

## POLIGONACIÓN VERTICAL

*Esteban Dörries y Erick Ovarés Sánchez*

Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia  
Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica  
edorries@una.ac.cr; eovares@cfia.or.cr

### RESUMEN

La poligonación vertical es un método de medición de diferencias de altura que aprovecha las posibilidades de las estaciones totales. Se presta fundamentalmente para líneas de nivelación entre nodos formando red. El nombre se debe a que las visuales sucesivas se proyectan sobre aristas verticales en lugar de un plano horizontal, como ocurre en la poligonación convencional.

**PALABRAS CLAVES:** topografía, nivelación, poligonación, centrado, vertical, alturas.

### ABSTRACT

The "poligonación vertical" is a measurement method of height differentials, where the total stations possibilities are used. They have a fundamental in level lines between marks forming a network. It gets his name for the successive visuals are projected over down sharp edges in place of an across horizontal flat, like happens in the conventional traverses.

**KEYWORDS:** surveying, leveling, traverses, centering, vertical, highs.

### INTRODUCCIÓN

En el año 2002 la Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia (ETCG) inició la ejecución del proyecto de investigación denominado "Determinación de la Ondulación del Geoide a partir de Nivelación Convencional y GPS, y Comparación

con la Obtenida por la Aplicación del Modelo Carib97", que tuvo como objeto hacer un estudio comparativo de la ondulación del geoide obtenida a través de mediciones convencionales y GPS y la ondulación del geoide que proporciona el modelo Carib97 y su programa de interpolación.

La red tridimensional propuesta para dicho proyecto tiene como centro el punto ETCG ubicado en la azotea de la torre de la Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia de la Universidad Nacional y cubre una zona de 4x4 minutos de arco en latitud y longitud, con una topografía montañosa predominante. Los puntos de esta red se ubicaron estratégicamente a lo largo de toda la zona de estudio, lo que hubiera dado lugar a extensos itinerarios de nivelación convencional entre los puntos.

Es por esta razón que el investigador del proyecto E. Dörries piensa en la posible determinación de desniveles entre los nodos de una red utilizando una metodología de medición con instrumental moderno, que resulte rápida y eficiente en su ejecución y que, a la vez, brinde una adecuada exactitud en los desniveles determinados.

Esta metodología a implementar aprovecha las ventajas que ofrecen las estaciones totales para medir rápidamente la distancia inclinada entre dos puntos y obtener la diferencia de nivel entre ellos, combinándola con el proceso clásico de centrado forzoso sobre base y trípode. El concepto de centrado forzoso implica en este caso la necesaria estabilidad vertical del prisma y de la estación total, pero no requiere la ubicación centrada sobre un punto, tal como ocurre en la poligonación clásica horizontal.

Esta metodología es denominada "poligonación vertical", la cual tiene la gran ventaja de permitir distancias largas y visuales asimétricas entre estaciones, aunque el terreno sea quebrado.

## MÉTODO DE CAMPO

El procedimiento es análogo a una nivelación geométrica, sustituyendo las miras por prismas montados sobre trípodes, el nivel por la estación total y las visuales horizontales por visuales inclinadas, como puede verse en la figura 1.

Se realiza una poligonal vertical quebrada horizontalmente, cuyos extremos son los puntos a nivelar, por ejemplo, de un punto A al punto B. Se ubica la estación total entre el punto inicial y el siguiente trípode con prisma, y se realizan las lecturas de ángulo cenital ( $Z$ ), distancia inclinada ( $D_i$ ), diferencia de nivel ( $\Delta h$ ) y distancia horizontal ( $D_h$ ), tanto de espalda como de frente, en posición I y en posición II de la estación total. Para efectos de aplicación práctica los únicos valores imprescindibles son los  $\Delta h$  calculados directamente por la estación total, aunque por razones de control es conveniente registrar todos los elementos medidos o calculados.

La lectura de frente junto a la de espalda siguiente será un punto de cambio que vincula cada estación del instrumento. En este método, la posición y la altura del punto de cambio deben mante-

nerse para dos paradas consecutivas de la estación total. Para lograr esto se utiliza el centrado forzoso del prisma sobre el trípode en los puntos de cambio, con el objeto de mantener el prisma a la misma altura y posición y así evitar errores groseros.

No es necesario medir la altura del prisma con respecto al suelo en el punto de cambio, debido a que se mide hacia él desde dos estaciones de nivelación; el punto de cambio está en el centro del prisma y no en el nivel del suelo. Sólo es necesario medir la altura instrumental en cada uno de los extremos de la poligonal vertical, para deducir la altura respecto al punto amojonado en el suelo. Si se trabaja con la misma altura del prisma ( $hp$ ) en el nodo de salida y en el de llegada no se requiere medirlas, pues las dos alturas se cancelan en el cálculo.

## MÉTODO DE CÁLCULO

La diferencia de altura total  $\Delta H$  entre los puntos A y B se obtiene sumando algebraicamente los  $\Delta h$  parciales de frente o de espalda en cada estación, de la siguiente forma:

$$\Delta H_{AB} = hp_A - \Delta He_A + \Delta Hf_1 - \Delta He_1 + \dots + \Delta Hf_n - \Delta He_n + \Delta Hf_B - hp_B$$

Los parámetros de la ecuación significan:

$\Delta H_{AB}$ : diferencia de nivel total entre dos puntos.

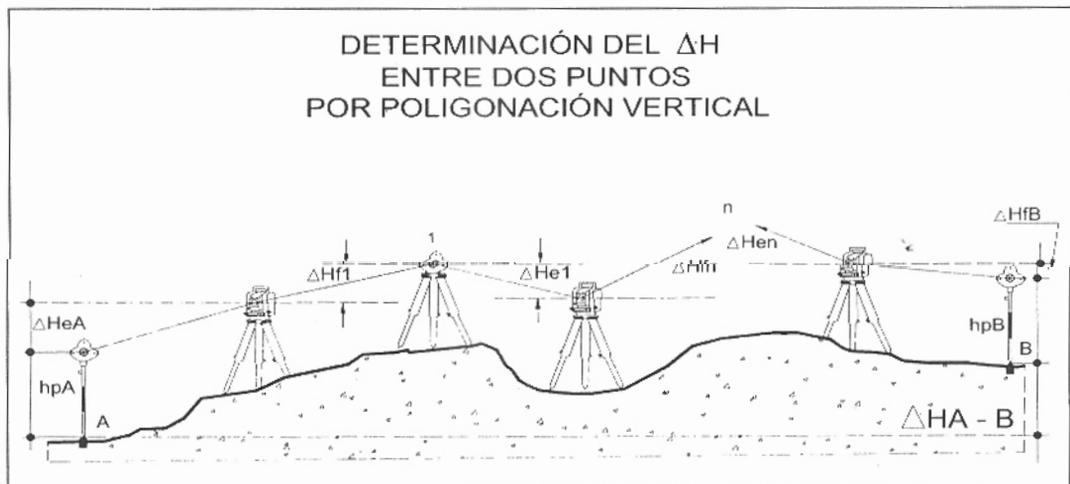


Figura 1. El principio de la poligonía vertical.

$hp_A$ : altura de prisma sobre el punto A de inicio del itinerario.

$\Delta He_A, \Delta Hf_1, \Delta He_1, \Delta Hf_n, \Delta He_n, \Delta Hf_B$ : son diferencias de nivel parciales entre las estaciones de observación y los puntos de cambio tanto de espalda como de frente.

$hp_B$ : altura del prisma sobre el punto B de llegada del itinerario.

## VARIANTES DE LA FÓRMULA

La fórmula original que se utiliza para el cálculo de desniveles por poligonación vertical proporciona, directamente, la diferencia de nivel entre dos nodos de una línea de nivelación para el caso particular cuando se inicia y termina el itinerario con lecturas de espalda y frente hacia prismas centrados sobre los nodos extremos de la línea nivelada. Sucede que en la práctica no siempre se cumple esta configuración de observaciones e instrumentos, debido a que en ocasiones resultará práctico realizar observaciones con la estación total centrada en el nodo inicial o final del itinerario.

Cuando se presenta una de estas situaciones se deberá tener presente en el momento de realizar los cálculos, pues la ecuación principal se modifica parcialmente. A continuación se describen estas situaciones.

### ESTACIÓN EN EL NODO DE SALIDA

En estas circunstancias, la primera lectura que se realiza es un desnivel de frente  $\Delta Hf_1$  hacia un punto de cambio, con la estación total desde el nodo de inicio, luego se hará un cambio de estación y se realiza una lectura de espalda hacia este mismo punto de cambio. El itinerario continúa hasta llegar al nodo final, en el cual se centra el prisma y se realiza una lectura de frente. De acuerdo con lo expuesto, la fórmula para el cálculo del desnivel entre el nodo de partida y el final será:

$$\Delta H_{AB} = HI_A + \Delta Hf_1 - \Delta He_1 + \dots + \Delta Hf_n - \Delta He_n + \Delta Hf_B - HP_B$$

Donde:

$\Delta H_{AB}$ : diferencia de nivel total entre los extremos de la línea nivelada.

$HI_A$ : altura del eje secundario de la estación total sobre el punto de inicio del itinerario A.

$\Delta Hf_1, \Delta He_1, \Delta Hf_n, \Delta He_n, \Delta Hf_B$ : son diferencias de nivel parciales entre las estaciones de observación y los puntos de cambio tanto de frente como de espalda.

$HP_B$ : altura del prisma sobre el punto de llegada del itinerario B.

### ESTACIÓN EN EL NODO DE LLEGADA

En este caso la primera lectura que se realiza corresponde a una espalda hacia un prisma centrado en el nodo de inicio, al igual que en la fórmula original; la diferencia radica en que la última lectura corresponde a una espalda hacia un prisma realizada con la estación total centrada en el nodo de llegada; por esta razón la fórmula será:

$$\Delta H_{AB} = HP_A - \Delta He_A + \Delta Hf_1 - \dots - \Delta He_1 + \Delta Hf_n - \Delta He_n - HI_B$$

Donde:

$\Delta H_{AB}$ : diferencia de nivel total entre los extremos de la línea nivelada.

$HP_A$ : altura del prisma sobre el punto de inicio del itinerario A.

$\Delta He_A, \Delta Hf_1, \Delta He_1, \Delta Hf_n, \Delta He_n$ : son diferencias de nivel parciales entre las estaciones de observación y los puntos de cambio tanto de espalda como de frente.

$HI_B$ : altura del eje secundario de la estación total sobre el punto final del itinerario B.

### INICIO Y FINAL CON LA ESTACIÓN EN UN NODO

Aquí se da una fusión de los dos casos anteriores, realizándose entonces la primera lectura

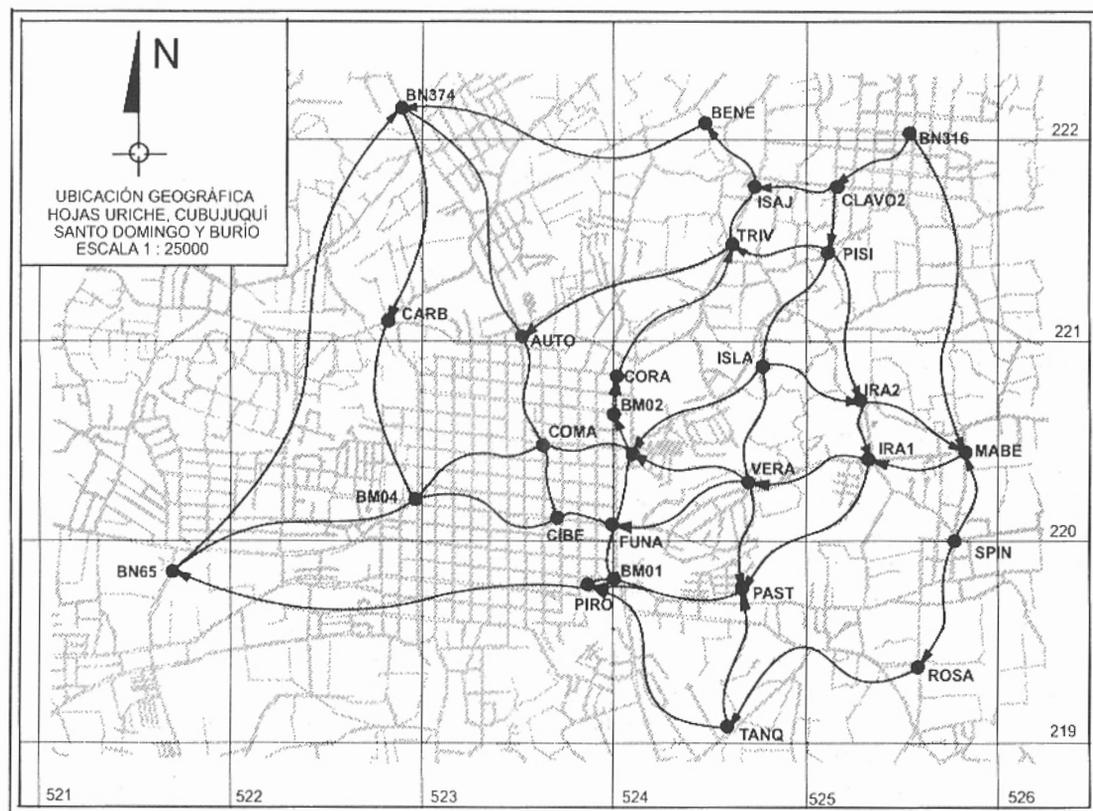


Figura 2. Zona cubierta por la poligonación vertical.

desde el nodo de inicio hacia un punto de cambio y la última lectura desde el nodo final hacia un punto de cambio, resultando la siguiente fórmula:

$$\Delta H_{AB} = HI_A + \Delta HF_1 - \Delta HE_1 + \dots + \Delta HF_n - \Delta HE_n - HI_B$$

Donde:

$\Delta H_{AB}$ : diferencia de nivel total entre los extremos de la línea nivelada.

$HI_A$ : altura del eje secundario de la estación total sobre el punto de inicio del itinerario A.

$\Delta HF_1, \Delta HE_1, \Delta HF_n, \Delta HE_n$ : son diferencias de nivel parciales entre las estaciones de observación y los puntos de cambio tanto de espalda como de frente.

$HI_B$ : altura del eje secundario de la estación total sobre el punto de llegada del itinerario B.

## RESULTADOS

Para esta investigación se realizaron un total de 48 itinerarios de nivelación para una red de 28 puntos, los cuales fueron medidos y reducidos con las metodologías de campo y cálculo expuestas.

Con los valores de los desniveles se desarrolló un proceso de ajuste, el cual brindó la información necesaria para aplicar un modelo de regresión simple, basado en la longitud del itinerario y la desviación estándar de los desniveles medidos, cuyos resultados se hacen evidentes al observar la figura 3.

En el diagrama se observa que los datos tienden a agruparse a lo largo de la recta de mejor ajuste, reflejando así una relación lineal directa creciente entre las dos variables estudiadas.

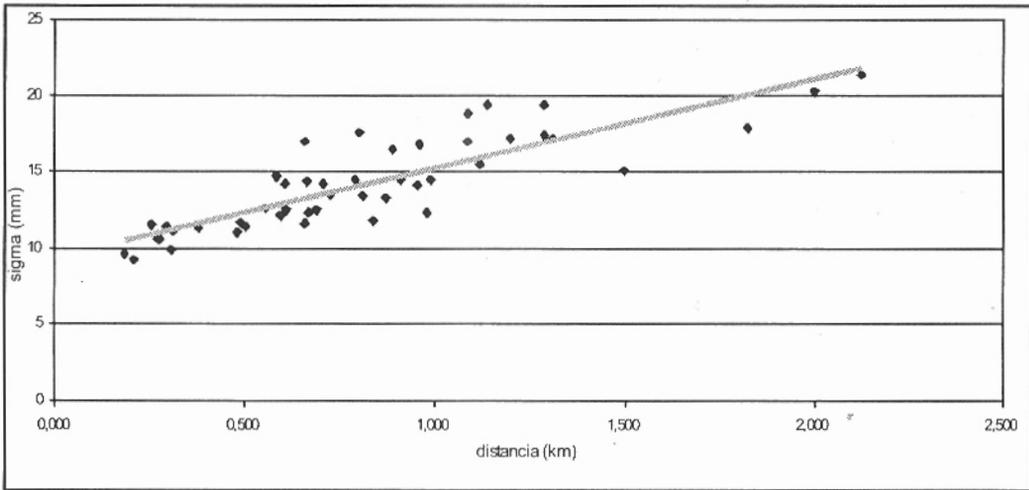


Figura 3. Diagrama de dispersión del conjunto muestra.

Al calcular el coeficiente de correlación "r", el cual es un indicador del grado de correlación lineal existente entre la variable independiente y la dependiente, éste se obtiene mediante:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} * S_{yy}}}$$

$$\frac{54.02029}{\sqrt{9.240644 * 431.0523}} = 0.856$$

Este valor indica que existe una relación lineal directa muy buena, y significa que el 85% de la variabilidad de los errores o desviación estándar de los desniveles es explicada por la longitud del itinerario de nivelación.

Como resultado final se define la siguiente expresión, la que podrá ser utilizada para calcular y estimar la desviación estándar de un desnivel a determinar por poligonación vertical a partir de la longitud de su itinerario:

$$\sigma_{\Delta_{l[mm]}} = \pm 10,00_{[mm]} \pm 6,00_{[mm]} * D_{[km]}$$

Donde:

$\sigma_{\Delta_{l[mm]}}$ : desviación estándar a priori del desnivel en milímetros.

$D_{[km]}$ : corresponde a la variable que se debe sustituir por la longitud aproximada del itinerario de nivelación por realizar.

La expresión anterior fue comprobada haciendo un ajuste de toda la red, utilizando valores de la varianza a priori de las observaciones calculados con ella e introducidos manualmente en el programa de ajuste geodésico ARGE - DOGO®. El ajuste de las 48 observaciones cerró perfectamente y pasó la prueba general de la varianza.

La metodología de poligonación vertical ha demostrado ser, a través de los resultados obtenidos en esta investigación, un medio de nivelación eficiente con el cual se pueden determinar elevaciones con una exactitud media de  $\pm 20$  mm, esto en condiciones similares a las que se tuvieron en el estudio.

Si bien es cierto que los resultados obtenidos no pueden competir con la nivelación geométrica de precisión, tampoco tienen una exactitud despreciable si se considera que el método busca

realizar visuales lo más lejanas posibles sin exigir su simetría. Sin embargo, esto no significa que a la hora de realizar las observaciones se debe descuidar el buen centrado y nivelado de los instrumentos, así como realizar visuales precisas hacia los prismas y observar en dos posiciones para eliminar el efecto del error de índice vertical.

## BIBLIOGRAFÍA

- Davis, R. 1969. *Topografía Elemental*. México D.F.: Editorial Continental, S.A.
- Jordán, W. 1974. *Tratado General de Topografía*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, S.A.
- Roldán, J. 1987. *Ajuste 1*. Texto. Universidad Nacional.
- Roldán, J. 1987. *Ajuste 2*. Texto. Universidad Nacional.
- Ya-Lun-Chau. 1985. *Análisis Estadístico*. Segunda edición. México D.F.: Editorial Interamericana, S.A.