UNICIENCIA 11
pp. 81-88
1994

ALGUNOS METODOS PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE LA FISICA-MATEMATICA

R. Quintero
Escuela de Matemáticas. Universidad Nacional. Heredia. Costa Rica

J. Bonatti
Escuela de Física. Universidad de Costa Rica. San Pedro. Costa Rica

RESUMEN

En este trabajo, se exponen algunos métodos para la solución de problemas de frontera, en regiones donde esta frontera es desconocida y se encuentra en movimiento (problema tipo Stefan). Como ejemplo se resuelve analíticamente el problema de congelamiento de un suelo húmedo. Brevemente se exponen algunos conceptos y resultados de la teoría de funciones generalizadas pertinentes a esta investigación, procediendo luego, al planteo del citado problema del congelamiento de un suelo húmedo como un problema generalizado de Cauchy y a su correspondiente solución. Se expone también un método numérico de solución.

ABSTRACT

In this we give some methods for the solution of the mobile boundary value problems (Stefan's problem). For example we resolve analitically the problem of frost of a wet floor. Next we give some results of the generalized functions theory related to our case formulating these as generating these as generalized Cauchy's problem. Finally, a numerical solution is also given.

I. INTRODUCCION

Problema tipo Stefan se le llama a aquellos problemas de determinación del campo de temperatura y de la frontera de transición de fase en sustancias puras. La fase de la sustancia cambia, a consecuencia de la conducción térmica que se lleva a cabo en el medio por efecto de fuentes internas o externas. Esta conducción térmica en cada fase de la sustancia, se describe por medio de las ecuaciones de transmisión de calor. La superficie de discontinuidad que separa las fases se le llama frontera libre y cumple la condición de Stefan. Esta condición expresa la conservación de la energía en un cambio de fase. En la frontera libre, la temperatura del medio es igual a la temperatura de fusión de la sustancia, la cual es conocida.

El primer trabajo sobre problemas tipo Stefan fue publicado en 1831 por J.Lamé y B. P. Clapeyrón, bajo el título *La solidificación de una esfera líquida sometida a enfriamento.* En 1889 N.Stefan publicó un trabajo sobre el congelamiento de un suelo húmedo y demostró, que a causa del balance de energía, se cumple lo que llamamos condición de Stefan.

El estudio del problema tipo Stefan lo podemos resumir en las siguientes formas:

1. Existencia y unicidad de la solución en el caso de una o varias variables espaciales.
2. Estudio de la estructura y propiedades de la solución. Dentro de este caso, la solución para cuando el tiempo crece.
3. Problemas cuasiestacionarios.
4. Métodos numéricos.
5. Problemas de optimización y de control de la superficie de discontinuidad.

Se expondrán algunos métodos para la solución de problemas tipo Stefan (Rubenstein 1967). En el caso específico del congelamiento de un suelo húmedo, los métodos serán el de las funciones generalizadas y un método numérico.

Algunos conceptos y resultados de la teoría de funciones generalizadas se pueden encontrar en Vladimirov (Vladimirov 1981), mientras que el método numérico se describe en Budak (Budak 1965).

II. PLANTEO DEL PROBLEMA

El problema consiste en encontrar funciones $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ y $l(t)$ que cumplan con las siguientes condiciones:

1. La temperatura crítica $T_{cr.} = 0$ en la superficie de discontinuidad de fases.
2. $-T_1 < 0$ para $x = 0$.
3. $T_\infty > 0$ para $t = 0$.
4. En la superficie de discontinuidad de fases se cumple la condición de Stefan:

$$K_1 \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)_-} - K_2 \frac{\partial U_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)_+} = \lambda \varrho \frac{dl}{dt} \qquad (1)$$

5. Con $U_1(x,t)$ tal que

$$c_1 \varrho_1 \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial x^2} \qquad (2)$$

$$0 < x < l(t) \text{ para t } > 0 \qquad (3)$$

6. Con $U_2(x,t)$ tal que

$$c_2\varrho_2 \frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t} = K_2 \frac{\partial^2 U_2(x,t)}{\partial x^2} \tag{4}$$

$$l(t) < x < \infty \text{ para t } > 0 \tag{5}$$

Las sustituciones $a_1 = \dfrac{K_1}{c_1\varrho_1}$ y $a_2 = \dfrac{K_2}{c_2\varrho_2}$ con la aproximación $\varrho_1 = \varrho_2 = 1 \dfrac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$, o sea, que la densidad del hielo $\varrho_1 = 0.917\dfrac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ es aproximadamente igual a la del agua $\varrho_2 = 1.0\dfrac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ y la definición de nuevas variables

$$\hat{U}_1(x,t) = \begin{cases} U_1(x,t) & para \quad 0 < x < l(t), t > 0 \\ -U_1(-x,t) & para \quad -l(t) < x < 0, t > 0 \\ 0 & para \quad x \in]-l(t), l(t)[, t > 0 \\ 0 & para -\infty < x < +\infty, t < 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\hat{U}_2(x,t) = \begin{cases} U_2(x,t) & para \quad l(t) < x < +\infty, t > 0 \\ 0 & para \quad x \notin]l(t), +\infty[, t > 0 \\ 0 & para -\infty < x < +\infty, t < 0 \end{cases} \tag{7}$$

con

$$\frac{\partial \hat{U}_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)_-} = q_1 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \hat{U}_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)_+} = q_2 \tag{9}$$

nos transforma el problema (1)-(5) en:

$$\frac{\partial \hat{U}_1(x,t)}{\partial t} = a_1\, \Delta \hat{U}_1(x,t) + \hat{f}_1 \tag{10}$$

$$\hat{U}_1(x,t) = 0,\ t < 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \hat{U}_2(x,t)}{\partial t} = a_2\, \Delta \hat{U}_2(x,t) + \hat{f}_2 \tag{12}$$

$$\hat{U}_2(x,t) = 0,\ t < 0 \tag{13}$$

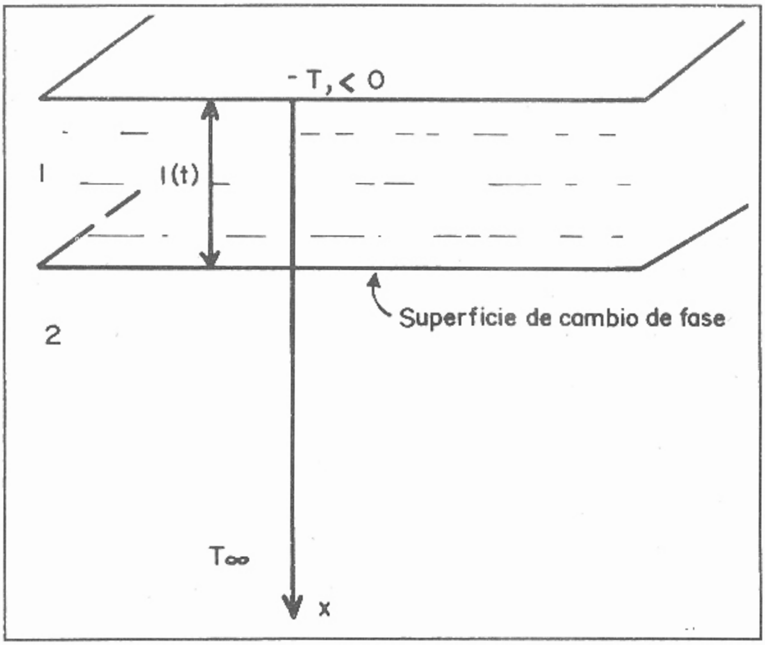

Figura 1. Se representa esquemáticamente la geometría del problema.

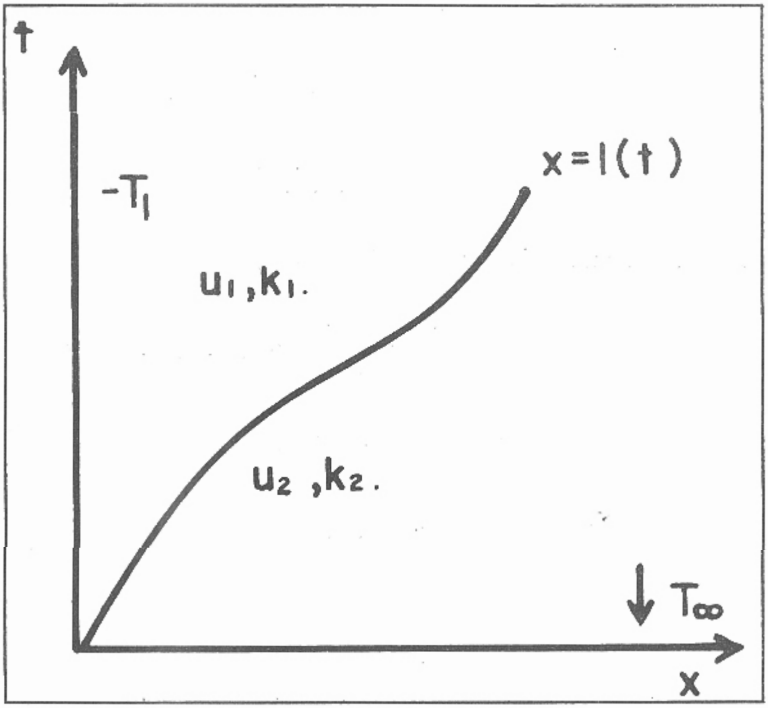

Figura 2. Representación gráfica de la reflexión de la función $x = l(t)$ con respecto al eje t.

III. SOLUCION ANALITICA

En la sección anterior hemos transformado el problema a la forma dada por el conjunto de ecuaciones (10)-(13). para las cuales nos es posible aplicar el método de solución descrito por Vladimirov (Vladimirov 1981), para obtener

$$\hat{U}_1(x,t) = \varepsilon a_1 * \hat{f}_1 \tag{14}$$

$$\hat{U}_2(x,t) = \varepsilon a_2 * \hat{f}_2 \tag{15}$$

donde $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son funciones a determinar. En el presente caso específico encontramos que:

$$\hat{f}_1 = 2a_1T_1\delta'(x) + a_1q_1\cos(\vec{n},x)\delta s_1 + a_1q_1\cos(\vec{n},x)\delta s_2 \tag{16}$$

$$\hat{f}_2 = T_\infty\delta(t) + a_2q_2\cos(\vec{n},x)\delta s_1 \tag{17}$$

De aquí obtenemos:

$$\hat{U}_1(x,t) = -T_1\mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{a_1t}}) + V_{l(t)}[q_1](x,t) - V_{-l(t)}[q_1](x,t) \tag{18}$$

$$\hat{U}_2(x,t) = T_\infty - \frac{T_\infty}{2}\mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{a_1t}}) - V_{l(t)}[q_2](x,t) \tag{19}$$

Donde $V_{l(t)}[q_1](x,t)$ es el potencial térmico del primer tipo (Begmatov 1984).

Con la introducción de $q_1 = \frac{q_1^0}{\sqrt{t}}$, $q_2 = \frac{q_2^0}{\sqrt{t}}$, $l(t) = 2\alpha\sqrt{a_1t}$ y utilizando las condiciones:

$$\lim_{x\to l(t)_-} \frac{\partial\hat{U}_2(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{20}$$

$$\lim_{x\to l(t)_+} \frac{\partial\hat{U}_1(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{21}$$

se obtiene $q_1^0 = q_1^0(\alpha)$, $q_2^0 = q_2^0(\alpha)$, además de la condición de Stefan

$$K_1q_1 - K_2q_2 = \lambda\varrho\frac{dl}{dt}. \tag{22}$$

Finalmente se llega a una ecuación que depende de α, i.e.

$$F(\alpha) = 0 \tag{23}$$

De la solución de esta ecuación se obtienen q_1, q_2, $l(t)$.

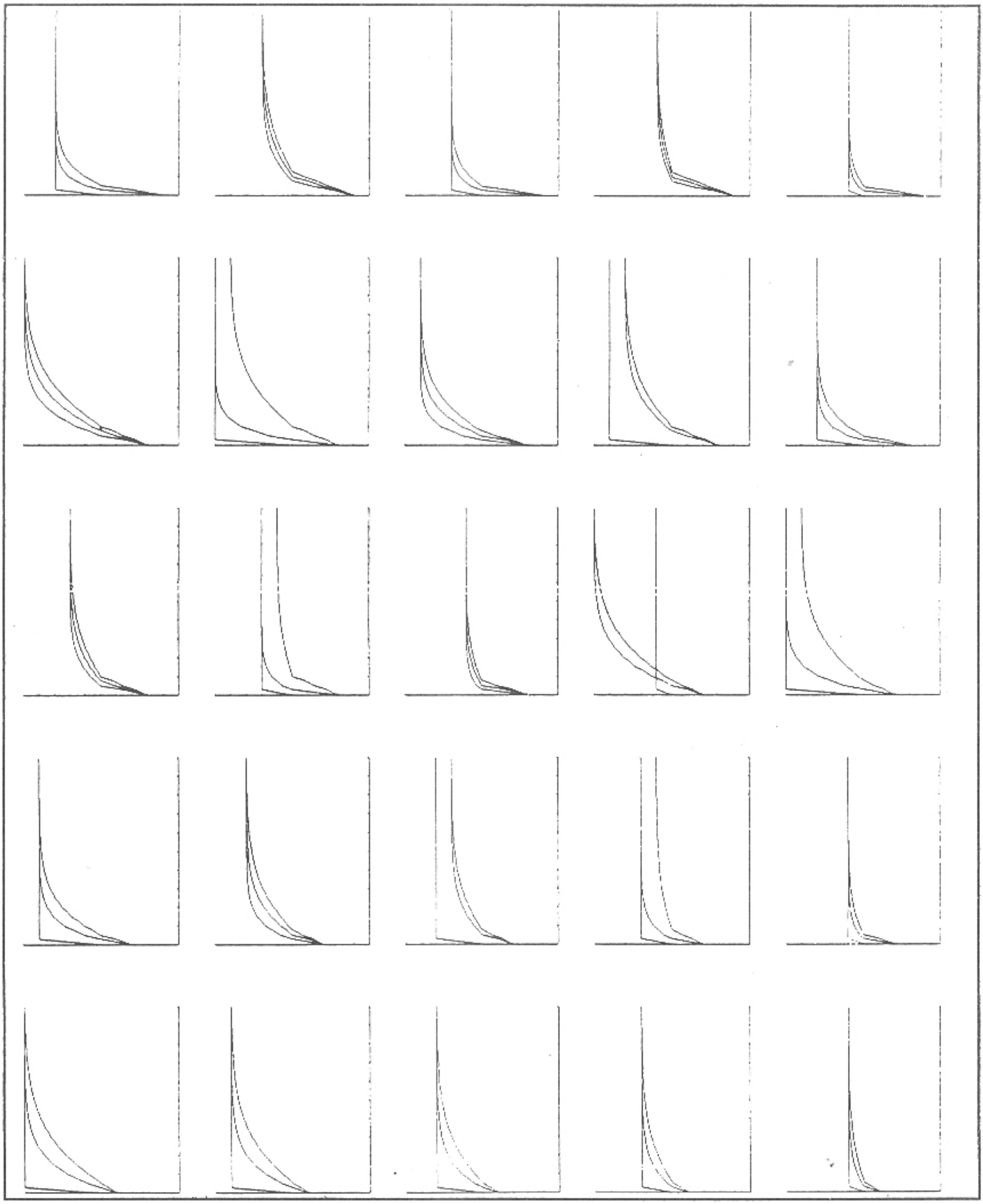

Figura 3. La temperatura U(x,t) en función de la posición x y del tiempo t; donde este último toma valores evolutivos hasta un máximo de 0.3. La temperatura en la primera fase, está representada por T1, la cual toma valores negativos desde 1 hasta 5, así en la primera columna, T1 = -1 y en la quinta columna T1 = -5. La temperatura en la segunda fase está representada por T2, la cual toma valores desde 1 hasta 5 y lo hace por filas, donde las filas se cuentan de abajo hacia arriba.

IV. METODO NUMERICO

Para la solución por métodos numéricos, utilizamos el método propuesto en Budak (Budak 1965) y hacemos las siguientes sustituciones:

$$\bar{t} = \frac{a_1 t}{L^2}, \; \bar{x} = \frac{x}{L}, \; \bar{U}_1 = \frac{U_1}{U_0}, \; \bar{U}_2 = \frac{U_2}{U_0}, \tag{24}$$

donde $U_0 = max\{|-T_1|, |T_2|\}$. L-posee unidades de distancia y representa físicamente la profundidad máxima del suelo congelado.

Luego procedemos a realizar los siguientes pasos:

- a. Reemplazar el sistema de ecuaciones diferenciales, condiciones iniciales y de frontera, por un sistema de ecuaciones algebraicas.
- b. Determinar la ubicación del frente de fase (superficie de discontinuidad).
- c. Calcular los valores discretos de las funciones buscadas y de los coeficientes.
- d. Construir un método iterativo para precisar los valores encontrados en el punto c.

Para nuestro problema específico, tomando como parámetros los expuestos en Carslow (Carslow 1964). Para el problema en estudio los autores han desarrollado un programa en FORTRAN. El lector interesado en los detalles de este tratamiento numérico debe referirse a la literatura antes citada, ya que nos hemos limitado a presentar los resultados finales en la figura 3.

V. CONCLUSIONES

El método numérico propuesto, describe el proceso para valores evolutivos del tiempo y se varían las condiciones iniciales. se obtienen fácilmente los nuevos valores discretos de las funciones buscadas y podemos construir así sus gráficos. Por el contrario, en el método analítico que utiliza las funciones generalizadas, si se varían las condiciones para $x = 0$, introduciendo una función que no sea constante, este método nos obliga a resolver una ecuación de Volterra de primer grado, lo cual dificulta en mucho la resolución del problema en forma analítica. Lo más importante de este método es que nos permite resolver problemas para los cuales las condiciones de frontera no vienen dadas por funciones de tipo C^r.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Sorli, K.: Implementation of ADE-methods for moving boundary-problems, to appear in Math. and Comp., University of Thondhein.

[2] Begmatov, A.B., 1984: Problemas de frontera para la ecuación de calor y algunos métodos de solución. Tashkent.

[3] Budak, B.M., F.P. Vasiliev y A.B. Uspenckii, 1965: Diferencias finitas para la solución de problemas tipo Stefan. Métodos numéricos en Gasodinámica, Universidad de Moscú.

[4] Vladimirov, V.S., 1981: Ecuaciones de la Física-Matemática. Nauka, Moscú.

[5] Rubenstein, L.N., 1967: Problema de Stefan. Editorial Zvaigzne, Riga.

[6] Quintero, R., 1991: Algunos métodos para resolver problemas que tienen frontera desconocida y en movimiento, Tesis de maestría presentada en la Universidad Estatal de Tashkent, Usbekistan.

[7] Carslow, G., D. Egor, 1964: Conducción de calor en cuerpos sólidos. Nauka, Moscú.