

GPS: EL SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL

Juan Gilberto Serpas, Manuel Ramírez N. y Franklin de Obaldía

Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia
Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica

Email: jserpas@una.ac.cr; mramire@una.ac.cr; fobaldia@una.ac.cr

RESUMEN

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS, por sus siglas en inglés) se ha convertido, en la actualidad, en una herramienta invaluable para el posicionamiento de puntos sobre la superficie terrestre. Este artículo pretende dar al lector una descripción del GPS, así como una introducción al cálculo de coordenadas para ser usadas tanto en navegación como en labores de topografía y geodesia. Las características principales del sistema son descritas y se introducen los principios básicos para la determinación de coordenadas tanto en modo absoluto como en modo relativo.

PALABRAS CLAVES: GPS, posicionamiento global, navegación, posicionamiento relativo, posicionamiento absoluto.

ABSTRACT

Nowadays, the Global Positioning System (GPS) has become an invaluable tool for positioning of points on the Earth surface. The intention of this article is to provide the reader with a description of the GPS, and also an introduction to the computation of coordinates to be used in navigation, surveying and geodesy. The main characteristics of the system are described, as well as the basic principles for the determination of coordinates in absolute and relative modes.

KEYWORDS: GPS, global positioning, navigation, relative positioning, absolute positioning.

1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El GPS es un sistema satelital basado en señales de radio emitidas por una constelación de 24 satélites activos (más cuatro de reserva) en órbita alrededor de la Tierra, a una altura de aproximadamente 20000 km. El sistema permite la determinación de coordenadas tridimensionales en cualquier lugar sobre la superficie terrestre. Estas coordenadas pueden ser usadas en navegación o mediante el uso de métodos adecuados, en topografía y geodesia. El GPS fue implementado por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos, con el objeto de obtener en tiempo real la posición de un punto en cualquier lugar de la Tierra. Este sistema surgió debido a las limitaciones del sistema TRANSIT, que en la década de los setenta proporcionaba posicionamiento usando métodos Doppler. La principal desventaja de estos últimos era la no disponibilidad de satélites las 24 horas del día.

1.1 USOS EN NAVEGACIÓN

La idea original del GPS, que aún hoy se mantiene, era usarlo para navegación. Esto es, conocer la posición del observador, en cualquier momento, dentro de un sistema de referencia creado para tal fin, lo que es conocido como posicionamiento absoluto. La posición del receptor es determinada a partir de las coordenadas conocidas de los satélites y las distancias medidas por lo menos a cuatro satélites, mediante una intersección espacial. La distancia a cada satélite es determinada haciendo uso de la fórmula $d = c * \Delta t$; en donde c corresponde a la velocidad de la luz en el vacío y Δt

es el tiempo de recorrido de la señal desde el satélite hasta el receptor. Evidentemente se necesita proveer al sistema de un mecanismo de medida de tiempo. Tanto los satélites como los receptores son provistos de relojes para tal efecto. Debido a que no se puede tener un reloj perfecto, tanto los relojes en el receptor como en el satélite poseen un error que afectará la distancia medida. A causa de que el intervalo de tiempo es calculado a partir de dos relojes distintos, con errores diferentes, es que se usa el término de pseudodistancias para hacer referencia a las distancias medidas.

La determinación de coordenadas en forma absoluta presenta varios problemas. Además de los errores de reloj, se debe considerar que en la medición de pseudodistancias, la señal proveniente del satélite cambiará su velocidad de propagación al atravesar capas atmosféricas de distinta densidad, especialmente la ionosfera y troposfera, lo que introduce otro error en la posición. También, debe recordarse que la posición de observación es determinada a partir de las coordenadas de los satélites y las pseudodistancias, por lo tanto, también se encuentra afectada por las distintas perturbaciones orbitales, que desvían a los satélites de las órbitas teóricas. La exactitud en la determinación de coordenadas absolutas con respecto al sistema de referencia está entre 100 y 150 m en las tres coordenadas (X, Y, Z).

1.2 USOS EN TOPOGRAFÍA Y GEODESIA

La posibilidad de usar el sistema en tareas donde se necesita alta precisión se ha estudiado desde hace mucho tiempo. En la actualidad se han desarrollado técnicas para lograr exactitud topográfica y geodésica. Éstas son conocidas como técnicas diferenciales o métodos de posicionamiento relativo. Esto significa que es posible conocer con gran exactitud la diferencia de coordenadas entre dos o más receptores. El principio se basa en asumir que en ambos extremos de una línea los errores de las órbitas de los satélites son iguales. En este caso, los mismos satélites tienen que ser usados en los extremos de la línea a medir. Además, mediante el uso de receptores que captan las dos frecuencias emitidas, los errores debidos a la ionosfera pueden eliminarse. En cuanto a la troposfera, ésta es considerada mediante el uso de modelos atmosféricos

adecuados. Mediante el uso de estas técnicas, se pueden lograr precisiones menores a 1 m, y dependiendo del tipo de procesamiento y equipo, se puede llegar a precisiones de cm, incluso de mm.

1.3 MODALIDADES DE MEDICIÓN

De acuerdo con el tipo de medición, ya sea absoluto o relativo, se consideran dos tipos de modalidad en la manera de toma y procesamiento de las mediciones. Estas modalidades son denominadas Estática y Cinemática. Como su nombre lo indica, estática denomina a observaciones estacionarias, mientras que la modalidad cinemática implica movimiento. A continuación se presentan algunos tipos de estas modalidades (HOFFMAN-WELLENHOF *et al.* 1993):

ABSOLUTO ESTÁTICO: Esta modalidad es usada cuando se desea posicionamiento de puntos de exactitud moderada, en el orden de 5 a 10 m. En este caso el cálculo es realizado posteriormente.

ABSOLUTO CINEMÁTICO: Es generalmente usado para la determinación de la trayectoria de vehículos en espacio y tiempo con una exactitud de 10 a 100 m.

RELATIVO ESTÁTICO: Cuando es usado por fases portadoras es el método más aplicado en tareas de geodesia. En esta modalidad lo que se hace es determinar vectores o "líneas-base" entre dos puntos en los cuales se dejan receptores estacionarios. Las precisiones logrables van desde 1 ppm hasta 0.1 ppm para puntos separados pocos kilómetros.

RELATIVO CINEMÁTICO: Como en el método anterior, éste involucra un mínimo de dos receptores, pero uno de ellos estacionario y otro móvil realizando observaciones simultáneas. Las precisiones logrables varían de acuerdo con el tipo de receptor y postprocesamiento, desde el orden de pocos metros hasta centímetros.

1.4 COMPONENTES DE LA SEÑAL

Los osciladores a bordo de los satélites GPS generan una frecuencia fundamental (f_0) con una estabilidad en el rango de 10^{-13} . Dos señales

portadoras en la banda L (conocidas como L1 y L2) se generan mediante la multiplicación entera de f_0 de la siguiente manera (HOFFMAN-WELLENHOF *et al.* 1993):

$$f_0 = 10.23 \text{ Mhz}$$

$$\text{Portadora L1} = 154 f_0 = 1575.42 \text{ Mhz} \cong 19 \text{ cm}$$

$$\text{Portadora L2} = 120 f_0 = 1227.60 \text{ Mhz} \cong 24.4 \text{ cm}$$

A partir del 2005 se espera contar con una nueva frecuencia, la cual ha sido nominada como L5:

$$\text{Portadora L5} = 115 f_0 = 1176.45 \text{ Mhz} \cong 25.5 \text{ cm}$$

Para lograr obtener las lecturas de los relojes, se hace uso de dos códigos. Estos códigos se caracterizan por contener en ellos un ruido pseudoaleatorio (PRN). El primero es el llamado código C/A (Coarse acquisition), generado con una frecuencia igual a $f_0/10$, la cual se repite cada milisegundo. El segundo es el llamado código P (o código Preciso), generado mediante una frecuencia igual a f_0 , la cual es repetida aproximadamente cada 266.4 días. Las señales portadoras L1 y L2 son moduladas con el código P, mientras que el código C/A es modulado para la L1 solamente:

$$\text{Código P: } f_0/10 = 10.23 \text{ Mhz en L1 y L2}$$

$$\text{Código C/A: } f_0 = 1.023 \text{ Mhz en L1}$$

1.5 FORMACIÓN DEL SISTEMA

La descripción del GPS sigue la división acostumbrada para los sistemas satelitales de navegación en tres segmentos: segmento espacial que se refiere a la constelación de satélites, segmento de control que monitorea y controla todo el sistema, y segmento del usuario que consiste de los distintos tipos de receptores (SEEBER 1993). A continuación se da una breve descripción de cada uno de estos segmentos.

1.5.1 SEGMENTO ESPACIAL

La cobertura global de entre cuatro a ocho satélites simultáneos en cualquier momento con una elevación de 15° ha sido una de las metas fundamentales que se han tratado de establecer por los diseñadores e implementadores del GPS (HOFFMAN-WELLENHOF *et al.* 1993). Esto

puede ser logrado mediante la planificación de una constelación adecuada de satélites que haga cumplir la condición deseada.

Constelación

La constelación final y número total de satélites ha sufrido variaciones con el tiempo. Los primeros satélites GPS tenían una inclinación de 63° con respecto al Ecuador y los planes eran colocar 24 satélites en tres planos orbitales. Debido a cuestiones presupuestarias, la constelación se pensó reducir en 18 satélites. Con esta idea, sin embargo, no se proveía la cobertura deseada (HOFFMAN-WELLENHOF *et al.* 1993). La constelación final de satélites GPS actualmente consta de 24 satélites activos más cuatro satélites de reserva orbitando la Tierra en órbitas casi circulares a una elevación de aproximadamente 20200 km sobre la Tierra y con un período de 12 horas sidéreas. Estos satélites tienen una inclinación de 55° con respecto al Ecuador y están colocados en seis planos equidistantes y con cuatro satélites en cada órbita. La separación de los planos de las órbitas es de 60° en ascensión recta (SEEBER 1993).

Degradación de la precisión

Existen dos formas para degradar la señal emitida por los satélites GPS. La primera se llama *Selective Availability* (SA) y la otra *Anti-Spoofing* (A-S). El objetivo de ambas es negar a los usuarios el uso apropiado del sistema.

Selective Availability (SA): La limitación en este caso puede ser lograda de dos maneras. La primera es mediante la manipulación de los datos de las efemérides (método e) y la segunda mediante la desestabilización de los relojes del satélite (método d) (SEEBER 1993). Ambos métodos afectan la medición de pseudodistancias. Afortunadamente en 1998 el presidente Clinton ordenó la cancelación de la SA (ROSENBERG 2003), y en la actualidad esta limitación no afecta la señal GPS, al menos en tiempo de paz.

Anti-Spoofing (A-S): Este método de degradación de la señal consiste en encriptar el código P mediante el uso del llamado código protegido Y. Solamente usuarios autorizados tienen acceso al código P cuando el A-S es activado.

1.5.2 SEGMENTO DE CONTROL

Este segmento consiste de una red de estaciones que permiten controlar y retroalimentar el sistema de satélites. Esto se logra mediante el constante monitoreo de los satélites desde una serie de estaciones convenientemente ubicadas alrededor de la Tierra.

Existe una **estación maestra de control** ubicada en el Centro de Operaciones Consolidadas del Espacio, en Colorado Springs. En esta estación se reúne la información de las estaciones de monitoreo y con estos datos se calculan las órbitas de los satélites y correcciones a los relojes haciendo uso de estimadores Kalman. Las **estaciones de monitoreo** son cinco y se encuentran localizadas en Hawái, Colorado Springs, Isla Ascensión en el Océano Atlántico Sur, Diego García en el Mar Índico y Kwajalein en el Océano Pacífico Norte. Estas estaciones están equipadas con relojes de Cesio y receptores del código P que constantemente monitorean todos los satélites sobre el horizonte. Estas estaciones son usadas para la determinación de las efemérides transmitidas y modelados de reloj. Las correcciones a las órbitas y relojes son retroalimentadas a los satélites mediante las **estaciones de control terrestres**. Estas estaciones se encuentran en Ascensión, Diego García y Kwajalein (HOFFMAN-WELLENHOF *et al.* 1993).

1.5.3 SEGMENTO DEL USUARIO

Este segmento se refiere a los distintos tipos de receptores que existen en el mercado y a los distintos usuarios del sistema. Con el paso del tiempo nuevas aplicaciones se han encontrado al sistema. Se necesita, por lo tanto, diseñar y desarrollar equipos con ciertas características para adaptarse a las distintas necesidades de los usuarios.

Tipos de receptores

El tipo de receptor a usar dependerá del tipo de observaciones y de la disponibilidad de códigos. Los receptores GPS pueden ser clasificados de acuerdo con sus características de la siguiente manera (SEEBER 1993):

- Código C/A

- Código C/A + fase portadora L1
- Código C/A + fase portadora L1 + fase portadora L2
- Código C/A + código P + fases portadoras L1, L2

Otra clasificación de los receptores es por el tipo de usuarios (SEEBER 1993):

- Receptores militares
- Receptores civiles
- Receptores para navegación
- Receptores geodésicos

2. EL CÁLCULO DE COORDENADAS DE SATÉLITE

2.1 INTRODUCCIÓN

La determinación de la posición de la antena de un receptor GPS está en función de la posición de los satélites y de las pseudodistancias o fases medidas hacia éstos. Es importante, por lo tanto, conocer la posición de los satélites dentro de un sistema coordinado de referencia, con el fin de determinar la posición del receptor.

2.2 EL SISTEMA DE REFERENCIA

La constelación de satélites GPS está referida a un sistema inercial. Esto es, un sistema que no presenta giros ni aceleraciones. El primer eje del sistema (eje X) se encuentra en la dirección del punto aries o equinoccio de primavera. El tercer eje (eje Z) coincide con la posición del polo a Enero 0, 1980 (REILLY 1996). El segundo eje (eje Y) es perpendicular a los anteriores y forma un sistema de mano derecha. Estas coordenadas, por lo tanto, tienen que ser transformadas a un sistema fijo a la Tierra, girando a la misma velocidad que la terrestre.

2.3 ALGORITMO DE CÁLCULO

La órbita del satélite puede ser descrita basada en las leyes de Kepler, que definen una órbita de referencia; ésta nos proporciona la posición del satélite asumiendo que no existen perturbaciones. Esto nos da una primera aproximación, ya que los satélites están expuestos a una serie de perturbaciones que los alejan de sus órbitas teóricas

keplerianas. Entre estas perturbaciones se pueden nombrar: radiación solar, no esfericidad de la Tierra, deriva atmosférica, atracción de los planetas, el Sol y la Luna, etc. Por lo tanto, las fórmulas antes descritas tienen que ser corregidas. Afortunadamente, las perturbaciones son transmitidas por los satélites en el archivo de navegación en las llamadas efemérides transmitidas. Esto ayuda a corregir las coordenadas de la posición del satélite.

Los parámetros transmitidos por el satélite que permiten calcular su posición son, entre otros (SIEBER 1993):

Parámetros de tiempo

t_{oc} y t_{oc} .. tiempo de efemérides de referencia y parámetros del reloj

a_0, a_1, a_2 .. coeficientes polinomiales para la corrección del reloj (sesgo (s), deriva (s/s) y tasa de la deriva (s/s²))

IOD .. fecha de emisión

Elementos keplerianos

\sqrt{a} , e , i_0 al tiempo de referencia, Ω_0 , ω , M_0 .

Parámetros perturbadores

Δn .. diferencia en movimiento medio

$\dot{\Omega}$.. tasa de cambio en Ω

\dot{i} .. tasa de cambio en i

C_{us}, C_{uc} .. amplitud del seno y coseno armónicos del argumento de latitud

C_{is}, C_{ic} .. amplitud del seno y coseno armónicos del ángulo de inclinación

C_{rs}, C_{rc} .. amplitud del seno y coseno armónicos del radio de la órbita

Tomando en consideración la información transmitida en el archivo de navegación, la posición de los satélites puede ser calculada mediante el siguiente algoritmo (GOAD 1995b):

a) $t_k = t - t_{oc}$, describe el intervalo de tiempo desde la época de referencia. Un posible cambio de semana tiene que ser considerado:

Si $t_k < -302400$ entonces $t_k = t_k + 604800$

Si $t_k > 302400$ entonces $t_k = t_k - 604800$

b) $n = n_0 + \Delta n$, el valor de n_0 se calcula usando

$$n_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}, \text{ con el semieje mayor de la órbita y } GM=3.986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

c) $M_k = M_0 + n t_k$, anomalía media

d) $E_k = M_k + e \sin E_k$, Ecuación de Kepler para la anomalía excéntrica, la cual es calculada iterativamente usando como primera aproximación M_k

e) $\cos v_k = (\cos E_k - e) / (1 - e \cos E_k)$

$$\sin v_k = \sqrt{1 - e^2} \sin E_k / (1 - e \cos E_k)$$

La anomalía verdadera

$$v_k = \arctan \frac{\sin v_k}{\cos v_k}$$

f) $\phi_k = v_k + \varpi$, argumento de latitud

g) $\delta uk = C_{uc} \cos 2\phi_k + C_{us} \sin 2\phi_k$, corrección al argumento de latitud

$\delta rk = C_{rc} \cos 2\phi_k + C_{rs} \sin 2\phi_k$, corrección al radio

$\delta ik = C_{ic} \cos 2\phi_k + C_{is} \sin 2\phi_k$, corrección a la inclinación

h) $u_k = \phi_k + \delta uk$, argumento de latitud corregido

i) $r_k = a(1 - e \cos E_k) + \delta rk$, radio corregido

j) $ik = i_0 + \delta ik + \dot{i} \cdot t_k$, inclinación corregida

k) $\underline{r}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = r_k \begin{bmatrix} \cos u_k \\ \sin u_k \end{bmatrix}$, posición en el plano orbital

l) $\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - w_e) t_k - w_e \cdot t_{oc}$, longitud del nodo ascendente corregida con w_e la tasa de rotación terrestre = 7.292115×10^{-5} rad/s

m) posición en el sistema terrestre

$$\begin{aligned} x_T &= x_k \cos \Omega_k - y_k \cos ik \sin \Omega_k \\ y_T &= x_k \sin \Omega_k - y_k \cos ik \cos \Omega_k \\ z_T &= y_k \sin i_k \end{aligned}$$

3. EL CÁLCULO DE COORDENADAS

3.1 INTRODUCCIÓN

El paso próximo es la determinación de la posición de la antena del receptor GPS, una vez conocida la posición de los satélites. Con las pseudodistancias o fases medidas hacia los satélites puede realizarse la determinación de coordenadas del receptor. En esta parte describimos el cálculo de coordenadas absolutas de un receptor estacionario. La descripción dada es mediante pseudodistancias. El cálculo mediante el uso de fases sigue un proceso similar y es dejado como ejercicio para el lector.

3.2 COORDENADAS ABSOLUTAS

Este cálculo es el más usado para navegación y fue el que le dio su origen al sistema GPS. En este caso necesitamos calcular las coordenadas del receptor haciendo uso de solamente un aparato. En la actualidad se pueden obtener exactitudes en el orden de 5 a 10 m. El primer paso para la determinación de coordenadas es calcular la posición aproximada del receptor. Esto es realizado por medio de aproximaciones, iteraciones y por métodos analíticos. Uno de los métodos más conocidos es el de Bancroft, descrito en detalle en Goad 1995a. Una vez calculada la posición aproximada se procede a mejorar mediante ajuste por mínimos cuadrados la posición del receptor. La ecuación básica para pseudodistancias para la época t está dada por:

$$P_i^j(t) = \rho_i^j(t) + c\Delta\delta_i^j(t), \quad (3.1)$$

donde $P_i^j(t)$ es la pseudodistancia medida entre el punto de observación i y el satélite j , $\rho_i^j(t)$ es la distancia geométrica entre el punto de observación y el satélite j , c es la velocidad de la luz y $\Delta\delta_i^j(t)$ es el error del reloj, representando el efecto combinado del error del reloj del receptor y el satélite, que puede ser escrito como:

$$c\Delta\delta_i^j(t) = c\delta_i(t) - c\delta_j(t) \quad (3.2)$$

El error del reloj del satélite puede ser calculado usando la información contenida en el mensaje transmitido en las efemérides y éste está dado por:

$$\delta^j(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 \quad (3.3)$$

Para la distancia geométrica podemos escribir:

$$\begin{aligned} \rho_i^j(t) &= \sqrt{(X^j(t) - X_i)^2 + (Y^j(t) - Y_i)^2 + (Z^j(t) - Z_i)^2} = \\ &= \rho(X_i, Y_i, Z_i) \end{aligned} \quad (3.4)$$

función de las coordenadas del satélite X^j , Y^j y Z^j , y las coordenadas del receptor X_i , Y_i y Z_i .

Un algoritmo de ajuste por mínimos cuadrados puede implementarse para resolver por las tres coordenadas y error de reloj del receptor haciendo uso de (3.1). Esta ecuación no es lineal en la distancia geométrica, por lo tanto, debe ser linealizada, y se necesita conocer las coordenadas aproximadas del receptor. Las coordenadas aproximadas del receptor pueden ser calculadas a partir de algoritmos de búsqueda o algoritmos analíticos. Un método de fácil implementación es el uso del producto interno de Lorentz, atribuido a Bancroft, ver Goad 1995a.

Si asumimos coordenadas aproximadas la distancia geométrica aproximada estará dada por:

$$\begin{aligned} \rho_{i0}^j(t) &= \sqrt{(X^j(t) - X_{i0})^2 + (Y^j(t) - Y_{i0})^2 + (Z^j(t) - Z_{i0})^2} = \\ &= \rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Entonces, para las coordenadas de los puntos podemos escribir:

$$X_i = X_{i0} + \delta X_i, Y_i = Y_{i0} + \delta Y_i, \text{ y } Z_i = Z_{i0} + \delta Z_i.$$

Con esta sustitución podemos escribir (3.4) como:

$$\rho(X_i, Y_i, Z_i) = \rho(X_{i0} + \delta X_i, Y_{i0} + \delta Y_i, Z_{i0} + \delta Z_i),$$

la cual puede ser expandida en series de Taylor como:

$$\rho(X_i, Y_i, Z_i) = \rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0}) + \left. \frac{\partial \rho(X_i, Y_i, Z_i)}{\partial X} \right|_{X_{i0}} \delta X_i + \left. \frac{\partial \rho(X_i, Y_i, Z_i)}{\partial Y} \right|_{Y_{i0}} \delta Y_i + \left. \frac{\partial \rho(X_i, Y_i, Z_i)}{\partial Z} \right|_{Z_{i0}} \delta Z_i \quad (3.6)$$

las derivadas parciales están dadas por:

$$\left. \frac{\partial \rho(X_i, Y_i, Z_i)}{\partial X} \right|_{X_{i0}} = - \frac{X^j(t) - X_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})}$$

$$\left. \frac{\partial \rho(X_i, Y_i, Z_i)}{\partial Y} \right|_{Y_{i0}} = - \frac{Y^j(t) - Y_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})}, y$$

$$\left. \frac{\partial \rho(X_i, Y_i, Z_i)}{\partial Z} \right|_{Z_{i0}} = - \frac{Z^j(t) - Z_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})}$$

Ahora podemos rescribir (3.1) para formar la ecuación linealizada de observación como:

$$P_i^j(t) - \rho_{i0}^j(t) - c\delta^j(t) = - \frac{X^j(t) - X_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} - \frac{Y^j(t) - Y_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} - \frac{Z^j(t) - Z_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} + c\delta_i(t) + e_i$$

o en forma compacta:

$$y = A\xi + e, \quad e \sim (0, \sigma_o^2 W^{-1}),$$

con W la matriz de pesos de las observaciones, para nuestro caso $W=I$, σ_o^2 la desviación estándar de la unidad de pesos,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{X^1(t) - X_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} & \frac{Y^1(t) - Y_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} & \frac{Z^1(t) - Z_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} & c \\ \frac{X^2(t) - X_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} & \frac{Y^2(t) - Y_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} & \frac{Z^2(t) - Z_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & c \\ \frac{X^n(t) - X_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} & \frac{Y^n(t) - Y_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} & \frac{Z^n(t) - Z_{i0}}{\rho(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})} & c \end{bmatrix}$$

matriz de configuración,

$$y = \begin{bmatrix} P_i^1(t) - \rho_{i0}^1(t) + c\delta^1(t) \\ P_i^2(t) - \rho_{i0}^2(t) + c\delta^2(t) \\ \vdots \\ P_i^n(t) - \rho_{i0}^n(t) + c\delta^n(t) \end{bmatrix}$$

vector de observaciones reducidas,

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

vector de errores aleatorios de la medición,

$$\xi = \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \\ \delta_i \end{bmatrix} \text{ vector de incrementos a las incógnitas.}$$

La solución por mínimos cuadrados está dada por:

$$\hat{\xi} = (A^T A)^{-1} A^T y,$$

con la matriz de dispersión estimada de las incógnitas

$$\hat{D}(\xi) = \hat{\sigma}_o^2 (A^T A)^{-1}$$

$$\text{donde } \hat{\sigma}_o^2 = \frac{\tilde{e}^T \tilde{e}}{n-4}, \quad \tilde{e} = y - A\hat{\xi}$$

3.3 COORDENADAS RELATIVAS

Se habla de coordenadas relativas de un punto cuando a partir de las coordenadas de un punto considerado como referencia, se quiere determinar las coordenadas de otro, u obtener la línea base (espacial) entre ambos. En general, para este procedimiento se hace uso de mediciones de fase. La técnica usada es la de diferenciar observaciones

con el fin de eliminar efectos comunes. Cuando se usan mediciones de fase debe determinarse una incógnita adicional: la ambigüedad o número completo de longitudes de onda en la medición de fase.

Se habla de diferencias simples (SD) cuando se diferencian 2-observaciones al satélite (k), el cual es observado simultáneamente por 2-estaciones (i, j). Usando esta técnica los efectos atmosféricos son significativamente reducidos, y los errores de la órbita y reloj del satélite son eliminados. Aun se pueden observar efectos diferenciales tales como ionosfera, troposfera y multitrayectoria, y la diferencia entre los errores del reloj entre receptores GPS (y ambigüedades para el caso de las fases). Los errores (remanentes) debido a la troposfera y multitrayectoria pueden ser ignorados, solamente los errores causados por efectos ionosféricos, error del reloj diferencial y desplazamientos entre canales son estimados. Las ecuaciones usadas para el cálculo de los vectores son (BRZEZINSKA 2003):

$$\Phi_{ij,1}^k = \rho_{ij}^k - \frac{I_{ij}^k}{f_1^2} + T_{ij}^k + \lambda_1 N_{ij,1}^{*k} + c \cdot dt_{ij} + m_{j,i,1}^k + \varepsilon_{ij,1}^k$$

$$\rho_{ij,1}^k = \rho_{ij}^k + \frac{I_{ij}^k}{f_1^2} + T_{ij}^k + c \cdot dt_{ij} + b_{ij,2}^k + M_{j,i,1}^k + e_{ij,1}^k$$

con $\rho_{ij}^k = \rho_j^k - \rho_i^k$ el efecto diferencial de la distancia geométrica a los satélites, $I_{ij}^k, T_{ij}^k, m_{j,i,1}^k, M_{j,i,1}^k$ el efecto combinado de la ionosfera, troposfera, y efecto multirruta para código y fases, respectivamente, y en donde $N_{ij,1}^{*k} = N_{ij,1}^k + (\varphi_{i_0,1} - \varphi_{i_0,j,1})$ representa las ambigüedades diferenciales de la combinación.

Si ahora diferenciamos observaciones (en una dirección) a partir de 2-receptores (i, j) observando a 2-satélites (k, l) o simplemente diferenciando 2-diferencias-simples a los satélites (k, l), obtenemos las llamadas diferencias dobles (DD). El cálculo por DD es la técnica más popular para el procesamiento de mediciones GPS. Usando DD las incógnitas son las coordenadas de la estación (y las ambigüedades diferenciales para el caso de medi-

ciones de fase). En esta situación los efectos diferenciales atmosféricos y multitrayectoria son muy pequeños y pueden ser ignorados. La precisión obtenida es del centímetro para líneas-base cortas (menores de 10-15 km); para líneas-base largas se usa la combinación llamada ion-libre (ver HOFFMAN-WELLENHOF *et al.* 1993). Las ecuaciones usadas para el cálculo de los vectores en este caso pueden escribirse como (BRZEZINSKA 2003):

$$\Phi_{ij,1}^{kl} = \rho_{ij}^{kl} - \frac{I_{ij}^{kl}}{f_1^2} + T_{ij}^{kl} + \lambda_1 N_{ij,1}^{kl} + m_{j,i,1}^{kl} + \varepsilon_{ij,1}^{kl}$$

$$\rho_{ij,1}^{kl} = \rho_{ij}^{kl} + \frac{I_{ij}^{kl}}{f_1^2} + T_{ij}^{kl} + M_{j,i,1}^{kl} + e_{ij,1}^{kl}$$

con $\rho_{ij}^k = \rho_j^k - \rho_i^k$, y los otros términos los efectos combinados de la ionosfera, troposfera, multirruta y ambigüedades para el caso de medición de fases.

Otras combinaciones, como diferencias triples, son usadas para eliminar las ambigüedades para el caso de las mediciones de fase, pero son raramente implementadas debido a que el nivel de ruido es mucho mayor comparado con SD o DD, por lo que no es recomendado cuando se desean obtener precisiones altas (en posicionamiento).

COMENTARIO FINAL

En este artículo se han presentado las características y los principios básicos del GPS, las distintas modalidades de medición, así como las ecuaciones para el procesamiento de datos. La mayoría de los sistemas de procesamiento de datos para GPS son cajas negras que ocultan al usuario final los mecanismos de cálculo de coordenadas. Por lo tanto, se pretende motivar al lector, en el análisis de los algoritmos de determinación de coordenadas del sistema, con una visión más detallada, de forma que pueda analizar de una manera más crítica los resultados obtenidos en las diferentes modalidades de medición.

BIBLIOGRAFÍA

- Brzezinska, D. 2003. *Surveying with satellites*. Class notes. Department of Geodetic Science and Surveying. The Ohio State University.
- Goad, Clyde C. 1995a. *Single Site GPS Models*. Notas de la Escuela Internacional de GPS para Geodesia. Holanda, marzo 26-abril 1.
- Goad, Clyde C. 1995b. *SU 609 Surveying with Satellites*. Department of Geodetic Science and Surveying. The Ohio State University, Summer.
- Hoffman-Wellenhop, B., Lichtenegger, H. & Collins, J. 1993. *Global Positioning System: Theory and Practice*, segunda edición. Springer-Verlang, Wien, New York.
- Kaula, William M. 1996. *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publishing Company. Massachusetts, Toronto, Londres.
- Reilly, James P. 1996. The Russian Glonass Satellites. *GPS observer*, pp. 18, Julio.
- Rosenberg, M. 2003. President Turns Off GPS Selective Availability. <http://geography.about.com/library/weekly/aa050400a.htm>
- Seeber, Gunter. 1993. *Satellite geodesy: foundations, methods and applications*. Walter de Gruyter, Berlín, Alemania.