UNICIENCIA 11
pp. 53-61
1994

NUEVO ENFOQUE COMBINATORIO PARA EL PROBLEMA DEL PASEO AL AZAR EN UN ESPACIO n-DIMENSIONAL

Víctor Medina, Tatiana Láscaris Comneno y Osvaldo Skliar
Universidad Nacional, Costa Rica

Resumen

Se presenta un nuevo enfoque combinatorio para resolver el problema del cálculo de las probabilidades de paso —probabilidades de transición entre dos posiciones cualesquiera— de una partícula que se desplaza siguiendo una trayectoria de paseo al azar en un retículo n-dimensional.

Las fórmulas a que se llega difieren en su forma de las obtenidas previamente con un enfoque diferente del mismo problema. Obviamente los resultados numéricos a que conducen los dos enfoques mencionados coinciden.

Abstract

We present a new combinatorial approach to compute the transition probability corresponding to an arbitrary pair of positions of a particle which follows a random walk on an n-dimensional lattice.

The formulas presented here differ in form from the ones previously obtained for the same problem with another approach. Obviously the same numerical results follow from either one of these two approaches.

1 Introducción

Para que el presente artículo resulte autocontenido, se analizan brevemente la geometría y planteo del problema del paseo al azar ([2] pp. 88, 362; [7]) y con el fin de lograr un mayor entendimiento por parte del lector sobre la metodología empleada para resolverlo en el caso n-dimensional, se presentan, a manera de ejemplos, los casos unidimensional ($n = 1$) y bidimensional ($n = 2$); siendo el caso general una extensión natural de ellos ([3],[4],[6]).

2 Planteo del problema

Sean n ejes ortogonales de un retículo n-dimensional (ejes espaciales), dividido cada uno de ellos en longitudes unitarias. Considérese el tiempo constituido por lapsos elementales.

Una partícula, que se modelará por un punto, situada inicialmente en el origen, se desplaza al azar una unidad de longitud en cada lapso elemental, en forma paralela a alguno de los ejes espaciales. Transcurridos t lapsos, la posición de la partícula en el espacio queda determinada por n coordenadas enteras $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, siendo x_i el valor correspondiente a la proyección ortogonal sobre el eje-x_i del punto del retículo correspondiente a la posición de la partícula al finalizar el lapso t; de esta forma, el número t de lapsos transcurridos es igual al número de desplazamientos unitarios efectuados por la partícula según la dirección, positiva o negativa, de cada uno de los ejes coordenados. Así, si $m_{i,+}$ denota el número de desplazamientos unitarios efectuados por la partícula al cabo de t lapsos elementales en forma paralela al eje-x_i siguiendo el sentido positivo de dicho eje y si $m_{i,-}$ denota el número de tales desplazamientos efectuados según el sentido negativo del eje-x_i, entonces

$$t = \sum_{i=1}^{n}(m_{i,+} + m_{i,-}) \tag{1}$$

Por otra parte, al estar la partícula inicialmente (cuando $t = 0$) en el origen del sistema de ejes espaciales, transcurridos t lapsos, su coordenada x_i es igual al número de desplazamientos unitarios realizados por la partícula en forma paralela al eje-x_i, durante esos t lapsos, siguiendo la orientación positiva de este eje, menos el número de aquellos desplazamientos paralelos al eje-x_i pero con orientación negativa; así se tiene que

$$x_i = m_{i,+} - m_{i,-} \tag{2}$$

También se suponen conocidas las probabilidades $p_{i,+}$ y $p_{i,-}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ de que la partícula en cada lapso se desplace una longitud unitaria en forma paralela al eje-x_i según su sentido positivo y negativo, respectivamente. Estas probabilidades son las mismas para cada punto $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ del espacio n-dimensional y para cada lapso. Desde luego que debe cumplirse, de acuerdo al planteo del problema que

$$\sum_{j=1}^{n}(p_{j,+} + p_{j,-}) = 1 \tag{3}$$

Se dirá que se trata de un caso de paseo al azar isotrópico cuando dichas probabilidades sean todas iguales; esto es, cuando $p_{1,+} = p_{1,-} = p_{2,+} = p_{2,-} = \cdots = p_{n,+} = p_{n,-} = (2n)^{-1}$; en caso contrario el paseo al azar se denomina anisotrópico.

El problema consiste en determinar la probabilidad de que la partícula se encuentre en el punto con coordenadas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ al cabo de t lapsos elementales, valor que será denotado por $P(x_1, x_2, \cdots, x_n; t)$. De acuerdo con esta notación y puesto que inicialmente (en el lapso $t = 0$) la partícula se encuentra en el origen debe cumplirse que $P(0, 0, \cdots, 0; 0) = 1$. ([1],[5]).

3 Caso unidimensional

En el caso del paseo al azar unidimensional, las ecuaciones (1) y (2) son, respectivamente

$$t = m_{1,+} + m_{1,-} \qquad x_1 = m_{1,+} - m_{1,-}$$

de donde se obtiene

$$m_{1,+} = \frac{t + x_1}{2} \qquad m_{1,-} = \frac{t - x_1}{2}$$

Así, al cabo de t lapsos elementales, conducirán al punto con coordenada x_1, todas aquellas trayectorias [1] que están formadas por $(t + x_1)/2$ movimientos en el sentido positivo del eje-x_1 y $(t - x_1)/2$ movimientos en el sentido negativo de dicho eje y de acuerdo con el cálculo combinatorio, el número de tales trayectorias está dado por

$$\binom{t}{(t + x_1)/2}$$

y en consecuencia [2]

$$P(x_1; t) = \binom{t}{(t + x_1)/2} p_{1,+}^{(t+x_1)/2} \, p_{1,-}^{(t-x_1)/2} \tag{4}$$

Adviértase que la condición inicial $P(0;0) = 1$ está incluida en la fórmula (4).

Este caso de paseo al azar unidimensional es bien conocido y, como se ve, una aplicación directa de la distribución binomial resuelve el problema. Aquí sólo se presenta a fin de familiarizar al lector con la naturaleza del enfoque combinatorio que se usa en el presente trabajo. Las novedades introducidas pueden apreciarse a partir del caso bidimensional.

[1] La trayectoria de una partícula transcurridos t lapsos elementales es la secuencia de movimientos que ha efectuado la misma durante esos t lapsos.

[2] El coeficiente $\binom{\alpha}{\beta} = 0$, a menos que α y β sean números enteros no-negativos y $\alpha \geq \beta$; en cuyo caso

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

4 Caso bidimensional

En este caso el problema consiste en determinar la probabilidad $P(x_1, x_2; t)$ para una partícula que se mueve al azar en el plano coordenado y en la forma descrita anteriormente.

La ecuación (1) para el caso bidimensional es

$$t = (m_{1,+} + m_{1,-}) + (m_{2,+} + m_{2,-})$$

Ahora, se denota por $m_{1,0}$ al número de lapsos, de los t considerados, en los que la partícula no se mueve en forma paralela al eje-x_1 ;[3] entonces, podemos escribir

$$t = m_{1,+} + m_{1,-} + m_{1,0}$$

y puesto que $x_1 = m_{1,+} - m_{1,-}$, se obtiene

$$m_{1,+} = \frac{t - m_{1,0} + x_1}{2} \qquad m_{1,-} = \frac{t - m_{1,0} - x_1}{2} \tag{5}$$

Por otra parte, puesto que $m_{1,0}$ es el número de lapsos en los que la partícula se desplaza en forma paralela al eje-x_2 o, dicho de otra forma; el número de lapsos durante los cuales su proyección sobre el eje-x_1 permanece constante, entonces $m_{1,0} = m_{2,+} + m_{2,-}$ y de (2) se tiene que $x_2 = m_{2,+} - m_{2,-}$; lo cual implica que

$$m_{2,+} = \frac{m_{1,0} + x_2}{2} \qquad m_{2,-} = \frac{m_{1,0} - x_2}{2} \tag{6}$$

Ahora, una vez establecida la notación correspondiente, se da inicio al análisis combinatorio para el caso bidimensional.

- En t lapsos elementales $m_{1,0}$ desplazamientos unitarios en forma paralela al eje-x_2 pueden ocurrir de

$$\binom{t}{m_{1,0}} \text{ formas distintas.}$$

- De los $m_{1,0}$ lapsos en los que la partícula se desplaza en forma paralela al eje-x_2, $m_{2,+}$ corresponden a desplazamientos unitarios en la dirección del eje-x_2, lo cual puede ocurrir de

$$\binom{m_{1,0}}{m_{2,+}} = \binom{m_{1,0}}{(m_{1,0} + x_2)/2} \text{ formas distintas (aquí se usa (6)).}$$

[3]Así que $m_{1,0}$ es el número de movimientos efectuados por la partícula en forma paralela al eje-x_2 durante los t lapsos considerados.

- En $t - m_{1,0}$ lapsos la partícula efectúa $m_{1,+}$ desplazamientos unitarios en forma paralela al eje-x_1, según el sentido positivo del eje-x_1; esto puede ocurrir de

$$\binom{t - m_{1,0}}{m_{1,+}} = \binom{t - m_{1,0}}{(t - m_{1,0} + x_1)/2} \text{ formas distintas (aplicando (5)).}$$

- Del análisis anterior, se sigue que

$$\binom{t}{m_{1,0}}\binom{t - m_{1,0}}{(t - m_{1,0} + x_1)/2}\binom{m_{1,0}}{(m_{1,0} + x_2)/2}$$

es el número total de trayectorias constituidas por $m_{1,0}$ desplazamientos unitarios paralelos al eje-x_2 y $t - m_{1,0}$ desplazamientos unitarios paralelos al eje-x_1 que llegan al punto de coordenadas (x_1, x_2) en t lapsos elementales.

De acuerdo con el enunciado del problema, cada una de estas trayectorias ocurre con probabilidad

$$p_{1,+}^{m_{1,+}}\, p_{1,-}^{m_{1,-}}\, p_{2,+}^{m_{2,+}}\, p_{2,-}^{m_{2,-}} = p_{1,+}^{(t-m_{1,0}+x_1)/2}\, p_{1,-}^{(t-m_{1,0}-x_1)/2}\, p_{2,+}^{(m_{1,0}+x_2)/2}\, p_{2,-}^{(m_{1,0}-x_2)/2}$$

Debe observarse que en t lapsos elementales $m_{1,0}$ puede tomar valores desde $m_{1,0} = 0$ hasta $m_{1,0} = t$ y en consecuencia, [4]

$$\begin{aligned} &P(x_1, x_2; t) \\ &= \sum_{m_{1,0}=0}^{t} \binom{t}{m_{1,0}} \\ &\quad \left\{\binom{t - m_{1,0}}{(t - m_{1,0} + x_1)/2} p_{1,+}^{(t-m_{1,0}+x_1)/2}\, p_{1,-}^{(t-m_{1,0}-x_1)/2}\right\} \\ &\quad \left\{\binom{m_{1,0}}{(m_{1,0} + x_2)/2} p_{2,+}^{(m_{1,0}+x_2)/2}\, p_{2,-}^{(m_{1,0}-x_2)/2}\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

Las fórmulas a que conduce el enfoque descripto difieren en forma de las obtenidas previamente para el mismo problema con un enfoque distinto ([4]). Así, por ejemplo, utilizando este último para el caso bidimensional se obtiene:

[4] $m_{1,0} = 0$, significa que la partícula se mueve, durante los t lapsos considerados, siempre en forma paralela al eje-x_1.

$m_{1,0} = t$, significa que la partícula se mueve, durante los t lapsos considerados, siempre en forma paralela al eje-x_2.

$$P(x_1, x_2;\, t) = \sum_{j=0}^{\frac{t-(x_1+x_2)}{2}} \left(\frac{t!}{j!\,(j+x_1)!\,\left(\frac{t-(x_1+x_2)}{2} - j\right)!\,\left(\frac{t-(x_1+x_2)}{2} - j + x_2\right)!} \right) \cdot p_{1,+}^{j+x_1} \cdot p_{1,-}^{j} \cdot p_{2,+}^{\frac{t-(x_1+x_2)}{2}-j+x_2} \cdot p_{2,-}^{\frac{t-(x_1+x_2)}{2}-j} \tag{8}$$

De acuerdo al criterio de los autores —quienes reconocen que en esta cuestión interviene un fuerte componente subjetivo— la fórmula (7) —aunque conduce a los mismos resultados numéricos que la (8)— aporta una mayor claridad conceptual que esta última y resulta, por consiguiente, más fácilmente inteligible. En efecto, el tratamiento presentado en este artículo puede considerarse una generalización bastante directa del clásico problema de paseo al azar en un retículo unidimensional. Así, el miembro de la derecha de la fórmula obtenida para el caso del paseo al azar en un retículo bidimensional puede considerarse el producto de los dos miembros de la derecha de sendas fórmulas para paseos al azar en retículos unidimensionales, teniendo debidamente en cuenta la restricción establecida por el hecho de que el número total de movimientos elementales de la partícula considerada es igual a t.

5 Caso n-dimensional

La generalización al caso n-dimensional ahora resulta obvia. Se denota por $m_{k,0}$ el número de lapsos en los que las coordenadas $x_1, x_2, \cdots, x_k$ permanecen constantes, para $k = 1, \cdots, n$. Adviértase que $m_{1,0} \geq m_{2,0} \geq \cdots m_{n-1,0} \geq m_{n,0} = 0$. Además $m_{k,0} - m_{k+1,0}$ corresponde al número de lapsos en los que la partícula se desplaza en forma paralela al eje-x_{k+1}, de los cuales en

$$m_{k+1,+} = \frac{m_{k,0} - m_{k+1,0} + x_{k+1}}{2} \quad \text{lapsos,}$$

la partícula sigue el sentido positivo de dicho eje (para $k = 1, 2, \cdots, n-1$).

Como en los casos estudiados anteriormente, una vez fijados los parámetros $m_{1,0}, m_{2,0}, \cdots, m_{n-1,0}$, el número total de aquellas trayectorias que en t lapsos elementales llegan al punto con coordenadas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y que corresponden a tales parámetros es:

$$\binom{t}{m_{1,0}} \binom{m_{1,0}}{m_{2,0}} \binom{m_{2,0}}{m_{3,0}} \cdots \binom{m_{n-2,0}}{m_{n-1,0}}$$

y el número de formas distintas en que la partícula puede desplazarse $m_{k,+}$ unidades siguiendo el sentido positivo del eje-x_k ($k = 2, \cdots, n-1$) es:

$$\binom{m_{k-1,0} - m_{k,0}}{(m_{k-1,0} - m_k + x_k)/2}$$

Para los ejes x_1 y x_2, estos valores son, respectivamente

$$\binom{t - m_{1,0}}{(t - m_{1,0} + x_1)/2} \quad \text{y}$$

$$\binom{m_{n-1,0}}{(m_{n-1,0} + x_n)/2}$$

Luego, con esta notación y siendo el análisis combinatorio similar al del caso tridimensional, se llega a la fórmula general[5]:

$$\begin{aligned}
&P(x_1, \cdots, x_n; t) \\
&= \sum_{m_{1,0}=0}^{t} \sum_{m_{2,0}=0}^{m_{1,0}} \sum_{m_{3,0}=0}^{m_{2,0}} \cdots \sum_{m_{n-1,0}=0}^{m_{n-2,0}} \binom{t}{m_{1,0}} \binom{m_{1,0}}{m_{2,0}} \binom{m_{2,0}}{m_{3,0}} \cdots \binom{m_{n-2,0}}{m_{n-1,0}} \\
&\quad \left\{ \binom{t - m_{1,0}}{(t - m_{1,0} + x_1)/2} p_{1,+}^{(t-m_{1,0}+x_1)/2} \, p_{1,-}^{(t-m_{1,0}-x_1)/2} \right\} \\
&\quad \left\{ \binom{m_{1,0} - m_{2,0}}{(m_{1,0} - m_{2,0} + x_2)/2} p_{2,+}^{(m_{1,0}-m_{2,0}+x_2)/2} \, p_{2,-}^{(m_{1,0}-m_{2,0}-x_2)/2} \right\} \\
&\quad \left\{ \binom{m_{2,0} - m_{3,0}}{(m_{2,0} - m_{3,0} + x_3)/2} p_{3,+}^{(m_{2,0}-m_{3,0}+x_3)/2} \, p_{3,-}^{(m_{2,0}-m_{3,0}-x_3)/2} \right\} \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left\{ \binom{m_{n-1,0}}{(m_{n-1,0} + x_n)/2} p_{n,+}^{(m_{n-1,0}+x_n)/2} \, p_{n,-}^{(m_{n-1,0}-x_n)/2} \right\} \qquad (9)
\end{aligned}$$

Finalmente, si se establece que $m_{0,0} = t$, y puesto que $m_{n,0} = 0$ ya que en cada lapso la partícula se mueve una longitud unitaria, entonces (9) puede escribirse en forma más resumida como

$$\begin{aligned}
&P(x_1, \cdots, x_n; t) \\
&= \sum_{m_{1,0}=0}^{t} \sum_{m_{2,0}=0}^{m_{1,0}} \sum_{m_{3,0}=0}^{m_{2,0}} \cdots \sum_{m_{n-1,0}=0}^{m_{n-2,0}} \left\{ \prod_{j=0}^{n-2} \binom{m_{j,0}}{m_{j+1,0}} \right\} \qquad (10) \\
&\left\{ \prod_{j=0}^{n-1} \binom{m_{j,0} - m_{j+1,0}}{(m_{j,0} - m_{j+1,0} + x_{j+1})/2} p_{j+1,+}^{(m_{j,0}-m_{j+1,0}+x_{j+1})/2} \, p_{j+1,-}^{(m_{j,0}-m_{j+1,0}-x_{j+1})/2} \right\}
\end{aligned}$$

[5]Debe recordarse que en todas las fórmulas aquí expuestas, aquellos coeficientes $\binom{\alpha}{\beta}$ son cero, a menos que $\alpha \geq \beta \geq 0$ y α y β sean números enteros. Además, puesto que $\binom{0}{0} = 1$, siempre se cumple la condición inicial $P(0, , \cdots, 0; 0) = 1$.

6 Algunos ejemplos

Para el caso del paseo al azar isotrópico en un espacio tridimensional la fórmula (9) se reduce a

$$P(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{1}{6^t} \sum_{m_{1,0}=0}^{t} \sum_{m_{2,0}=0}^{m_{1,0}} \binom{t}{m_{1,0}} \cdot \binom{m_{1,0}}{m_{2,0}} \cdot \binom{t - m_{1,0}}{(t - m_{1,0} + x_1)/2} \cdot \binom{m_{1,0} - m_{2,0}}{(m_{1,0} - m_{2,0} + x_2)/2} \cdot \binom{m_{2,0}}{(m_{2,0} + x_3)/2} \tag{11}$$

Así, por ejemplo, si una partícula situada inicialmente en el origen de un espacio tridimensional se desplaza con paseo al azar isotrópico, la probabilidad de que al cabo de tres lapsos elementales se localice en el punto con coordenadas $(0, -2, -1)$ es 0.013888888889, e igual valor corresponde a las probabilidades de que al cabo de tres lapsos elementales la partícula se encuentre en cada uno de los puntos con coordenadas $(0, \pm 2, \pm 1)$. También resulta, haciendo uso de (11), que $P(3, 3, 3; 6) = 0$ lo cual es obvio, pues no existe trayectoria alguna que una al origen $(0, 0, 0)$ con el punto $(3, 3, 3)$ en seis lapsos elementales.

La fórmula (9) se aplica directamente al caso de partículas que se desplazan con paseo al azar anisotrópico. Así. si se considera que una partícula se desplaza con paseo al azar en el espacio tridimensional de forma tal que

$$p_{1,+} = \frac{5}{24}, \; p_{1,-} = \frac{1}{12}, \; p_{2,+} = \frac{7}{24}, \; p_{2,-} = \frac{1}{6}, \; p_{3,+} = p_{3,-} = \frac{1}{8},$$

se obtiene, por ejemplo, que $P(0, -2, -1; 3) = 0.01042 = P(0, -2, 1; 3)$, mientras que $P(0, 2, 1; 3) = 0.03190 = P(0, 2, -1; 3)$. Luego, aquí se observa que, a diferencia con el caso isotrópico, las simetrías de los puntos en cuestión con respecto al origen no implican que las probabilidades de que la partícula se encuentre en cada uno de esos puntos al cabo de un determinado número de lapsos deban ser iguales.[6]

7 Perspectivas

El enfoque aquí presentado resuelve conjuntamente el problema del paseo al azar tanto para el caso isotrópico ($p_{i,+} = p_{i,-} = (2n)^{-1}$) como para el anisotrópico y puede dar respuesta a infinidad de preguntas relacionadas con una o un número finito de partículas que se desplazan con paseo al azar en

[6] Los cálculos presentados en este ejemplo se hicieron implementando la fórmula (9) mediante un programa en PROLOG. Los tiempos de ejecución son del orden de décimas de segundo.

un mismo espacio n-dimensional. Por ejemplo, si dos partículas A y B se mueven en el plano con paseo al azar y si transcurridos t_1 lapsos se observa a la partícula A en el punto con coordenadas (a, b), mientras que la partícula B al cabo de t_2 lapsos se encuentra en el punto (c, d), ¿cuál es la probabilidad de que al transcurrir t_3 lapsos ($t_3 > t_1$ y $t_3 > t_2$) A y B se encuentren en el punto (e, f)? Puede advertirse que la probabilidad de que la partícula A en $t_3 - t_1$ lapsos se traslade de (a, b) a (e, f) es la misma probabilidad de que ésta se traslade desde el origen al punto $(e - a, f - b)$ en $t_3 - t_1$ lapsos; esto es $P(e - a, f - b: t_3 - t_1)$. En forma similar la probabilidad de que la partícula B se traslade de (c, d) a (e, f) en $t_3 - t_1$ lapsos es $P(e - c, f - d: t_3 - t_1)$. Finalmente, si las trayectorias de cada una de esas partículas son estocásticamente independientes, entonces la probabilidad de que ellas se encuentren al cabo de t_3 lapsos es $P(e - a, f - b; t_3 - t_1)\, P(e - c, f - d: t_3 - t_1)$, la cual puede computarse haciendo uso de (7).

Debe también aclararse que el enfoque presentado en este trabajo no se ajusta al problema del paseo al azar en recintos n-dimensionales finitos con geometría arbitraria; tema que se tratará en trabajos posteriores. Aquí se ha mejorado sustancialmente el enfoque combinatorio para el problema del paseo al azar cuando éste ocurre en el espacio n-dimensional sin fronteras.

Referencias

[1] Chandrasekhar, S. 1943. *Stochastic Problems in Physics and Astronomy.* Rev. Mod. Phys., 15 (1), pp. 2-20.

[2] Feller, W. 1975. *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones.* Vol. 1. Editorial Limusa, México.

[3] Láscaris, T., V. Medina y O. Skliar. 1982. *Tres Enfoques para la Solución del Problema del Paseo al Azar (caso n-dimensional).* Cuarto Congreso de la Asociación Costarricense de Física, San José, Costa Rica.

[4] Láscaris, T., V. Medina y O. Skliar. 1987. *Tres Enfoques para la Solución del Problema del Paseo al Azar (caso n-dimensional).* Matemática, Enseñanza Universitaria, Nº 40, Bogotá, Colombia.

[5] Rota, G.C., ed. 1978. *Studies in Combinatorics.* Studies in Mathematics. Vol. 17. MAA.

[6] Skliar, O. 1978. *Solución del Problema del Paseo al Azar para el Caso n-dimensional.* Segundo Congreso de la Asociación Costarricense de Física, San José, Costa Rica.

[7] Spitzer, F. 1976. *Principles of Random Walk.* Springer-Verlag, New York.