos, para esto, se toma en cuenta los elementos del MTSK, así como lo expuesto en el Taller Análisis de Tarea Matemáticas. Cada componente del Conocimiento Didáctico de Contenido se asocia a los elementos de análisis de tareas.

El Aprendizaje de las Matemáticas (AM) se puede encontrar las expectativas y limitaciones planteadas en el taller. En el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemáticas (CEM), está asociado con las oportunidades, por último, los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (EAM) se relaciona con las oportunidades y expectativas.

Es así como, al realizar el análisis de experto, en esta sesión, se toma en cuenta ambas partes, no únicamente los componentes del MTSK.

Análisis Experto de la Tarea 1

Esta tarea está representada de forma tabular para evaluar el tema de función lineal, de igual manera, se puede realizar una representación gráfica, esto depende del objetivo que el docente desee evaluar con la tarea.

Por su parte, presenta un contexto factible en las zonas urbanas del país, ya que trata sobre la escogencia del servicio de taxis Uber, pero este contexto puede beneficiar solo a esa población, por motivo de que en las zonas rurales no existe este tipo de transporte público. A su vez, según lo que solicita el problema, el contexto presenta datos adicionales no relevantes, que puede confundir a los estudiantes, como lo es mencionar el servicio de Uber XL cuando solo viajaran dos personas.

En cuanto a los contenidos matemáticos, se observa la ecuación lineal, imágenes, así como podría trabajar con la función lineal. La tarea pregunta por una sola tarifa, sin embargo, si se pregunta por varias tarifas se puede aprovechar y utilizar la tarea como un ejercicio introductorio de función lineal en decimo nivel, por lo que, esta tarea se presenta de manera versátil logrando utilizarse también en octavo nivel. Enmarcando estos contenidos, se observa que entre las habilidades a utilizar se presentan para decimo nivel: Representar gráficamente una función lineal, plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando la función lineal para decimo nivel. Para octavo nivel: Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la

forma $y=mx+b$, Representar de forma tabular, algebraica y gráficamente una función lineal, Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Teniendo en cuenta los conocimientos previos necesarios como: Ubicación de pares ordenados, cálculo de imágenes, resolución de ecuaciones lineales, funciones con dominio discreto o continuo. Se puede utilizar como ejercicio introductorio para decimo nivel y de cierre en el caso de octavo, en ambos casos se logra trabajar tanto de manera individual como grupal. La tarea presenta un nivel de complejidad de conexión, que se ayuda a su solución facilitando la visualización de la tabla mediante material escrito.

Así mismo, las formas de resolución de la tarea están limitadas, y a su vez, los procesos para su solución son: Representar, Razonar y argumentar, y Plantear y Resolver problemas.

Análisis Experto de la Tarea 2

En la tarea 2 se da la representación algebraica, aun así, se facilita la imagen de una escultura, donde la figura presentada no concuerda con lo solicitado en la tarea, por lo que se debe considerar representar la figura buscada con una que sea afín a la idea planteada, por ejemplo, utilizando el software de GeoGebra se puede graficar la idea principal y poner una estatua para contextualizar lo planeado desde un principio.

En cuanto al contexto, de la misma manera que la tarea anterior algunos de los alumnos pueden conocer sobre la ferretería El Lagar, sin embargo, al ser el nombre de un local no es relevante que no se conozca el lugar en sí, sino lo que representa, por lo que se puede concluir que el contexto es aprovechado correctamente.

Conviene distinguir que, para la solución de esta, se necesitan conocimientos previos como lo son el Teorema de Pitágoras, Semejanza de triángulos, ecuaciones cuadráticas, figuras geométricas Ya que lo que se pretende evaluar el problema son las habilidades *a*. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando la función cuadrática.

Sin embargo, se puede evaluar la habilidad *a*. Aplicar los criterios de semejanza: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo - ángulo - ángulo, para determinar y probar la semejanza de triángulos, en octavo y en noveno las habilidades *b*. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en diferentes contextos, *c*. Identificar situaciones dadas que pueden ser

expresadas algebraicamente en la forma $ax^2 + bx + c$ y la habilidad d . Resolver ecuaciones que se reducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

La tarea representa una complejidad de reflexión, se puede utilizar como cierre en noveno, ya sea de manera individual o grupal. Su solución puede darse de distintas maneras, pero para ello se debe mejorar la redacción del ejercicio, este se desarrolla de una manera confusa y el utilizar una imagen inadecuada puede confundir a los estudiantes, en el enunciado del ejercicio habla de un “prisma circular” y en las preguntas de uno rectangular.

En cuanto a los materiales utilizados, puede ayudar mucho algún software, material tangible como prismas de cartulina, donde el estudiante puede construir por el mismo el diseño que se solicita.

Por último, los procesos para su solución son: Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Comunicar y Conectar.

Análisis Experto de la Tarea 3

La tarea número tres, presenta un contexto poco atractivo para el estudiantado, ya que entorno se desarrolla en los ácaros, en primer lugar, se debe explicar que es un ácaro, para que los estudiantes comprendan la situación con la que van a trabajar.

Se facilita una representación tabular donde se dan tres puntos de una función lineal, este ejercicio puede funcionar para introducir el tema de función lineal en décimo nivel si se modifica la pregunta, para esto deben de tener los conocimientos previos de ecuaciones lineales, conceptos básicos de funciones. También, se puede usar de cierre planteando que utilicen la fórmula de la pendiente para averiguar el criterio solicitado, este mismo problema se puede trabajar tanto individual como grupalmente. De esto se concluye, que los estudiantes pueden plantearse más de una forma de solución de la tarea, dependiendo del momento en que la plantee el docente a cargo.

En cuanto a los contenidos matemáticos, se observa la ecuación lineal, imágenes, así como podría trabajar con la función lineal. Poniendo en práctica las habilidades a . Analizar una función a partir de sus representaciones, b . Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella y c . Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas. Por lo que se concluye que tiene un nivel de complejidad de conexión.

Finalmente, los procesos desarrollados durante la solución de la tarea son Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas y Representar.

Análisis Experto de la Tarea 4

Primeramente, la tarea presenta una representación tabular, con un nivel de complejidad de reproducción, ya que tiene que identificar la velocidad solicitada, a su vez, este tema se puede utilizar para introducir varios temas, como lo son el cálculo de imagen y preimagen en décimo nivel, o bien, el tema de función exponencial, ya sea de modo introductorio, solicitando comparar distintos datos, es más, se puede utilizar el mismo ejercicio como introductorio y cambiar lo requerido preguntando por el criterio que puede modelar la función o algún otro dato donde se tenga que emplear la teoría de función exponencial.

Con esto, se abordan las habilidades en undécimo: *a* Analizar gráfica, tabular y algebraicamente las funciones exponenciales, *b*. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales, *c*. Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales. Así, como en décimo Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.

Ahora, dependiendo del nivel donde se quiera evaluar la tarea, así van a cambiar los conocimientos previos, por ejemplo, si es evaluada en décimo deben saber la localización de puntos, si se utiliza en undécimo, es importante que ya conozcan todos los conocimientos básicos de funciones.

Por su parte, el contexto en la tarea se presenta de una manera general, donde sin importar la zona del país donde se utilice, funciona de la misma manera. Se puede, también, aprovechar el contexto y ligar al tema de educación vial en Estudios Sociales, promoviendo la interdisciplinariedad.

Para concluir, los procesos a realizar en la tarea son Plantear y resolver problemas, Conectar y Representar. De igual manera, la solución del ejercicio puede variar dependiendo del estudiante, ya que al decir que la distancia mínima entre un carro y otro debe de ser de 50m y en la tabla están los datos 47 y 57, el alumno puede tomar el 47 en sí o puede haber otro que haga un promedio entre ambos números.

Análisis

Tareas Matemáticas Escolares

Universidad Nacional
Escuela de Matemática

Junio 2022



1

¿Qué es una tarea matemática?

Toda demanda estructurada de actuación cognitiva propuesta al estudiante, que requiere su reflexión sobre el uso de las matemáticas, y que el profesor presenta intencionalmente como un medio para el aprendizaje o como una herramienta de evaluación.

Carballo, R. M. (2014). Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas: Una experiencia con profesores. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

2

¿Qué es una tarea matemática?

Las **tareas escolares** desempeñan un papel determinante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La **naturaleza del aprendizaje** de los alumnos está determinada por el tipo de tareas que se le plantean y por el modo de aplicarlas.

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2009). Converting mathematics tasks to learning opportunities: An important aspect of knowledge for mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*, 21(1), 85-105.



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

3

Importancia del análisis de tareas

Un estudio metódico de las tareas, por medio del análisis de algunos de sus componentes, permite comprenderlas mejor y decidir sobre su ajuste a las expectativas de aprendizaje planificadas y a las características de nuestros alumnos.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, (pp. 243-258). Pirámide.



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

4

Componentes de la tarea matemática escolar

Contenido matemático



Contenido didáctico



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

5

Contenido matemático de la tarea

Conjunto de conceptos, procedimientos y estructuras procedentes de la tradición académica, que los responsables del currículo seleccionan y organizan y los profesores comunican y enseñan, para que los escolares las aprendan y las utilicen con un tópico matemático escolar determinado.

Fernández, J. A. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, (pp. 103-118). Pirámide.



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

6

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS PARA EL CONTENIDO MATEMÁTICO



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

7



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

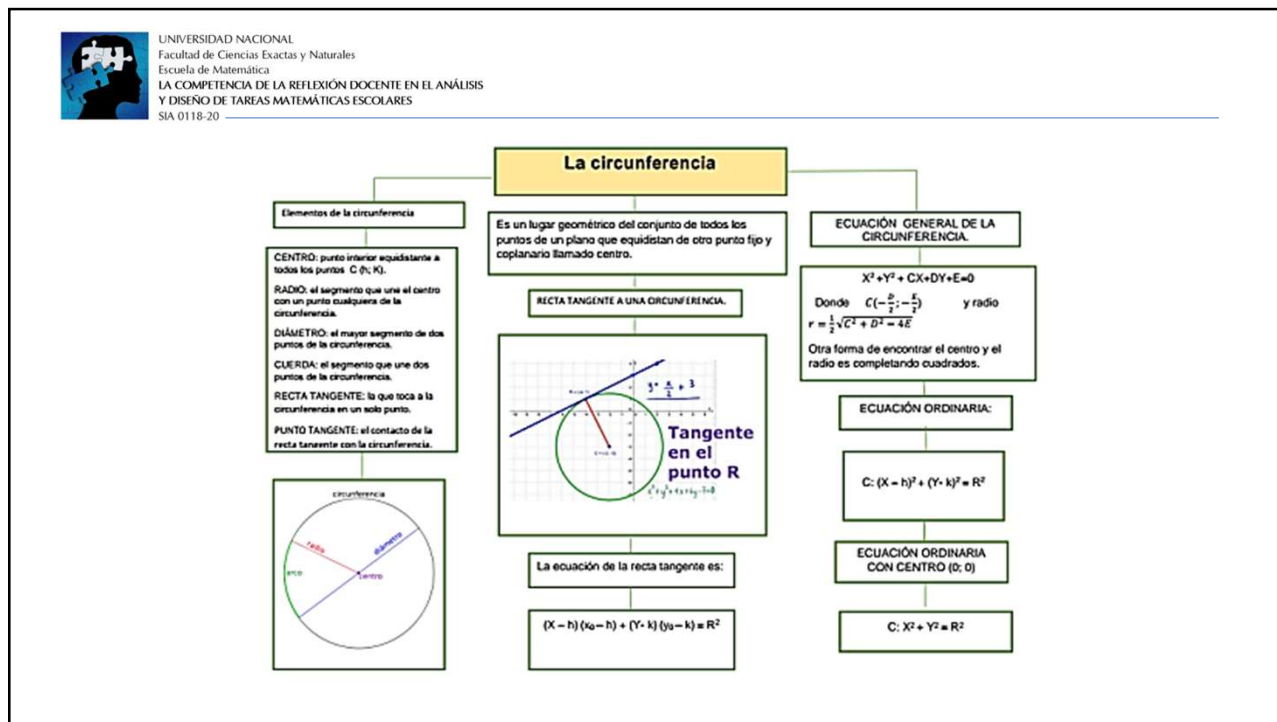
ANÁLISIS DE CONTENIDO

**ESTRUCTURA
CONCEPTUAL**

Representaciones

Situaciones y
contextos

8



9



10



Sistemas de representación

“Son aquellas notaciones simbólicas o gráficas, o bien expresiones verbales, mediante las que se hacen presentes y se nombran los conceptos y procedimientos en esta disciplina, así como sus características, propiedades y relaciones más relevantes”

(Lupiáñez, 2016, p. 120)

11



VERBAL

Explícita los términos y la sintaxis con que expresamos verbalmente el concepto, sus relaciones y prioridades.

Ejemplo: La circunferencia es la curva plana y cerrada cuyos puntos son equidistantes de otro situado en su interior, llamado centro.

12



SIMBÓLICO

Refiere a los sistemas estructurados de grafismos que se usan para expresar el concepto, junto con sus propias reglas internas.

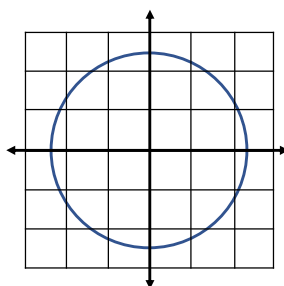
$$C = 2\pi r$$

13



GRÁFICO

Se utiliza para interpretar y comprender conceptos matemáticos o resolver problemas; radica en realizar dibujos, diagramas, o gráficas.

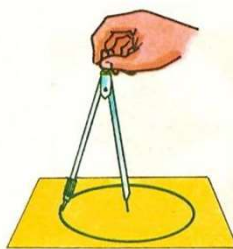


14



ICÓNICO

Su diferencia radica en que no está representada en el plano cartesiano, lo cual dificulta el paso de una representación simbólica a la icónica.



15



¿Qué decisiones tomar como docente para promover el uso de representaciones diversas en el estudiantado?

1. Seleccionar representaciones apropiadas y variadas para ejemplificar y explicar nociones matemáticas.
2. Diseñar tareas para que los escolares interpreten y escojan entre diferentes formas de representación.
3. Incentivar al estudiantado en el uso, análisis y conversión entre diferentes representaciones para la explicación y justificación de sus razonamientos.

(Lupiáñez, 2016, p. 129)

16



ANÁLISIS DE CONTENIDO

Estructura
conceptual

Representaciones

**SITUACIONES Y
CONTEXTOS**

17



Fenómenos

SITUACIONES

“Esa parte del sentido de un contenido matemático”

“Contribuyen a dotarlas [a las tareas] de sentido, muestran modos de uso, son indicadores de sentido y ayudan a profundizar sobre el mismo”

Moreno y Ramírez (2016)

18



Fenómenos

SITUACIONES (Personal)

Enfocan actividades cotidianas del estudiantado, ya sea en primera persona o en su vida familiar.



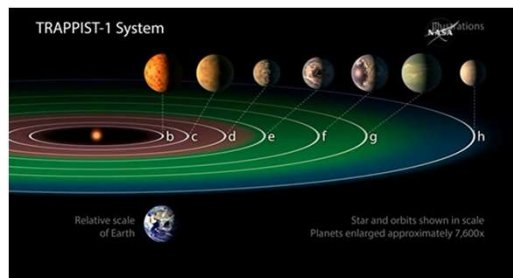
19



Fenómenos

SITUACIONES (Científica)

Se relacionan con la aplicación de las matemáticas al mundo natural y responden a cuestiones relacionadas con la ciencia y la tecnología.



20



Fenómenos

SITUACIONES (Ocupacional o laboral)

Se centran en el mundo del trabajo (no especializados o con un alto nivel de cualificación). Incluyen situaciones referidas al entorno educativo.



21



Fenómenos

SITUACIONES (Sociales)

Se refieren a la comunidad local, nacional o global, en las que se observan determinados aspectos del entorno .



22



Fenómenos

Responde al para qué,
¿cuál es el uso?, ¿a qué
cuestiones da respuesta
este concepto?

CONTEXTOS

23



Fenómenos

Es una descripción de cómo los
conceptos y estructuras
matemáticas atienden y responden,
como instrumentos de
conocimiento, a unas necesidades
intelectuales o prácticas
determinadas.

CONTEXTOS

24



Fenómenos

Los contextos matemáticos proporcionan precisión técnica para delimitar el sentido de un concepto.

CONTEXTOS

25



Fenómenos



CONTEXTOS
(Contar)

Identifica biunívocamente cada elemento de la secuencia numérica con cada objeto de una colección que se cuenta.

26



Fenómenos

CONTEXTOS

(Medir)



Permite conocer el número de unidades que contiene una cantidad de alguna magnitud densa o continua.

27



Fenómenos

CONTEXTOS

(Ordenar)



Permite conocer la posición relativa de un determinado elemento en un conjunto discreto y ordenado.

28



Fenómenos



CONTEXTOS (Operar o Calcular)

Se relaciona con las operaciones y la búsqueda de un resultado.

29

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS PARA EL CONTENIDO DIDÁCTICO



30



ANÁLISIS COGNITIVO



31

¿Qué entendemos por expectativas?

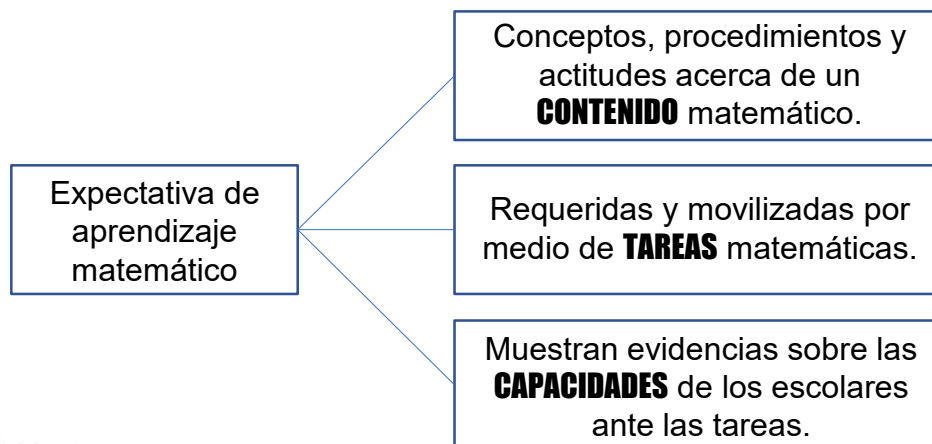
...las capacidades, competencias, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que se espera que los escolares adquieran o desarrollen como resultado de una propuesta intencional de formación.

Flores, P. y Lupiáñez, J.L. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria, (pp. 177-193). Pirámide.



32

¿Qué tomar en cuenta para analizar una expectativa?



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

33



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

Competencia matemática

Lo que el estudiantado es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas

34



Habilidades y capacidades para el aprendizaje de un concepto

35



Habilidad:



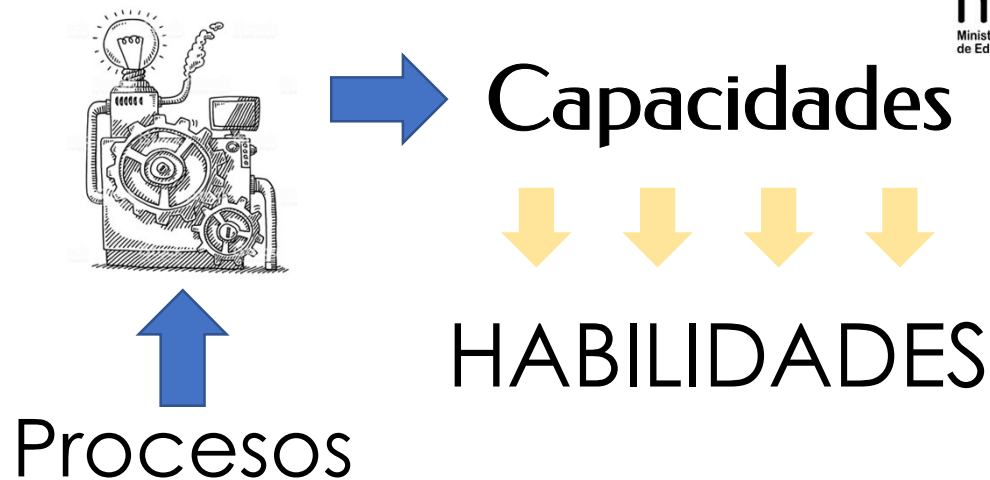
Los conocimientos matemáticos son la base de estos programas. No obstante, se adopta un enfoque basado no solamente en contenidos matemáticos. Lo que se pretende es el desarrollo de mayores **capacidades** del ciudadano para enfrentarse a los retos del mundo del que forma parte. El desarrollo vertiginoso del conocimiento y su ritmo de cambio acelerado conducen a una reformulación de programas, materiales, textos, recursos materiales y humanos que transforman con fuerza la acción docente y la organización de la lección. Se impone una lógica del saber en contexto, del aprender a aprender. Las **capacidades** se asumen como centrales. En primer lugar, aquellas de corto plazo y asociadas a las áreas matemáticas que se seleccionaron; estas **capacidades** se denominan aquí **habilidades específicas**. En segundo lugar, la generalización de estas habilidades específicas a desarrollar en un ciclo educativo: **habilidades generales**.

En tercer lugar y solamente como una perspectiva general la **competencia matemática**. Para realizar esos propósitos dentro del plan de estudios se deben modular la cantidad y calidad de los contenidos educativos en función del progreso de esas **capacidades**.

36



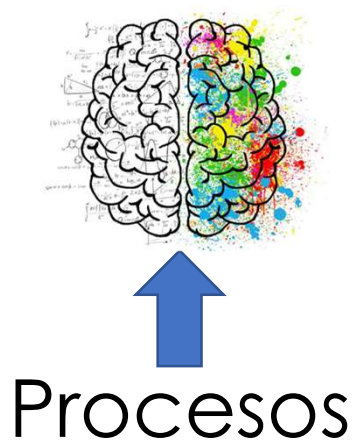
UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20



37



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20



- Razonar y argumentar
- Plantear y resolver problemas
- Conectar
- Comunicar
- Representar

Son formas de acción cognitiva que pueden generar capacidades

38



39



Limitación:



Se presentan a los estudiantes cuando aprenden el contenido escolar

40



Limitación:

Se manifiestan en las dificultades y los errores que pueden surgir en el proceso de aprendizaje



41



Dificultad:

circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos.

Cuando se manifiesta visiblemente una dificultad se estará en presencia **del error**, y que este es observable directamente en las actuaciones de los escolares, en sus respuestas equivocadas a las cuestiones y en tareas concretas que les demande el profesor.

González y Gómez (2013)

42



Dificultades más comunes en Matemática

(Di BlasiRegner, 2003)

1. Asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
2. Asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Asociadas a los procesos de enseñanza.
4. Asociadas al desarrollo cognitivo de los estudiantes.
5. Asociadas a las actitudes afectivas y emocionales.
6. Asociadas a errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales.

43



Entenderemos por **dificultad**, cualquier situación cognitiva que enfrente el estudiante, que le impide o afecte en forma negativa sus procesos de resolución de ejercicios y problemas.

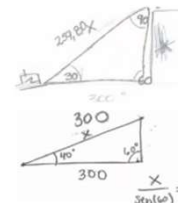
Además, se entenderá por **error**, aquella situación observable donde el estudiante brinde una respuesta equivocada.

44



Errores más comunes en Matemática (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006)

1. Errores derivados del **mal uso de los símbolos y términos matemáticos**.
2. Errores provenientes de la producción de **representaciones** icónicas inadecuadas de situaciones Matemática.
3. Errores originados por deficiencias en el **manejo de conceptos, contenidos y procedimientos** para la realización de una tarea Matemática.



45



4. Errores que en general son causados por la **incapacidad del pensamiento** para ser flexible, es decir, para adaptarse a situaciones nuevas (asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento).

- *De asociación:* razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.

$$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

- *De interferencia:* cuando los conceptos u operaciones interfieren unos con otros.

$$-5 \cdot -3 = 8 \quad -5 - 3 = 8$$

46



5. Frecuentemente los estudiantes consideran al **registro tabular** como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica, y no como una representación por sí misma.
6. **Transferencias** de una **representación** a otra como traducciones, es decir, pasar de un lenguaje verbal a uno gráfico o a uno algebraico.
7. **Interpretación de una gráfica** como la acción por la que se da sentido a la misma o a una parte de ella, y es aquí donde se encuentran un gran número de equivocaciones en los alumnos.

47



48



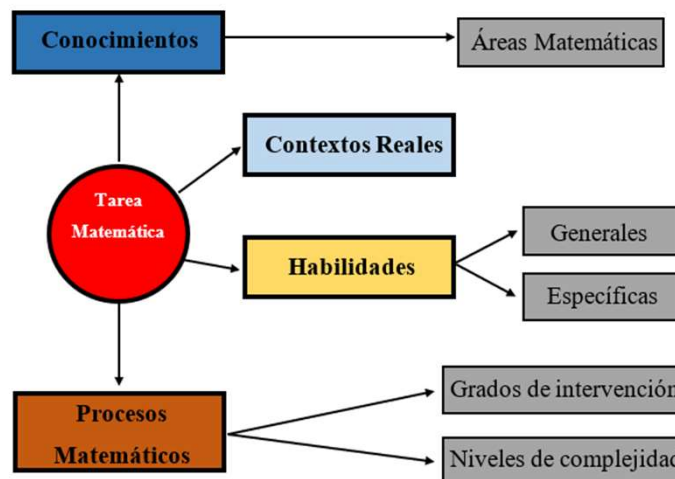
Oportunidades:

Conjunto de circunstancias y experiencias, orientaciones, demandas y retos que acompañan y estimulan los aprendizajes escolares, bien porque los regulan, los condicionan, los incentivan o los promueven.

➔ **TARE
A**

Ruiz, J.F. y Rico, L. (2016). Oportunidades para el aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria, (pp. 209-224). Pirámide.

49



50



ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN



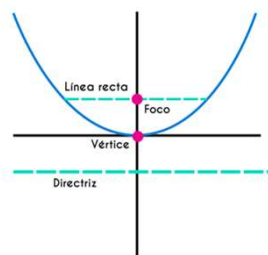
51



Variables de las tareas

Una **tarea auténtica** se formula desde una situación real que pueda reproducirse o simularse de forma razonablemente realista,

- ◆ Contenido matemático.
- ◆ Situaciones.
- ◆ Nivel de complejidad.



52



Variables de las tareas

Una **tarea auténtica** se formula desde una situación real que pueda reproducirse o simularse de forma razonablemente realista,

- ◆ Contenido matemático.
- ◆ Situaciones.
- ◆ Nivel de complejidad.



53



Variables de las tareas

Una **tarea auténtica** se formula desde una situación real que pueda reproducirse o simularse de forma razonablemente realista,

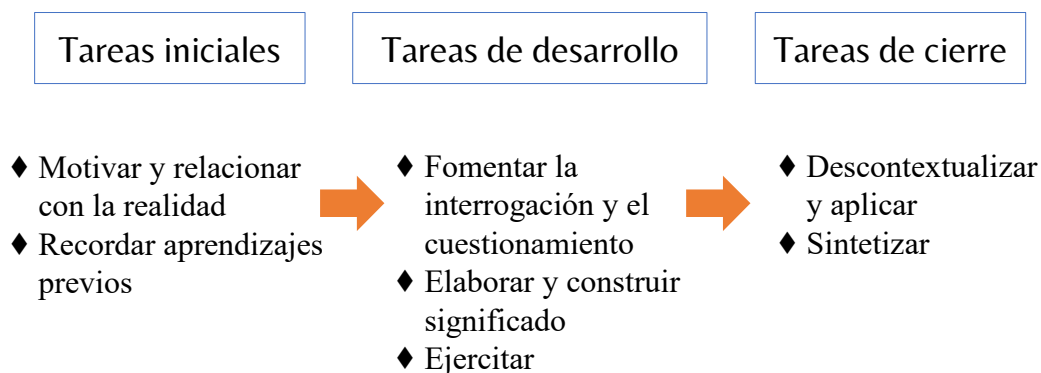
- ◆ Contenido matemático.
- ◆ Situaciones.
- ◆ Nivel de complejidad.



54



Funciones de las tareas

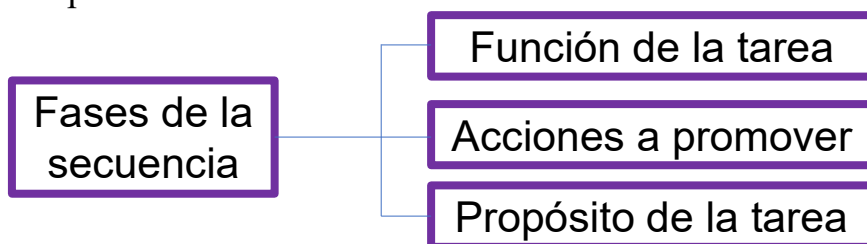


55



Secuencia de las tareas

Muestra las decisiones y el plan de trabajo elaborado por la persona docente para el aprendizaje del estudiantado, aquello que se espera que se aprenda.



56



ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

TAREAS

RECURSOS Y
MATERIALES

GESTIÓN
DE AULA

57



Recursos y materiales

Recurso: son todos aquellos materiales no diseñados específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, como la tiza, el pizarrón, papel, diapositivas, entre otros.

Carretero, Coriat y Nieto (1995)



58



Recursos y materiales

El **material didáctico** es diseñado con un fin educativo, aunque un buen material didáctico trasciende la intención original y se le puede dar otros usos.

Carretero, Coriat y Nieto (1995)

PISTA DEL ÁLGEBRA



59



Recursos y materiales

Área y otros (2010) se refieren a materiales didácticos, en algunos casos a los materiales que utilizan representaciones simbólicas y en otros casos a los referentes directos que serían los objetos. Una clasificación realizada de acuerdo con el soporte es:

- (a) **materiales en soporte papel**
- (b) materiales en soporte tecnológico
- (c) materiales en otros soportes (ejemplos: juguetes).

TABLA 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

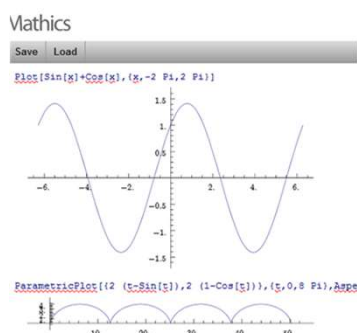
60



Recursos y materiales

Área y otros (2010) se refieren a materiales didácticos, en algunos casos a los materiales que utilizan representaciones simbólicas y en otros casos a los referentes directos que serían los objetos. Una clasificación realizada de acuerdo con el soporte es:

- (a) materiales en soporte papel
- (b) materiales en soporte tecnológico**
- (c) materiales en otros soportes (ejemplos: juguetes).



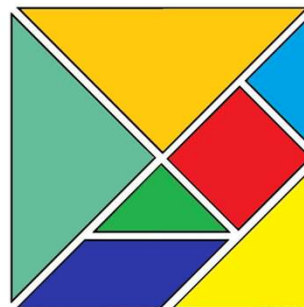
61



Recursos y materiales

Área y otros (2010) se refieren a materiales didácticos, en algunos casos a los materiales que utilizan representaciones simbólicas y en otros casos a los referentes directos que serían los objetos. Una clasificación realizada de acuerdo con el soporte es:

- (a) materiales en soporte papel
- (b) materiales en soporte tecnológico
- (c) materiales en otros soportes (ejemplos: juguetes).**



62



ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN



63



Gestión en el aula

ACTIVIDADES DE MEMORIA



Para que los alumnos:

- Sepan qué información deben retener
- Retengan información

64



Gestión en el aula

ACTIVIDADES DE RUTINA O PROCEDIMIENTO

$$\begin{aligned} \text{○} + \text{○} &= 10 \\ \text{○} \times \text{□} + \text{□} &= 12 \\ \text{○} \times \text{□} - \text{△} \times \text{○} &= \text{○} \\ \text{△} &= ? \end{aligned}$$

Para que los alumnos:

- Sepan qué fórmulas son importantes
- Apliquen fórmulas o algoritmos

65



Gestión en el aula

ACTIVIDADES DE COMPRENSIÓN

Para que los alumnos:

- Perciban la lógica del razonamiento
- Razonen
- Traduzcan formas de representación
- Decidan qué procedimiento es más interesante
- Resuelvan problemas nuevos



66



Gestión en el aula

ACTIVIDADES DE OPINIÓN



Para que los alumnos:

- Expresen sus preferencias

67



Gestión en el aula

ORGANIZACIÓN DE ELEMENTOS DEL ENTORNO

MODO	USO	INTERÉS
Gran grupo	Presentar materia Conducir debates Hacer preguntas	Permite negociar significados entre todos Permite aportes más ricos
Pequeño grupo	Investigaciones Proyectos	Apoya la comprensión al obligar a argumentar para convencer Permite dividir tareas según cualidades

68



Gestión en el aula

ORGANIZACIÓN DE ELEMENTOS DEL ENTORNO		
MODO	USO	INTERÉS
Parejas	Tareas relativamente estructuradas, sin concentración	Promueve intercambio positivo más próximo
Individual	Ejercitación Problemas Ensayos memorización	Hace asumir responsabilidades personales

69



ANÁLISIS DE EVALUACIÓN

**MODALIDADES Y
DISEÑO**

**INTERVENCIÓN Y
TOMA DE DECISIONES**

**VALORACIÓN
ESTRATÉGICA E
INDICADORES DE
CALIDAD**

Segovia, I. (2016). Evaluación en matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria, (pp. 309-328. Pirámide.

70



Modalidades y diseño

Generalidades

Normativas curriculares

Momentos clave

- Concepto ----- “,, es la consideración comprensiva del
- Funciones funcionamiento de un grupo o individuo en
- Tipos matemáticas en diferentes contextos, incluyendo el conocimiento de las matemáticas y su actitud hacia las mismas” (Webb, 1992)

71



Modalidades y diseño

Generalidades

Normativas curriculares

Momentos clave

- Concepto ----- “,, es una competencia del profesor
- Funciones encaminada a poner en práctica un conjunto
- Tipos de técnicas de recogida de datos objetivos sobre el desarrollo y progreso de los alumnos” (Cockcroft, 1985)

72



Modalidades y diseño

Generalidades

- Concepto
- Funciones
- Tipos

Normativas curriculares

- **Social:** instruir al estudiantado,
- **Política:** Perfeccionar al sistema educativo,
- **Formativa:** Diagnosticar y orientar al estudiantado.
- **Profesional:** Mejorar el plan de formación, el currículo y su implementación.

Momentos clave

73



Modalidades y diseño

Generalidades

- Concepto
- Funciones
- Tipos

Normativas curriculares

- **Inicial o de diagnóstico:** establecer una enseñanza adecuada e identificar dificultades en el estudiantado.
- **De proceso:** evidenciar la eficacia del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- **Formativa:** mejorar las variables que intervienen en el proceso educativo.

Momentos clave

74



Modalidades y diseño

Generalidades

- Concepto
- Funciones
- Tipos

Normativas curriculares

Momentos clave

- **Sumativa o final:** valorar los resultados del aprendizaje, sin implicación en el proceso.
- **Integradora:** Valoración global del alumnado en un curso, etapa o ciclo.
- **Autoevaluación:** la que realiza el alumno sobre su propio aprendizaje.

75



Modalidades y diseño

Generalidades

- Concepto
- Funciones
- Tipos

Normativas curriculares

Momentos clave

- **Externa:** la realiza el docente o experto.
- **Continua:** se realiza a lo largo del proceso educativo, se asocia a la formativa.
- **Global:** Considera todos los elementos y procesos relacionados con el objeto de la evaluación.

76



Modalidades y diseño

Generalidades

- Concepto
- Funciones
- Tipos

Normativas curriculares

- **Normativa:** calificación numérica del rendimiento académico del alumnado.
- **Criterial:** comparación del progreso del alumnado con los criterios (metas, objetivos) establecidos.
- **Cualitativa:** fija la atención en la calidad de las situaciones en el entorno educativo.

Momentos clave

77



Modalidades y diseño

Generalidades

Normativas curriculares

Momentos clave

PRINCIPIOS

- Es parte integral del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Constituye un proceso colaborativo.
- Pertinencia con las actividades de mediación,
- Congruencia de las técnicas e instrumentos.
- Permite la toma de decisiones.
- Promueve el compromiso hacia el aprendizaje.

78



Modalidades y diseño

Generalidades

- Etapas en el proceso de evaluación al diseñar e implementar una Unidad Didáctica.
- Fases en el proceso.

Normativas curriculares

- **Evaluación inicial:** exploración de conocimientos previos necesarios.
- **Evaluación del seguimiento:** registro del progreso en el aprendizaje y retroalimentación de la gestión de la enseñanza.
- **Evaluación a término:** consecución de objetivos y competencias.

Momentos clave

79



Modalidades y diseño

Generalidades

- Etapas en el proceso de evaluación al diseñar e implementar una Unidad Didáctica.
- Fases en el proceso.

Normativas curriculares

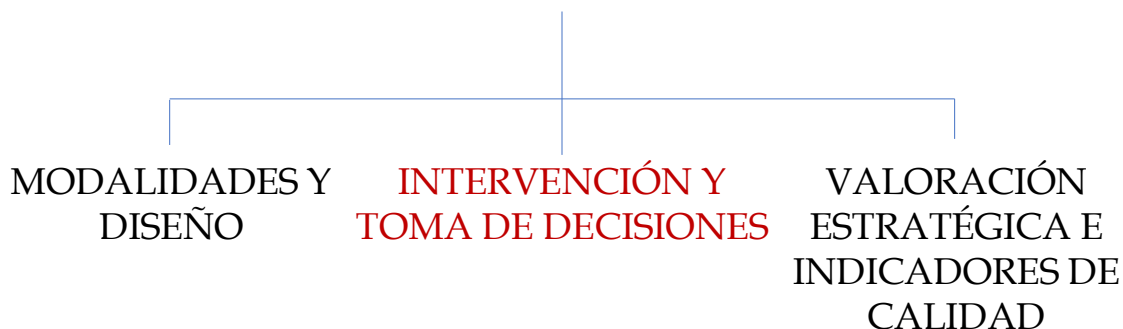
- **Recogida de información:** aplicación de instrumentos de observación, desempeño, asignaciones.
- **Interpretación y valoración:** identificar dificultades para su atención en la enseñanza.
- **Toma de decisiones:** mejorar la instrucción, identificar necesidades en el alumnado y juzgar la calidad del Sistema Educativo y del profesorado.

Momentos clave

80



ANÁLISIS DE EVALUACIÓN



Moreno, A. (2016). Rendimiento escolar, criterios e instrumentos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria, (pp. 329-347). Pirámide.

81



Criterios e instrumentos para la evaluación

Evaluar implica actuar, y para actuar el profesor necesita criterios en qué apoyar su toma de decisiones.

La evaluación precisa una intervención continuada del profesor durante el desarrollo de la instrucción.



- Criterios y estándares de evaluación
- Técnicas e instrumentos de evaluación

82



Criterios y estándares de la evaluación

- Determinan el dominio del estudiantado en cuanto a la asimilación de un concepto, el dominio de una destreza, la habilidad en la elección de procedimiento y en el uso y manejo de estrategias.
- Cualitativos y cuantitativos, estos últimos posibilitan la determinación del rendimiento matemático del estudiantado.



83



Criterios y estándares de la evaluación

CRITERIOS	ESTÁNDARES
<p>Valoran el logro de objetivos y el desarrollo de competencias básicas.</p> <p>Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en contenidos como en competencias, respondiendo a lo que se pretende conseguir en la asignatura.</p>	<p>Especifican y concretan los criterios de evaluación.</p> <p>Definen lo que el estudiantado debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura en aspectos muy concretos.</p> <p>Cada criterio de evaluación lleva asociados unos estándares de aprendizaje que generalmente desglosan la capacidad enunciada en el criterio en una o varias.</p>

84



Características de los criterios de la evaluación

Deben:

- Servir para apreciar las expectativas de aprendizaje.
- Permitir la valoración del grado de adquisición de la competencia matemática.
- Referirse al proceso de aprendizaje.
- Permitir adecuarse a las necesidades peculiares del alumnado.
- Implicar los procesos de aprendizaje y enseñanza.
- Mejorar progresivamente los aprendizajes y la práctica docente.

85



Técnicas e instrumentos de la evaluación

TÉCNICA DE
EVALUACIÓN

¿Cómo evaluar?

Modelos y procedimientos
utilizados para evaluar

- Pruebas escritas
- Portafolio
- Trabajos o actividades
- Resolución de problemas
- Observación directa de la actividad del estudiante
- Entrevista

86



Técnicas e instrumentos de la evaluación

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

¿Con qué evaluar?

- Lista de control
- Escala de estimación (numérica, categórica, descriptiva)
- Registro anecdótico
- Rúbrica
- Pruebas (oral, escrita, práctica)
- Revisión de tareas (cuaderno de clase, pequeñas investigaciones, portafolio, entrevista)

Recursos específicos que se aplican y las cuestiones que se plantean

87



ANÁLISIS DE EVALUACIÓN

MODALIDADES Y
DISEÑO

INTERVENCIÓN Y
TOMA DE DECISIONES

**VALORACIÓN
ESTRATÉGICA E
INDICADORES DE
CALIDAD**

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Indicadores de calidad y estudios comparativos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria, (pp. 349-363). Pirámide.

88



UNIVERSIDAD NACIONAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática
LA COMPETENCIA DE LA REFLEXIÓN DOCENTE EN EL ANÁLISIS
Y DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES
SIA 0118-20

Valoración e indicadores de calidad

Los indicadores educativos son un medio para describir y conocer la realidad educativa de un país.

Evalúan el grado de eficacia y eficiencia del Sistema Educativo.

Interpretar y valorar estratégicamente los resultados implica estudiar su validez, vincularlos con resultados de otros estudios y establecer comparaciones entre ellos.

**ANÁLISIS
EVALUATIVO**

89

Análisis Tarea Matemática Escolar

Universidad Nacional
Escuela de Matemática

Didáctica del Álgebra y el Análisis

Abril 2022



90

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática



Universidad Nacional
Escuela de Matemática



Junio 2022

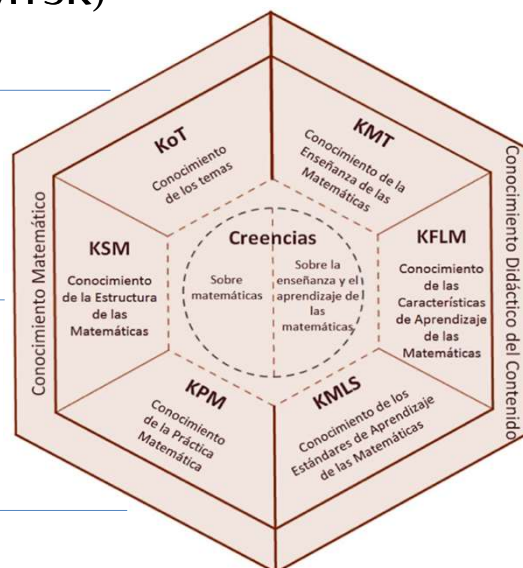
1

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

- Conocimiento sobre el sentido y modos de uso
- Conocimiento sobre procedimientos
- Conocimiento sobre propiedades y definiciones
- Conocimiento sobre representaciones

- Enlace potenciador
- Enlace instrumental
- Enlace transversal

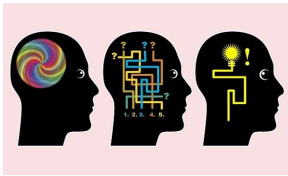
- Planificación en el proceder de la resolución de problemas matemáticos
- Formas de validación y demostración
- Uso del lenguaje formal
- Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones
- Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)



2

Conocimiento didáctico de contenido

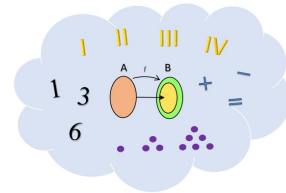
▷ Aprendizaje de las Matemáticas (AM)



▷ Conocimiento de la Enseñanza de las Matemática (CEM)



▷ Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (EAM).



3

Aprendizaje de las Matemáticas (AM)

Se destacan particularidades del aprendizaje de un concepto matemático.

Formas de aprendizaje: Maneras en que aprenden los estudiantes las matemáticas.

Fortalezas y limitaciones: Potencialidades que tiene un contenido matemático para el aprendizaje de las matemáticas, así como a los obstáculos asociados a su aprendizaje.

Interacción de los alumnos con el contenido matemático: Formas en que los estudiantes manipulan el contenido matemático.

Concepciones de los alumnos sobre las matemáticas: Expectativas e intereses de los estudiantes hacia las matemáticas.



4

4

Aprendizaje de las Matemáticas (AM)

- *Formas de aprendizaje*
- *Fortalezas y limitaciones*
- *Interacción de los alumnos con el contenido matemático*
- *Concepciones de los alumnos sobre las matemáticas*

Expectativas

...las capacidades, competencias, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que se espera que los escolares adquieran o desarrollen como resultado de una propuesta intencional de formación.



Limitaciones

Se manifiestan en las dificultades y los errores que pueden surgir en el proceso de aprendizaje



5

5

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemática (CEM)

Conocimiento que posee el docente para desarrollar un contenido o un concepto específico, recursos, materiales y tareas que este emplee para la instrucción del tema en cuestión.



Metodologías de enseñanza: Teorías o propuestas de enseñanza específicas de la Educación Matemática que promuevan el diseño de ambientes de aprendizaje.

Medios para la enseñanza: Recursos o materiales, físicos o virtuales, disponibles para la enseñanza de un contenido matemático particular.

Tareas para la enseñanza: Demandas cognitivas que el profesor propone a los estudiantes sobre un contenido matemático específico para promover o evaluar una habilidad matemática.

6

6

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemática (CEM)

- *Metodologías de enseñanza*
- *Medios para la enseñanza*
- *Tareas para la enseñanza*



Oportunidades

Conjunto de circunstancias y experiencias, orientaciones, demandas y retos que acompañan y estimulan los aprendizajes escolares, bien porque los regulan, los condicionan, los incentivan o los promueven.

7

7

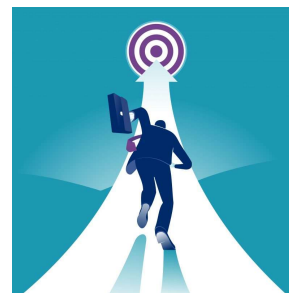
Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (EAM).

Conocimiento sobre el currículo, los contenidos y los conceptos, para la enseñanza de las matemáticas en un nivel escolar específico.

Expectativas de aprendizaje: Aprendizajes que se pretenden lograr con la implementación de la tarea

Conocimiento de los contenidos matemáticos que se requieren enseñar: Temas en los que se enmarcan las habilidades matemáticas que se espera promover en un nivel escolar específico.

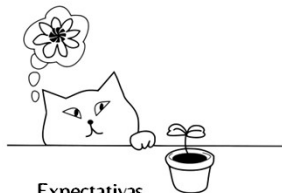
Secuencias de los temas: Distribución de temas y el alcance de capacidades en los distintos niveles escolares.



8

8

Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (EAM).



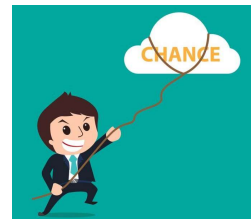
Expectativas

...las capacidades, competencias, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que se espera que los escolares adquieran o desarrollen como resultado de una propuesta intencional de formación.

- *Expectativas de aprendizaje*
- *Conocimiento de los contenidos matemáticos que se requieren enseñar*
- *Secuencias de los temas*

Oportunidades

Conjunto de circunstancias y experiencias, orientaciones, demandas y retos que acompañan y estimulan los aprendizajes escolares, bien porque los regulan, los condicionan, los incentivan o los promueven.



9

9

Conocimiento didáctico de contenido

▷ Aprendizaje de las Matemáticas (AM)

- *Formas de aprendizaje*
- *Fortalezas y limitaciones*
- *Interacción de los alumnos con el contenido matemático*
- *Concepciones de los alumnos sobre las matemáticas*

▷ Conocimiento de la Enseñanza de las Matemática (CEM)

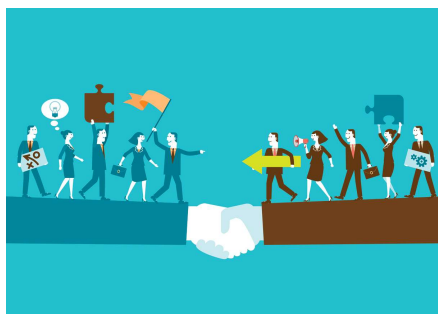
- *Metodologías de enseñanza*
- *Medios para la enseñanza*
- *Tareas para la enseñanza*

▷ Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (EAM).

- *Expectativas de aprendizaje*
- *Conocimiento de los contenidos matemáticos que se requieren enseñar*
- *Secuencias de los temas*

10

Vinculo entre el currículo de CR y el MTSK



Resolución de problemas

- Formulación de preguntas significativas
- Análisis de información de situaciones de la vida cotidiana.
- Evalúa los intentos de solución y viabilidad según el contexto.

11

11

Vinculo entre el currículo de CR y el MTSK

Aprender a aprender

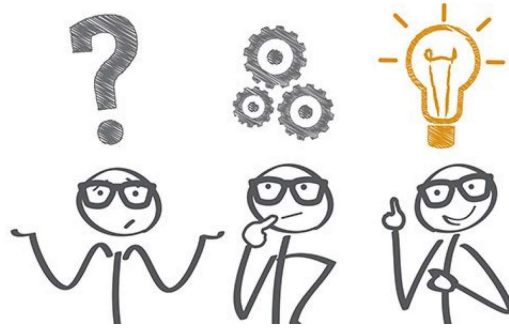
- Planificación de estrategias de aprendizaje.
- Desarrollo de autonomía en las tareas que debe realizar.
- Importancia de las respuestas.



12

12

Vinculo entre el currículo de CR y el MTSK



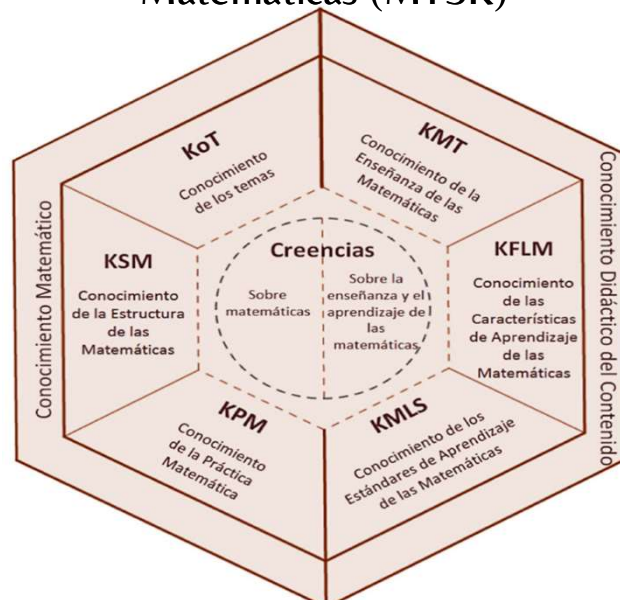
Pensamiento crítico

- Interpretación apropiada de la información disponible.
- Identificación de aspectos exitosos y aspectos que requieren de mejora.
- Comparación del trabajo.

13

13

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)



14

14