Universidad Nacional

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Diseño de propuesta didáctica apoyada con vídeos tutoriales para la utilización del software R para la enseñanza de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales del curso MAC411 Álgebra Lineal de la carrera de Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional

Trabajo Final de Graduación sometido a consideración del Tribunal Evaluador como requisito parcial para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Estudiante*:* Francisco José Villalobos Madrigal

Comité asesor: M. Sc. Andrey Zamora Araya (Tutor)
D. Jorge Arroyo Hernández (Asesor)
M. Sc. Eduardo Aguilar Fernández (Asesor)

Campus Omar Dengo
Heredia, Costa Rica

22 de noviembre de 2022

Agradecimientos

A mis padres Manuel Villalobos Alvarado y Marietha Madrigal Campos, que siempre me apoyaron para seguir estudiando.

A mi pareja Edith Campos Sandí, que me acompaña y me apoyó en los tiempos más complicados de mi proceso de estudio universitario.

A los docentes Andrey Zamora, Jorge Arroyo y Eduardo Aguilar que dispusieron de su tiempo y estuvieron dispuestos a dar observaciones del trabajo realizado.

Al Comité de Trabajo Finales de Graduación.

Este trabajo final de graduación **ha sido aceptado y aprobado por** Tribunal Evaluador designado para tal fin por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional, como requisito parcial para optar al grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática.

M. Sc. Andrey Zamora Araya

Tutor

Dr. Jorge Arroyo Hernández

Asesor

M. Sc. Eduardo Aguilar Fernández

Asesor

Bach. Francisco José Villalobos Madrigal

Estudiante

Fran. Villa Madri.

Tabla de contenidos

Índice de Figuras

Índice de tablas

Introducción

El presente trabajo se enmarca en la modalidad de Proyecto de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática.

El Proyecto de Graduación consideró la planificación y elaboración de una propuesta didáctica, utilizando las pautas del Análisis de Contenido, el Análisis Cognitivo y el Análisis de Instrucción, para los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales del curso MAC411 Álgebra Lineal. Como parte de la Propuesta Didáctica se elaboró un material que contempla la teoría, ejercicios y la utilización de cinco vídeos tutoriales para la utilización del *software RStudio* en la solución de ejercicios y problemas de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Dichos vídeos, fueron diseñados con el propósito de facilitar la ejemplificación de su utilización en los temas abordados.

Las problemáticas surgidas por la pandemia del COVID-19, nos da evidencia que las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), juegan un papel importante en la educación, debido a su utilidad y su utilización masiva de medios digitales y tecnológicos para la enseñanza.

El curso MAC411 Álgebra Lineal forma parte del actual plan de estudio de Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional (UNA) que aborda el desarrollo del enfoque por competencias y establece el desarrollo competencias generales, matemáticas, didáctico-matemáticas y pedagógicas en las distintas áreas disciplinares de la carrera (Escuela de Matemática UNA, 2017).

Por otro lado, el Análisis de Contenido, el Análisis Cognitivo y el Análisis de Instrucción forman parte del Análisis Didáctico y consisten en una metodología para el diseño y validación de unidades o propuestas didácticas para la enseñanza de la matemática. Para la construcción de propuestas didácticas por medio del Análisis Didáctico se buscaron referencias sobre los temas seleccionados para la clasificación de términos, definiciones y teoría y luego se estableció relaciones entre los temas.

Además, se consideraron los posibles errores o dificultades en el aprendizaje de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, según los estudios de referencia.

De esta manera el análisis justifica la selección de ejercicios o actividades para la propuesta didáctica.

La propuesta didáctica abordará la utilización de vídeos tutoriales para la puesta en práctica del software *R* (R Core Team, 2017), como recurso para la solución de ejercicios y problemas. El software *R* es un entorno de programación estadística de licencia libre y multiplataforma, que posee un entorno de desarrollo llamado *RStudio* (RStudio Team, 2020) y facilita la utilización de *R*. Se seleccionó este software por tener esas características, además de poseer una gran cantidad de paquetes y funciones que pueden aplicarse a la resolución de ejercicios y problemas en diversos temas de matemática aplicada y estadística.

Se diseñaron cinco vídeos tutoriales y cada uno no supera diez minutos de duración. En los vídeos se explica la utilización de *R*, *RStudio* y la funcionalidad de los paquetes y comandos de *R* para la solución de ejercicios prácticos y aplicados de los temas de propuestos.

Para este Proyecto se estableció como objetivo la revisión de cada vídeo y la Propuesta Didáctica final, por medio de juicio de expertos. Los expertos considerados fueron profesores que impartieran cualquier curso de álgebra lineal al nivel universitario en Universidades Públicas de Costa Rica.

El trabajo escrito del Proyecto de Graduación, se desarrolla en los siguientes capítulos:

- Capítulo I: Se detalla el planteamiento del problema del Proyecto de Graduación, el cual consiste en el diseño de como diseñar Propuesta Didáctica y se proponen los objetivos de este estudio.
- Capítulo II: Se mencionan los antecedentes de estudio. Se detalla el marco teórico y contempla teoría relacionada al enfoque curricular del enfoque por competencias, la implementación de las TIC en educación y la metodología de análisis de contenido.
- Capítulo III: Se plantea la metodología de estudio y los pasos a seguir para el diseño de la Propuesta Didáctica, el diseño de vídeos tutoriales y su evaluación.
- Capítulo IV: Se exponen los resultados y análisis, los cuales contemplan cuatro subapartados, que corresponden:
    1. Análisis de contenido, el cual se indago literatura de Álgebra Lineal y de los componentes curriculares del plan de estudio de la carrera Enseñanza de la

Matemáticas de la Universidad Nacional y el Plan de estudio de Matemáticas de educación secundaria del Ministerio de educación (MEP).

2. Se detalla el Análisis Fenomenológico en el cual se describe el análisis cognitivo.
3. Se describe en análisis de instrucción que corresponde a la descripción de actividades planteadas en la propuesta didáctica
4. Diseño de vídeos y evaluación.

- Capítulo V: Se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de este trabajo

Capítulo I: Planteamiento del problema

En este capítulo, se plantaron los argumentos que justifican el desarrollo y el propósito del Trabajo Final de Graduación, el cual, consistió en la planificación y elaboración de una propuesta didáctica, apegada al programa del curso MAC411 Álgebra lineal del plan de estudio de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM-2017) de la Universidad Nacional (UNA). Como parte de la propuesta, se diseñaron cinco vídeos tutoriales, para enfatizar la utilización del software *R* como recurso didáctico para la enseñanza, por medio de la resolución de problemas y ejercicios prácticos de los temas de matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes en algunas actividades de la propuesta didáctica.

1.1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Para el Proyecto de Graduación se planteó la siguiente pregunta: ¿Cómo planificar la enseñanza de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales y el diseño de vídeos tutoriales para la manipulación del software *R* basados en la resolución de problemas para el curso MAC411 Álgebra lineal del programa BLEM-2017 de la UNA?

1.2. JUSTIFICACIÓN

En el año 2012, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), implementó un plan de estudio para la educación matemática en los niveles de educación primaria, secundaria y educación diversificada, en el cual se fomenta un currículo basado en el desarrollo por habilidades. El MEP adopta las definiciones de competencias y competencias matemáticas del Programa Internacional de Evaluación de los Aprendizajes (PISA) para el desarrollo de habilidades, las cuales se establecen como (MEP, 2012, p. 23):

> Competencia
>
> (…) la capacidad de los alumnos para aplicar conocimientos y habilidades, y para analizar, razonar y comunicarse con eficiencia cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones.
>
> Se mide de un modo continuo, no como algo que una persona tiene o no tiene. (…) el carácter variable es un rasgo fundamental. Una persona instruida posee varias capacidades, y no existe ningún límite claro entre alguien que es totalmente competente y alguien que no lo es (OECD, 2005, p. 23).

> Competencia matemática
> (…) una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel de las matemáticas en el mundo y hacer prejuicios bien fundamentados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (OECD, 2010a, p. 4).

El desarrollo de los temas en el Plan de Estudio se da por medio de habilidades que se sugiere desarrollar por medio de actividades que contemplen: la contextualización de problemas matemáticos, la modelización matemática, el abordaje de problemas con diferentes niveles de dificultad y el uso de tecnologías (MEP, 2012).
En el 2017, la Escuela de Matemática de la UNA, implementó un plan de estudio en la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM-2017) que establece el desarrollo de competencias en las áreas de pedagogía, matemática y didáctica de la matemática (Escuela de Matemática UNA, 2017).

Con respecto al curso MAC411 Álgebra lineal este forma parte del III nivel del plan de estudios BLEM-2017 (Escuela de Matemática UNA, 2017) y fue impartido por primera vez en el II ciclo de 2019 (julio-noviembre de 2019).

Dicho curso se imparte en modalidad semestral y se puede considera un curso reciente, por su enfoque de impartirlo, por ello, es de suma importancia la creación de recursos que puedan servir como apoyo en la planificación de lecciones por parte de los docentes que imparten el curso.

Se seleccionó el Curso MAC411 Álgebra Lineal el desarrollo de la Propuesta Didáctica, debido a la importancia que tiene la materia en la aplicación de ejercicios en diversas áreas y en la dificultad de cálculos en procedimientos que requieren utilizar matrices y sistemas de ecuaciones lineales de gran tamaño.

Por su parte, Lineal Carranza, Andino y Baracco (2009) mencionan en cuanto la materia de Álgebra que

> se debe capacitar a los alumnos para que sean capaces de relacionar los conocimientos matemáticos y las habilidades adquiridas con las situaciones presentadas para poder saber usar las matemáticas en fines prácticos (p.242)

En cuanto a la formación de inicial de docentes en matemáticas, la familiarización de problemas de diversas áreas es de suma importancia, para su quehacer futuro.

Adicionalmente, investigaciones evidencia la necesidad de desarrollo de materiales provechosos para impartir la materia, Gonzáles (2014) menciona que “las diversas dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra y la urgente necesidad de establecer cambios revolucionarios en las metodologías de enseñanza usadas por los docentes” (p. 960).

El desarrollo de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales en Álgebra Lineal es el punto de partida del curso de Álgebra Lineal, López (2010) establece la necesidad de que la mayor parte de los problemas en la vida cotidiana pueden plantearse por medio de ecuaciones lineales y ser resueltos con sistemas de ecuaciones lineales.

Para el desarrollo de la Propuesta Didáctica también se tiene que considerar la utilización de software para evitar procedimientos largos, en el caso de las operaciones con matrices de gran tamaño, Valencia (2021) recomienda los siguientes puntos para el desarrollo de propuesta en Álgebra Lineal:

> Fomentar la enseñanza de la Matemática a través de herramientas tecnológicas y de software que sean con licencia de código abierto, puesto que, al no ser así, no estaría al alcance de todos los estudiantes (p. 132).
>
> Considerando que hoy en día el avance de las tecnologías de la comunicación y la exigencia de una mayor productividad, demandan capacitar a los docentes de Matemática sobre el manejo de herramientas tecnológicas de licencia libre como apoyo en la enseñanza de la asignatura (p. 133).

Además, entre los objetivos específicos establecidos para este plan de formación destaca la implementación de recursos tecnológicos para la mejora de los procesos educativos (Escuela de Matemática UNA, 2017), por lo cual, se necesitan incorporar metodologías de enseñanza que hagan uso de tecnologías de la información y comunicación (TIC) como software, calculadoras, Internet, entre otros. De esta manera, al propiciar el uso de TIC en las lecciones, se estaría acudiendo al desarrollo de un eje curricular establecido en el plan de BLEM-2017, además, desarrollar competencias que ocupan los profesores en formación inicial.

En cuanto la utilización de software en Álgebra Lineal, Morales en el 2008, citado por Rosales(2010) afirma que:

> El uso de un software matemático como herramienta computacional en cursos de Álgebra Lineal favorece notablemente los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que permite que el alumno manipule los objetos matemáticos, formule conjeturas sobre las propiedades que los caracterizan y las valide o rechace a medida que avanza en su exploración, de este modo es el estudiante quien descubre, apropiándose así del conocimiento, lo que lo lleva a un aprendizaje significativo (p. 60).

Por ello, se acude a la utilización de algún software que permita la manipulación de matrices, vectores y la verificación de propiedades y teoremas. Aunque el software *R* se especializa en estadística, se puede utilizar para la enseñanza del Álgebra Lineal, pues posee las siguientes características:

- Licencia libre y multiplataforma (R Core Team, 2017).
- Funciona como calculadora, evitando procedimientos tediosos (Galindo, 2017).
- Trabajar con datos y muchas variables (Galindo, 2017).
- Fomenta la reflexión y el análisis crítico (Galindo, 2017), por medio de la interpretación de resultados.
- Posee paquetes especializados para la solución de ejercicios y problemas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
- El software R, posee ayuda de cómo utilizar los paquetes con ejemplos.

Además, el software *R* posee una gran variedad de guías, libros y vídeos tutoriales para su utilización, como ejemplo se encuentra la página de cursos en línea Data Camp (Data Camp, 2022), la cual posee cursos relacionados con la manipulación y visualización de datos por medio de la utilización de funciones y paquetes.

Por otro lado, el software *R* posee funciones propias de matrices, por ejemplo, la solución de sistemas de ecuaciones lineales, cálculo de inversas y determinantes, y más utilidades prácticas para la enseñanza del Álgebra Lineal.

Entre los paquetes de *R,* para la enseñanza de Álgebra Lineal se encuentran:

- *matlib* es un paquete especializado para la enseñanza de Álgebra Lineal y Estadística Multivariada. Posee funciones para calcular la adjunta de una matriz, ángulo entre dos vectores, operaciones elementales de filas, método de eliminación gaussiana, cofactor, determinantes, inversa de una matriz, rango de matrices, potencias de matrices cuadradas, solución de sistemas de ecuaciones lineales, graficas de rectas y planos. Además, este paquete permite visualizar la solución detallada en funciones como eliminación gaussiana, determinantes e inversa de una matriz y también se puede generar el código de los procedimientos para utilizarlo en digitación LaTeX. Este paquete solamente puede utilizar matrices y vectores con valores conocidas (Friendly, Fox, Chalmers, Monette y Sánchez, 2018).
- *MASS* es un paquete para temas estadísticos, pero posee una función para visualizar los resultados en forma de fracción, la cual es importante para el tema de operaciones con matrices (Ripley et al., 2018).
- *R.matlab* el cual le permite a *R* trabajar con archivos de *MatLaB (*Bengtsson, Jacobson y Riedy, 2018).
- *Rsympy* es un interfaz de *sympy* (librería de Python) para utilizar desde *R*. *sympy* es un leguaje algebraico computacional que permite trabajar con variables, por lo cual se pueden ver temas como solución de ecuaciones lineales, determinantes, resolver límites, derivadas de funciones, entre otros (Grothendieck y Gil, 2015).

Otra utilidad del software *R,* es su utilización en investigaciones basadas en análisis estadísticos.

A través de esta herramienta, el estudiante puede poner en práctica comandos básicos que son necesarios para aprender a utilizar otras funciones de *R*. De esta manera, se estaría familiarizando a los estudiantes con el uso introductorio de herramientas que pueden ser utilizadas en futuras investigaciones. Además, de la docencia, los ejes curriculares del nivel de bachillerato que contempla la investigación en el programa BLEM-2017 (Escuela de Matemática UNA, 2017).

La utilización de vídeos tutoriales resulta apropiada para los procesos de enseñanza aprendizaje, pues permite la manipulación de los tiempos del video y la posibilidad de repetir el video cuantas veces se desea (Valarde, Dehesa, López y Márquez, 2017). Igualmente, explicar procedimientos detallados de determinada temática o área en particular y que por su naturaleza tienen un alto alcance en Internet. Sin embargo, esto también conlleva una problemática, pues, aunque en Internet se encuentran disponibles una gran cantidad de vídeos tutoriales, muchos de ellos son realizados por personas inexpertas y no necesariamente se construyen con un propósito pedagógico (Rodríguez, Moreno y Trigos, 2016).

Por los cambios metodológicos y curriculares de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, que consiste en la implementación de desarrollo de competencias y los avances tecnológicos, que se encuentran en constante cambio, se consideró importante para la elaboración del Proyecto de Graduación, la creación de diversas actividades para la enseñanza de la matemática, mediante el uso de tecnologías. Esto por las habilidades que se desarrollan que contemplan el desarrollo de competencias, y que, particularmente deriva en un interés por el diseño de una propuesta didáctica que implemente la utilización de R en la enseñanza del Álgebra Lineal, en los procesos de formación inicial de profesores de matemática.

1.3. OBJETIVO GENERAL

Elaborar una propuesta didáctica que posea actividades para el uso de vídeos tutoriales que traten el uso del software *R* como un apoyo para la enseñanza de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales en el curso MAC411 Álgebra lineal de la carrera Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional.

1.4. OBJETIVOS ESPECIFICOS

1) Revisar libros de texto o cualquier otro material de Álgebra Lineal para la elaboración del Análisis de Contenido en los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales según las especificaciones establecidas en el BLEM-2017 para el curso MAC411 Álgebra Lineal.
2) Establecer objetivos para la enseñanza de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales del curso MAC411 Álgebra Lineal, para la elaboración del Análisis de Contenido, enfatizando el desarrollo de competencias establecidas en el BLEM-2017.

3) Describir errores o limitaciones en el aprendizaje de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, por medio de la consulta de material o investigaciones relacionados a los temas de la propuesta para el Análisis Fenomenológico.
4) Seleccionar problemas y ejercicios de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales para la elaboración del Análisis de Instrucción e incluir las actividades en la propuesta didáctica.
5) Seleccionar ejercicios para la enseñanza de los temas de matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinante en el curso MAC411 Álgebra Lineal que posibiliten el uso del entorno estadístico *R* para su resolución.
6) Crear vídeos tutoriales, que muestren el uso del entorno estadístico *R* para la resolución de los ejercicios seleccionados sobre los temas de matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes en el curso MAC411 Álgebra Lineal.
7) Validar la funcionalidad y calidad técnica de los vídeos tutoriales diseñados a partir del criterio de expertos, para la elaboración de una versión mejorada de los vídeos tutoriales en cuanto al contenido temático, visual, auditivo y estético.

Capítulo II: Marco teórico

2.1. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

En este apartado, se destacan algunos trabajos realizados en las temáticas de la enseñanza del Álgebra Lineal, utilizando las TIC's, la utilización de *R* y *RStudio* en el ámbito de formación inicial de profesores de matemáticas, su utilización en carreras no relacionadas con la enseñanza y la realización de vídeos adaptados a la enseñanza, los cuales son de interés para la propuesta del proyecto.

2.1.1 Propuestas dirigidas a profesores de matemáticas en formación inicial

Por su parte, Paredes, Iglesias y Ortiz (2009), realizaron una investigación con profesores en formación inicial de matemática, enfatizando la utilización de software *Derive*, por medio de diez sesiones de trabajo, en las cuales se desarrollaron la introducción de preliminares, el uso del software *Derive,* la resolución de problemas y el diseño de actividades didácticas; todas estas para los temas de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, vectores en planos y el espacio.

En el estudio de Paredes et al. (2009) comentan que los participantes implementan la aplicación de modelación, utilización de DERIVE, permitiendo la exploración de los problemas plantados por medio de gráficas o cálculos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Además, Paredes et al. (2009) acuden a que los profesores en formación inicial de matemáticas que participaron del taller opinan que los problemas y ejercicios de Álgebra Lineal deben ser "creativos que guarden relación con el entorno de los alumnos, para así incrementar su motivación a la hora de resolverlos" (p. 99).

Paredes et al. (2009), reconocieron que en las secciones de trabajo se desarrollaron cuatro formas para solucionar los problemas propuestos que comprenden el uso del software *Derive* y la modelización de problemas planteados, la utilización del software para graficar, la utilización del software sin graficar y la solución sin utilizar software.

Vergara, Avilés y Romero (2016) abarcaron la integración del software *MatLab* como complemento de clases en el curso de Álgebra Lineal. *MatLab* (Cleve Moler, 2018) es un software de licencia comercial y utilizado en matemática. Los autores consideraron la aplicación de la propuesta a un grupo de estudiantes de licenciatura y profesores de matemáticas que impartieron el curso Álgebra Lineal durante los últimos cinco años en el momento del estudio con el objetivo de mejorarla y así poder aplicarla a los grupos de estudiantes del I y II periodo del 2013 y 2014, del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Atlántico de Barranquilla Colombia.

Entre los resultados del estudio de Vergara, Avilés y Romero (2016), se encuentra que un 100% de los participantes indica que realiza alguna estrategia didáctica diferente a la magistral para impartir las lecciones de Álgebra Lineal y que 60% se encuentra dispuesto a utilizar algún software. En cuanto a la resolución de ejercicios un 66% de los participantes acude que no maneja adecuadamente la materia y se les dificulta la solución.

2.1.2. Propuestas dirigidas a la formación de profesionales que requieren del Álgebra Lineal

Rosales (2012) realizó una propuesta para implementar el software *Scilab versión 5.3.0*, en los temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales, en una población de estudiantes de ciencias e ingeniería. *Scilab* (INRIA, 2017) es un software de licencia libre utilizado para el cálculo numérico. Rosales (2012) utilizo una metodología cuantitativa y cualitativa para elaborar el estudio. En cuanto la metodología cuantitativa el autor analizo los promedios obtenidos en un grupo de estudiantes que realizaron dos pruebas, una consistía en dar la solución de ejercicios de forma tradicional; utilizando lápiz y papel; y la segunda desarrollada a través de la utilización del software, esto para comprobar estadísticamente si existen diferencias en los promedios de las pruebas.

Asimismo, Rosales (2012) acudió a la evaluación de las propuestas diseñadas por parte de profesores para destacar los puntos positivos y mejorar las actividades dentro de la propuesta.

Entre los resultados más relevantes para el estudio, obtenidos por Rosales (2012), se encuentran que la utilización del software *Scilab 5.3.0*, produjo mejoras en los promedios de las pruebas, con respecto a los promedios que utilizaban la forma tradicional. Además, produjo una mayor motivación en los participantes. El autor recomienda el desarrollo de la propuesta por medio de dos fases: la primera de forma tradicional y la segunda de la utilización de la computadora.

Por su parte, Vílchez (2015a) elaboró el paquete *VilGebra* para el software *Mathematica,* que es utilizado en diversas ramas de las matemáticas y su licencia es comercial (Wolfram, 2018).

Vílchez (2015a) proporciona una propuesta para la solución de varios ejercicios de Álgebra Lineal, enfatizando la utilización en el campo de ingenierías y su trabajo sirve de ayuda para la utilización de la herramienta. Además, Vílchez (2015b) realizó un estudio sobre la aplicación del paquete *VilGebra* en un grupo de estudiantes conformado por estudiantes de la carrera de Ingeniería en Sistema de Información de la Universidad Nacional, Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica de la Universidad de Costa Rica. El estudio arrojó resultados positivos con respecto a la percepción de los estudiantes, al utilizar el paquete para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal, de los cuales se destaca un 87.5% de los participantes considera mejoría en el aprendizaje, un 85% en la enseñanza de los temas de Álgebra Lineal y un 95% considera favorable utilizar *VilGebra.*

Los trabajos de Rosales (2012), Paredes, Iglesias y Ortiz (2009), Vergara, et al. (2016) y Vílchez (2015a,2015b), desarrollan algunos temas de Álgebra Lineal por medio de la utilización de software, por la necesidad de implementar procesos que resulten útiles para la resolución de ejercicios prácticos, acortando algunos procedimientos que resultan ser largos y pocos útiles en cuanto a contenido. Además, se utilizan por la necesidad de verificar las respuestas de algunos problemas.

2.1.3. Relación de antecedentes con el diseño de la Propuesta Didáctica

De las investigaciones se rescata la utilidad del uso de software para agilizar el cálculo de procedimientos algorítmicos, lo que permite concentrarse en los conceptos y discusión de errores a la hora de interpretar y aplicar los procedimientos como lo menciona Vergara et al., 2016 en su estudio.

Es importante la adaptación o creación de problemas y ejercicios que puedan ser resueltos con software y con procedimiento matemático. Autores como Rosales (2012) y Paredes et al. (2009), destacan la utilización de software como motivación a la materia de Álgebra Lineal.

Aunado a eso, el desarrollo inicial de la propuesta debe considerar un apartado para la utilización y manejo de comando del software *R*, por la importancia de familiarizar a los participantes con el software, para luego pasar con la fase de resolución de problemas, como lo propone Paredes et al., 2009.

Cabe rescatar que existe bibliografía que suele utilizarse para los cursos de Álgebra Lineal, en los que se implementa algún tipo de software, como por ejemplo, Kolman y Hill (2006) que desarrollan un capítulo de cómo utilizar *MatLab* y Lay (2013) que, además de desarrollar *Matlab* complementario con la teoría, lo hace desde un enfoque por competencias.

2.2. Propuesta didáctica

Según Márquez et al. (2008), "la propuesta didáctica plantea la construcción de prácticas educativas innovadoras para el abordaje de los contenidos con un énfasis lúdico que faculte al alumno para el autoaprendizaje" (p. 66).

Por ello, se entenderá propuesta didáctica, para efectos de la elaboración del trabajo de graduación, como un conjunto de actividades diseñadas por el docente que ahondó el aprendizaje en el estudiantado de algún tema, para lo cual pueda utilizar diversos recursos o medio didácticos.

Como ejemplo de actividades en propuestas realizadas en otros cursos, para temas relacionados con Álgebra Lineal, es la propuesta por Oropeza y Lezama (2007). Esta consiste en una serie de actividades para abordar los temas de dependencia e independencia lineal, aplicada en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, México.

Entre las actividades desarrolladas por Oropeza y Lezama (2007), se muestran como ejemplo, las siguientes:

> *Actividad 2*
>
> *Dadas las siguientes funciones* $\{x + 1, 1 - x, 2 - x\}$*:*
>
> *a) Determine si son linealmente dependientes o independientes utilizando el Wronskiano.*
>
> *b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.*
>
> *c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia? (2007, p.35)*
>
> *Actividad 3*
>
> *Dados los siguientes polinomios* $2x^2+3$, x^2, 1.
>
> *a) Determine si son linealmente dependientes o independientes utilizando el Wronskiano.*
>
> *b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.*
>
> *c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?*

d) ¿Qué sucedería con las respuestas anteriores si las funciones fueran $2x^2+3$, x^2, 7? (p.36, 2007)

Actividad 4

Dados los siguientes polinomios $-2x^2+x-4$, x^2-4x-4, $8x^2-7x-4$.

a) Determine si son linealmente dependientes o independientes.

b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.

c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia? (p. 37)

En esta propuesta, se dispone para que los participantes del estudio puedan utilizar tecnologías para facilitar la solución de los ejercicios.

Por su parte, Paredes, et al. (2009), desarrollan talleres de trabajo en los que se utilizan varios métodos de solución, como la utilización del software *DERIVE*, la modelación y métodos tradicionales. Un ejemplo de problema trabajado en las secciones desarrolladas estos autores es la siguiente:

Problema 1

La Compañía Polflex fabrica tazas y platos de cerámica. Por cada taza o plato un obrero utiliza una cantidad fija de material que introduce en una máquina moldeadora de la cual sale la pieza seca y barnizada. En promedio un obrero necesita tres minutos para resolver su parte del proceso con las tazas y dos minutos con los platos. El material de una taza cuesta 25 Bs. y el material de un plato cuesta 20 Bs. ¿Cuántas piezas de cada tipo puede hacer un obrero en una jornada de trabajo de 8 horas si se gastan exactamente 4300 Bs en materiales?

Otra propuesta en la que se desarrolla la utilización de software, es la de Rosales (2012), por medio de la manipulación de *Scilab* para verificar propiedades de matrices y solucionar algunos problemas.

Verificación propiedad 2 de linealidad

$$det\begin{pmatrix} ka & c \\ kb & d \end{pmatrix} = kdet\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Solución

-->a=rand(1); b=rand(1);c=rand(1);d=rand(1);

-->k=rand (1); // La constante

*-->A= [k*a c;k*b d], B=[a c; b d]*

A =

0.1381904 0.5116910

0.1049162 0.4031415

B =

0.1670194 0.5116910

0.1268036 0.4031415

*-->det(A), k*det(B)*

ans =

0.0020256

ans =

0.0020256

// Note los dos valores finales iguales, verifica la segunda propiedad de linealidad de los determinantes. (Rosales, 2012, p. 179)

Lay (2013) propone la elaboración de actividades introductorias y su representación, de la teoría de los temas. Uno de los ejemplos propuestos por Lay (2013) es el siguiente:

> *Ejemplo 1: Suponga que una economía comprende las industrias carbonífera, eléctrica y del acero, y que la producción de cada sector se distribuye entre los diversos sectores como se muestra en la tabla 1: las entradas en una columna representan las partes fracciónales de la producción total de un sector industrial. La segunda columna de la tabla 1, por ejemplo, dice que la producción total del sector eléctrico se divide como sigue: 40% a la industria del carbón. 50% a la del acero, y el restante 10% a la industria eléctrica. (El sector eléctrico trata a este 10% como un gasto en el que se incurre con la finalidad de operar su negocio). Como se deben considerar todas las producciones, las fracciones decimales en cada columna deben sumar 1. Denote los precios (es decir, valores en dólares) del total de las producciones anuales de los sectores del carbón, eléctrico y del acero mediante pe, pe y ps, respectivamente. Si es posible, encuentre los precios de equilibrio que hacen que los ingresos de cada sector igualen a sus gastos. (Lay, 2013, pp. 53-54).*

Distribución de la producción por sectores

Del carbón	***Eléctrico***	***De acero***	***Comprada por***
.0	*.4*	*.6*	*S. del carbón*
.6	*.1*	*.2*	*S. eléctrico*
.4	*.5*	*.2*	*S. de acero*

En la misma línea de las investigaciones mencionadas, el presente estudio pretende proponer actividades utilizando el software *R* y su entorno *RStudio* como recursos didácticos, para poder facilitar el cálculo procedimental y la comprensión de conceptos relacionados con el álgebra lineal.

2.1. Análisis didáctico

El Análisis Didáctico es una metodología de investigación en la didáctica de la matemática y se encarga de justificar el diseño y evaluación de unidades didácticas en educación matemática.

El Análisis Didáctico está compuesto por cinco etapas de análisis, las cuales corresponden a Análisis de Contenido, Análisis Cognitivo, Análisis de Instrucción, Análisis de Actuación y Análisis Evaluativo. El Análisis de Contenido, el Análisis Cognitivo y el Análisis de Instrucción corresponden a la etapa de diseño de la propuesta didáctica (Lupiáñez, 2013).

Con respecto a las etapas del análisis, Rico y Fernández (2013) resumen que el Análisis Didáctico:

> Comienza por la revisión histórica y epistemológica de los conceptos centrales implicados en el texto, que se sintetiza en una red de significados de dichos conceptos. Continúa con el análisis del contenido matemático escolar correspondiente, que se contempla con una síntesis que selecciona y organiza los conceptos y procedimientos relevantes que articulan el tema matemático en estudio y determinan sus focos prioritarios. Prosigue con un análisis cognitivo centrado en el aprendizaje de tales contenidos, que genera una síntesis sobre las expectativas de aprendizaje reconocibles sobre el texto y establecidas según dichos criterios, con los cuales organizan los aprendizajes. Avanza con el análisis de instrucción, que, a su vez, produce una nueva síntesis, que se expresa en la estructura final de la unidad didáctica del tema cuyo

> estudio se contempla. Finalmente, un nuevo análisis sobre los modos de evaluación de la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos, dan paso a la síntesis evaluadora del proceso. Las necesidades del análisis pueden simplificar el recorrido del ciclo por supresión, ausencia o simplificación de alguna de sus etapas; también puede ser necesaria su reiteración para profundizar en la interpretación del texto o documento en estudio. (p. 20)

Además, Lupiáñez (2013) considera que "el análisis didáctico tiene dos particularidades: es específico para cada tema de matemáticas y se realiza para una planificación de un tiempo determinado de enseñanza sobre ese tema" (p. 82).
Para efectos de la elaboración de la Propuesta Didáctica, se menciona del Análisis Didáctico las etapas del Análisis de Contenido, Análisis Fenomenológico y el Análisis de Instrucción.

2.2. Análisis de Contenido

En este análisis, Lupiáñez (2013) menciona que:

> El profesor identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático que considera relevantes a efecto de su planificación como contenidos escolares aptos para la instrucción. La revisión y organización de los conceptos y procedimientos que conforman ese tema… (p. 82)

Según Lupiáñez (2013) en el Análisis de Contenido, se seleccionan y revisan documentación o material sobre la temática de estudio, para establecer y delimitar focos conceptuales. El autor, menciona que los focos conceptuales "… consisten en agrupaciones específicas de conceptos, procedimientos y relaciones, que adquieren importancia especial pues expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos." (p. 86)

La organización del Análisis de Contenido se establece por medio de los sistemas de representación, fenomenología y estructura conceptual (Gómez, 2002 y Lupiáñez, 2013)

Sistema de representación: "Considera las diferentes maneras en las que se puede representar el contenido y sus relaciones con otros conceptos y procedimientos." (Lupiáñez, 2013, p. 85). Además, Gómez (2002) propone tres dimensiones en los sistemas de representación, los cuales corresponden al desarrollo paralelo de "los conceptos, los sistemas de representación y las conexiones" (p. 267); entre los temas.

Gómez (2002) establece que

> La descripción detallada de la estructura conceptual con base en los sistemas de representación permite identificar y delimitar las subestructuras matemáticas que conforman la estructura matemática representada. Algunas de esas subestructuras pueden modelizar fenómenos sociales, naturales y matemáticos. (p. 268)

Fenomenología: "Considera los fenómenos (contexto, situaciones y problemas) que pueden dar sentido al contenido considerado." (Lupiáñez, 2013, p. 85). En este proceso se establecen clasificaciones y descripciones de las relaciones existentes entre los fenómenos. (Gómez, 2002)

Estructura conceptual: "Considera las relaciones de los conceptos y procedimientos implicados en el contenido estudiado, atendiendo tanto la estructura matemática de la que forman parte, como la que configuran tales conceptos y procedimientos." (Lupiáñez, 2013, pp. 85-86).

Los resultados obtenidos del Análisis de Contenido, sintetizan la información por medio de un mapa conceptual, la cual muestra la relación entre "las prioridades y nociones básicas de un tema de matemáticas" (Lupiáñez, 2013, p.89).

2.3. Análisis cognitivo

En el análisis cognitivo se detectan y describen errores que pueden cometer el estudiante (Gómez, 2002). Además, de las "limitaciones que pueden interferir con el aprendizaje" (Lupiáñez, 2013, p.83).

Gómez (2002) menciona que:

> El análisis cognitivo de una estructura matemática es, por un lado, la identificación, descripción y caracterización sistemática, detallada y fundamentada de las tareas (relacionadas con dicha estructura matemática) que los escolares pueden resolver en ese momento y de aquellas tareas que deberían poder abordar durante la sesión que se está planificando. El análisis cognitivo es también la identificación, descripción y caracterización de los errores en los que los escolares pueden incurrir al abordar dichas tareas, de las dificultades que subyacen a esos errores y de los obstáculos que es necesario superar para resolver dichas dificultades. (p. 272)

Por su parte, Lupiáñez (2013) afirma que el análisis cognitivo “permite al profesor llevar a cabo una descripción y un análisis detallado de la problemática del aprendizaje de un tema específico de matemáticas desde un punto de vista curricular y funcional” (p. 90).

Además, Lupiáñez (2013) propone tres procedimientos o pautas, para el análisis cognitivo que son:

Expectativas de Aprendizaje: Son “aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores, actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que se logren, adquieran, desarrollen y utilicen los estudiantes.” (p. 90)

Las competencias matemáticas básicas, establecidas por PISA en el 2012 y mencionadas por Lupiáñez (2013), son: Razonar y comunicar (RA), Comunicar (C), Matematizar (M), Elaborar estrategia para resolver el problema (RP), Representar (R), Utilizar lenguaje, simbología formal y técnico, y las operaciones (LS), Usar herramientas matemáticas (HM).

Por medio de una tabla (Tabla 1) se coloca una marca a los objetivos que logren desarrollar las competencias establecidas (Lupiáñez, 2013).

Tabla 1: Objetivos específicos sobre la temática en estudio y su contribución al desarrollo de competencias matemáticas específicas

	Competencias						
Objetivos específicos	RA	C	M	RP	R	LS	HT
1. Objetivo específico 1	*		*				
2. Objetivo específico 2				*		*	*

Nota: Adaptado de Lupiáñez (2013, p. 93)

Limitaciones de aprendizaje: “Se centra en los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el aprendizaje” (Lupiáñez, 2013, p. 90). El autor establece, que “el error es la manifestación visible de una dificultad. El error es observable directamente en las actuaciones escolares…” (p. 95)

Lupiáñez (2013) propone una tabla (Tabla 2) que resume los tipos de errores cometidos relacionado con las dificultades.

Tabla 2: Dificultades, errores y objetivos relacionados con el estudio

Dificultades	Errores
Descripción de dificultad 1	Errores relacionados con las dificultades 1
	E1
	E2
	E3
Descripción de dificultad 2	Errores relacionados con las dificultades 2
	E1
	E2

Nota: Adaptado de Lupiáñez (2013, p. 96)

Oportunidad de aprendizaje: abarca la asignación o diseño de tareas para la detección de errores o dificultades de aprendizaje (Lupiáñez, 2013)

2.5.Análisis de Instrucción

Lupiáñez (2013) menciona que:

> El análisis de instrucción se centra en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando. También recoge aspectos relativos a la gestión del aula, al empleo de materiales y recursos y a los criterios y métodos de la evaluación para la unidad. (p. 98)

Marín (2013) propone para la organización del análisis de instrucción, la adecuación de tareas, el análisis de la complejidad tareas y la selección y organización de tareas.

Adecuación de tareas: Luego de tener establecidos los objetivos de aprendizaje para la propuesta, se buscan tareas en libros o material del tema, teniendo la posibilidad de adecuar o diseñar nuevas tareas. (Marín, 2013)

Marín (2013) propone dos procesos en esta etapa, los cuales corresponden a:

- "Contenidos, representaciones y situaciones que intervienen en la redacción y resolución de la tarea escolar" (p. 108).

- “Demanda cognitiva de la tarea observada desde dos perspectivas complementarias: objetivos específicos de la tarea escolar y competencias que se pueden activar” (p. 109).

Para la seleccionar las tareas, Marín (2013) sugiere establecer:

1. **Criterios de adecuación a los contenidos:**

- Las tareas manejan contenidos de la estructura conceptual ya diseñada. El conjunto de tareas seleccionadas estará equilibrado y no debe escorarse demasiado hacia el contenido procedimental algorítmico.
- Las tareas involucran en su resolución los diferentes sistemas de representación previstos.

2. **Las tareas representan contexto y situaciones diferentes y complementarias.**
3. **Criterios de adecuación a las expectativas de aprendizaje**

- Las tareas están asociadas a los objetivos de aprendizaje previsto con anterioridad. La base de tareas seleccionadas estará equilibrada respecto a los objetivos.
- Las tareas asociadas a los objetivos de aprendizaje contribuyen realmente a activar las competencias que se asociaron a los objetivos de aprendizaje en el análisis cognitivo (p. 109).

Complejidad de tareas escolares: Marín (2013) menciona que la noción de complejidad tiene que ver con la dificultad que un estudiante experimenta durante la realización de una tarea” (p. 111). En esta fase del Análisis de Instrucción, se clasifican tareas con los niveles de complejidad que establece PISA, las cuales corresponden a la Reproducción, Conexión y Reflexión. En la tabla 3, se muestra la clasificación de acciones según el nivel de complejidad propuesta por Marín (2013).

Tabla 3: Acciones de Argumentar y Justificar según nivel de complejidad

Acción/es		Nivel de complejidad	
	Reproducción	Conexión	Reflexión
Seguir Justificar Elaborar	Procesos cuantitativos estándar en enunciados, cálculo y resultados	Argumentos matemáticos encadenados de diferentes tipos	
Razonar		Sin distinguir pruebas de otras formas de argumentación simples	Distinguiendo entre pruebas y otras formas de argumentar
Tener sentido de la heurística		¿Qué puede pasar y por qué? ¿Qué sabemos y qué queremos saber?	¿Cuáles son las propiedades esenciales? ¿Cómo se relacionan diferentes objetivos?

Fuente: Marín (2013, pp. 111-112)

Selección y organizar de las tareas escolares: En esta fase se organizan las secciones de clases e instrumentos evaluativos para la propuesta. (Marín, 2013)

Para organizar las tareas en secuencias de aprendizaje, Parceira (1996), citado por Marín, (2013), formula una clasificación para la secuencia de aprendizaje, que se implementan así:

- Motivación inicial.
- Análisis de conocimientos previos.
- Desarrollo y aprendizaje de nuevos conocimientos.
- Consolidación de conocimientos adquiridos.

- Aplicación de conocimientos, conexión entre conocimientos o aplicación de problemas relacionados con el entorno.
- Asignación de evaluación (p. 124)

Asimismo, Marín (2013) plantea los siguientes criterios para la organización de tareas:

- Proponer expectativas de a corto plazo.
- Seleccionar contenidos de la estructura conceptual bien conectados, buscando la producción de significado.
- Seleccionar tareas y combinarlas según complejidad, función didáctica o concepción del aprendizaje.
- Planificar los recursos didácticos.
- Tomar decisiones sobre otros factores que condicionan el escenario educativo: interacciones y ayudas entre profesor y alumnos, agrupamientos, normas del aula que afectan a la motivación para la realización de la tarea (p. 117).

Para la selección de la evaluación de aprendizaje, Marín (2013) propone dos focos relacionados con los objetivos de aprendizaje, los cuales corresponden:

- “Tomar decisiones coherentes para seleccionar las prioridades de aprendizaje a evaluar teniendo en cuenta las expectativas planificadas, las instrucciones del currículo oficial en materia de evaluación y las tareas propuestas para el aprendizaje” (p. 116).
- “Seleccionar y justificar tareas escolares para elaborar una prueba de evaluación escrita” (p. 117).

3. Resumen del Análisis Didáctico para el diseño de unidades didácticas

Gómez (2002) establece el siguiente resumen para la elaboración de unidades que, en cuanto al Análisis de Contenido, identifica:

a. Los conceptos y estructuras conceptuales por tratar.
b. Las representaciones de estos conceptos y estructuras conceptuales.
c. Las conexiones entre diversas representaciones de un mismo elemento de la estructura conceptual.

d. Las conexiones entre diferentes elementos en un mismo sistema de representación, los modelos involucrados (pp. 279-280).

En el análisis cognitivo se determinan, según Gómez (2002):

- Los significados que se pueden construir (hechos, conceptos y estructuras conceptuales relacionados con los puntos a y b anteriores),
- Los procedimientos que se pueden desarrollar (destrezas, razonamientos y estrategias relacionados con los puntos c, d y e),
- Los errores, las dificultades y los obstáculos que se pueden abordar (descritos en términos de los significados y los procedimientos anteriores). (p.280)

En el análisis de instrucción Gómez (2002) identifica:

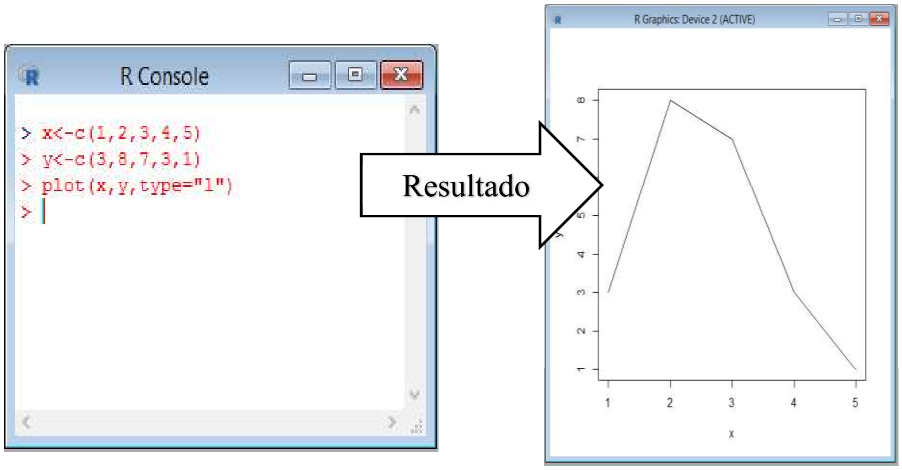
- Los procesos de modelización y de resolución de problemas específicos a la estructura matemática,
- Los materiales y recursos disponibles. (p.280)

2.6. Software R

***Software R* como herramienta en procesos formativos**

El software estadístico *R*, funciona por medio de una consola que utiliza el lenguaje de programación *R*, por ello el usuario debe saber ingresar funciones para trabajar con el entorno. En la figura 1, se muestra un ejemplo de cómo utilizar la consola de *R* para realizar una representación gráfica por medio de la función *plot*.

Figura 1. Ejemplo de la utilización del software *R* para realizar un gráfico.

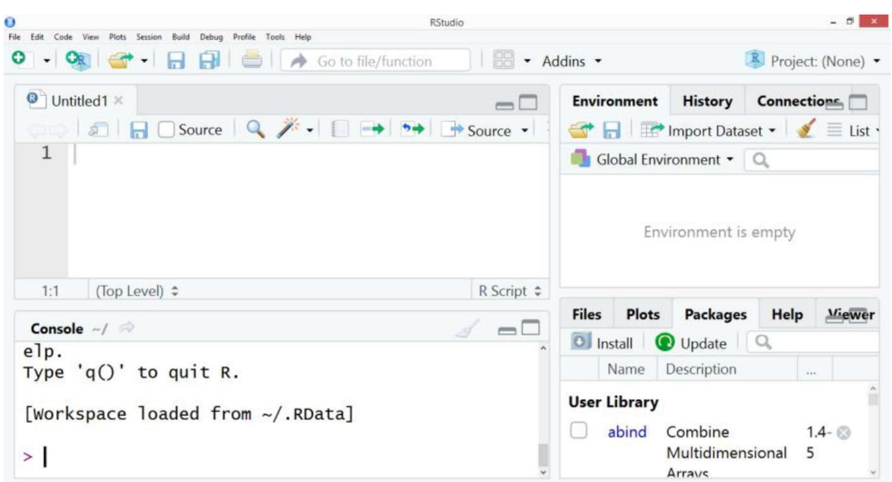


Nota: Elaboración propia, 2022

Además, posee una variedad de funciones y paquetes que facilitan la utilización de métodos estadísticos, en los que se requieren bases de datos con muchas variables y suelen ser usados para actividades de investigación.

El software *R* posee un entorno de desarrollo integrado el cual es amigable con el usuario, llamado *RStudio* (figura 2) que facilita el manejo de comandos, funciones, importación y visualización de bases de datos, cargar e instalar paquetes y la codificación de documentos de formatos conocidos como *.doc y *.pdf.

Figura 2. Interfaz gráfico de *RStudio*.

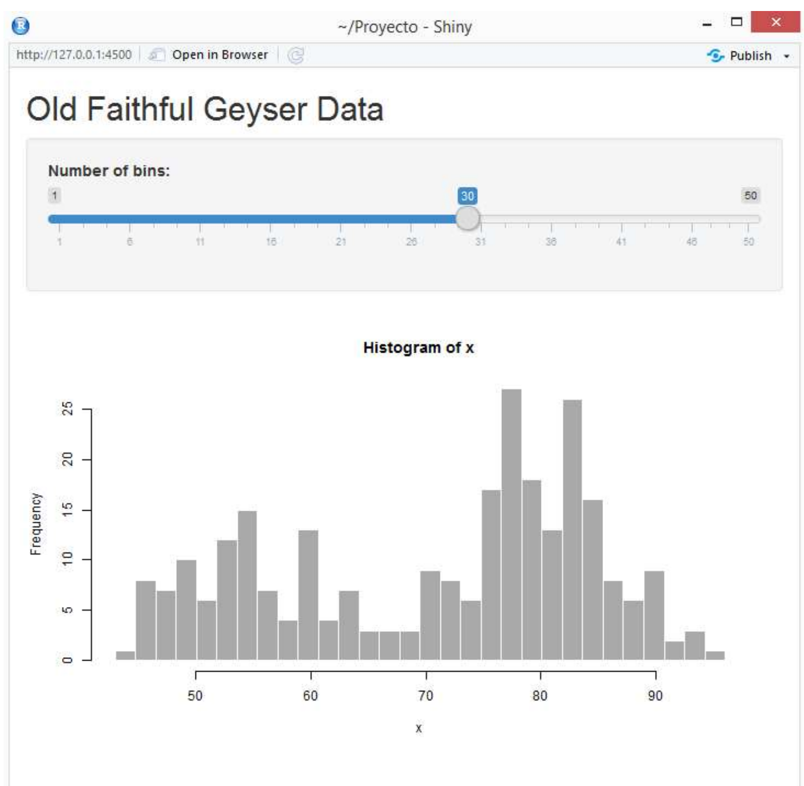


Nota: Elaboración propia, 2022.

Existen libros, guías, talleres físicos y manuales de Internet donde se desarrollan aplicaciones a la enseñanza de temas de matemática y para fines prácticos del software *R*, como es el caso del trabajo de Mora (2016), el cual corresponde a un artículo para la utilización de los entornos *R* en métodos numéricos y sirve de guía para la utilización de *R* y *RStudio*. Para ello, el autor utiliza funciones de *R* para programar rutinas y funciones, además, utiliza paquetes como *rbenchmark* para comparar la velocidad de los procedimientos, *Rcpp* para mejorar el rendimiento de las rutinas, entre otras.

Por su parte, Carmona y Subirana (2015) desarrollan un taller para la utilización del paquete *Shiny*, la cual crea aplicaciones web interactivas para el usuario y permite la manipulación de datos para observar comportamientos al cambiar ciertas variables en un modelo. En la figura 3, se muestra un diseño predeterminado que posee el paquete *Shiny*.

Figura 3. Ejemplo de diseño predeterminado del paquete *Shiny* en *R*.



Nota: Tomado del paquete *Shiny*, 2022.

Entre las herramientas que posee el entorno *R* se encuentra la edición de texto. Zamora y Arroyo (2016) desarrollaron un trabajo donde se proporcionan ejemplos de cómo utilizar el paquete *Knirt* para la visualización de los resultados obtenidos del mismo entorno, en especial la visualización de tablas y referencias automáticas en el documento.

1.1.3. Aplicaciones del entorno *R* al Álgebra Lineal

Fieller (2015), propone un libro de texto que desarrolla los temas de matrices, vectores, determinantes y enfatiza las aplicaciones a la estadística, así como la solución de ejercicios utilizando las funciones de *R*.

Por su parte, Vinod (2011) propone la utilización de *R* en temas de geometría empleando gráficas, vectores en el espacio y matrices. En estos libros muestran los resultados obtenidos en el entorno al utilizar las funciones para los temas de Álgebra Lineal. Además, Vinod (2014) propone un trabajo de las aplicaciones de matrices en temas de economía y estadística utilizando bases de datos.

De igual forma, lo propuesto por Hojsgaard (2011) contempla el desarrollo de temas de matrices y análisis de modelos lineales, utilizando la teoría de matrices y funciones de *R*.

Friendly, et al. (2018), proponen el paquete *matlib* en *R* para la enseñanza de Álgebra Lineal y estadística multivariada. Entre los temas de Álgebra Lineal que se pueden desarrollar se encuentran determinantes, eliminación Gaussiana, ecuaciones lineales e inversas de matrices, además las funciones del paquete proporcionan la solución detallada del cálculo de los temas.

De los trabajos consultados, se enfatiza la utilización de funciones y paquetes de *R*. De esta manera, el desarrollo de esta propuesta didáctica abarcará la utilización de paquetes y funciones de *R* que faciliten los procedimientos y la resolución de problemas.

1.1.4. La implementación de vídeos en la educación

Velarde, et al. (2017), realizan un análisis investigativo de los vídeos tutoriales en una población de 18 a 24 años de edad. Los autores mencionan que los vídeos tutoriales son utilizados cada vez más por los estudiantes. Sin embargo, gran parte de los vídeos tutoriales son realizados por personas que no tienen conocimientos sobre didáctica y pedagogía, centrándose en aspectos técnicos. Los vídeos tienen una ventaja al implementarse, ya que se puede manejar el tiempo de su desarrollo mediante pausas temporales por parte del estudiante y poder entender los procedimientos.

En la misma línea, el MEP propone el proyecto Profe en Casa, con el cual se promueven vídeos para enseñanza secundaria. Los vídeos se encuentran organizados por grados y abarcan algunos contenidos propuestos en los temarios del MEP y pueden ser utilizados tanto por estudiantes como profesores. (MEP, 2018)

El Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica del MEP, propone una serie de cursos virtuales en línea (conocidos como mini MOOC) para profesores y estudiantes (Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, 2017). En estos cursos en línea se plantean explicaciones por medio de vídeos, teoría de la materia y prácticas en línea para el desarrollo de los cursos.

Por su parte, De Cabezón (2015) en su canal de *YouTube* titulado "Derivando", propone vídeos relacionados a las matemáticas. El autor establece en su canal tres categorías de vídeos que corresponden a:

- Matemáticas en la vida real.
- Problemas matemáticos famosos.
- Historias y Matemáticas.

Los vídeos De Cabezón (2015), se explican para una fácil compresión y motivación, que involucra aspectos relacionados con las matemáticas en la vida real.

Estos estudios, son algunos ejemplos de aplicación de vídeos a la enseñanza, herramienta que cada vez es utilizada con mayor frecuencia, como complemento a las clases tradicionales o como parte de modelos virtuales de aprendizaje, dada su conveniencia para poder utilizarlas en cualquier momento y lugar. En la tabla 4, se resumen las ventajas y aportes a la utilización del *software R* al diseño de la propuesta didáctica.

Tabla 4: Resumen de ventajas de la utilización del software R en Álgebra Lineal

Ventajas	Aporte al trabajo realizado
Software de libre licencia.	Cualquier estudiante puede utilizarlo en su computadora. En caso de no poseer

El interfaz grafico RStudio posee una versión en línea	computadora, puede trabajar asociando una cuenta en RStudio Cloud.
Paquetes especializados en temas de Algebra Lineal	Se pueden aprovechar los paquetes para ser utilizados y enfatizar ejemplos de su utilización. Facilita el proceso de realizar operaciones con matrices de tamaño considerables, como ejemplo una matriz de tamaño 10x10 o superior. Se puede enfatizar el diseño de proyectos en los cuales los estudiantes se vean a la necesidad de utilizar las matrices de gran tamaño.
Variedad de documentación y referencias para consultar	Se requiere desarrollar habilidades de investigación en los estudiantes. En ocasiones deberán consultar referencias para corregir posibles errores del leguaje del programa. Por lo cual, la utilización del software R resulta conveniente.
Utilización de Vídeos tutoriales y el programa R	El curso MAC411 Álgebra Lineal es un curso bajo el enfoque por competencias. Se requiere de la utilización de técnicas educativas, diferentes a las clases traiciónales.

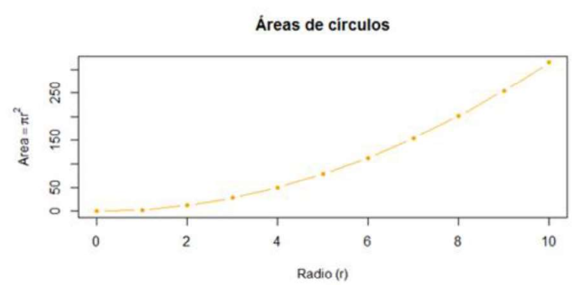
Nota: Elaboración propia, 2022.

2.3.1.1.R y RStudio como recurso didáctico para la enseñanza

El entorno de desarrollo integrado *RStudio* de *R*, posee ciertas utilidades como paquetes, funciones, lenguaje accesible para la programación, edición de texto, además de ayudas para el manejo de paquetes por medio de explicaciones y ejemplos, que pueden utilizarse en la enseñanza de la estadística, programación, edición de texto, la realización de gráficos y mapas, entre otras. Por ejemplo, Santana y Farfán (2014) muestran la utilización de *RStudio* para relacionar el área de la circunferencia con respecto a su radio (Figura 4), a mayor radio mayor área de la circunferencia.

Figura 4. Actividad de la relación del área de la circunferencia respecto al radio por medio de una gráfica en *RStudio*.

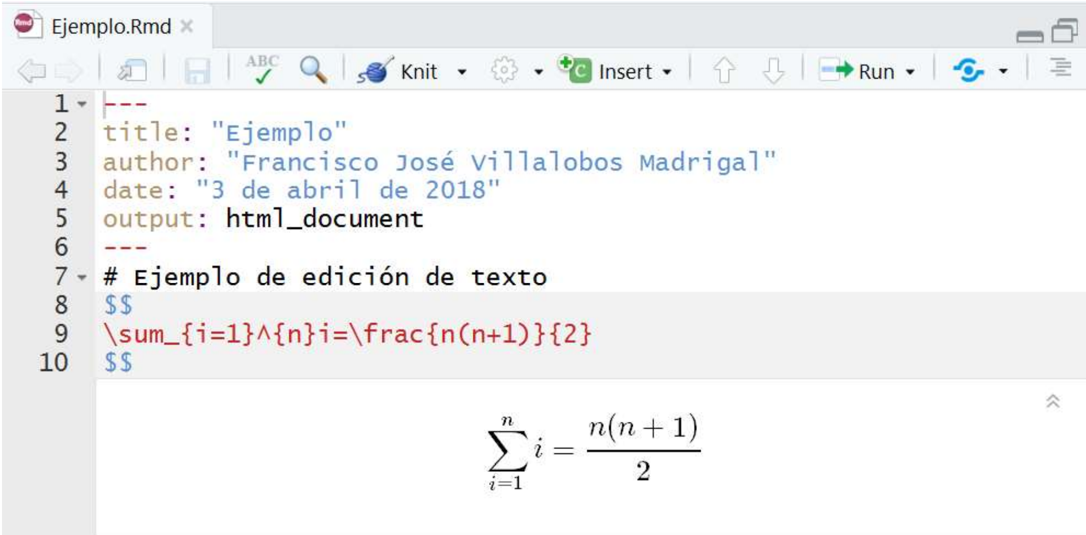
```
radio <- 0:10              # Vector de radios
area  <- pi*radio^2        # Vector de áreas
tit   <- "Áreas de círculos" # Título del gráfico
plot(radio, area,          # x=radio y=area
     type="b",             # "both", puntos y líneas
     main=tit,
     xlab="Radio (r)",
     ylab=expression(Area == pi*r^2), # Una expresión
     col="orange",                    # color (naranja)
     pch=20)           # tipo de símbolo para punto
```



Nota: Tomado de Santana y Farfán (2014, p. 128).

En la figura 5, se muestran la utilización del entorno *R Markdown*, el cual permite crear documentos y compilar códigos de LaTex para el ingreso de fórmulas matemáticas en el documento, además, permite visualizar las fórmulas ingresadas.

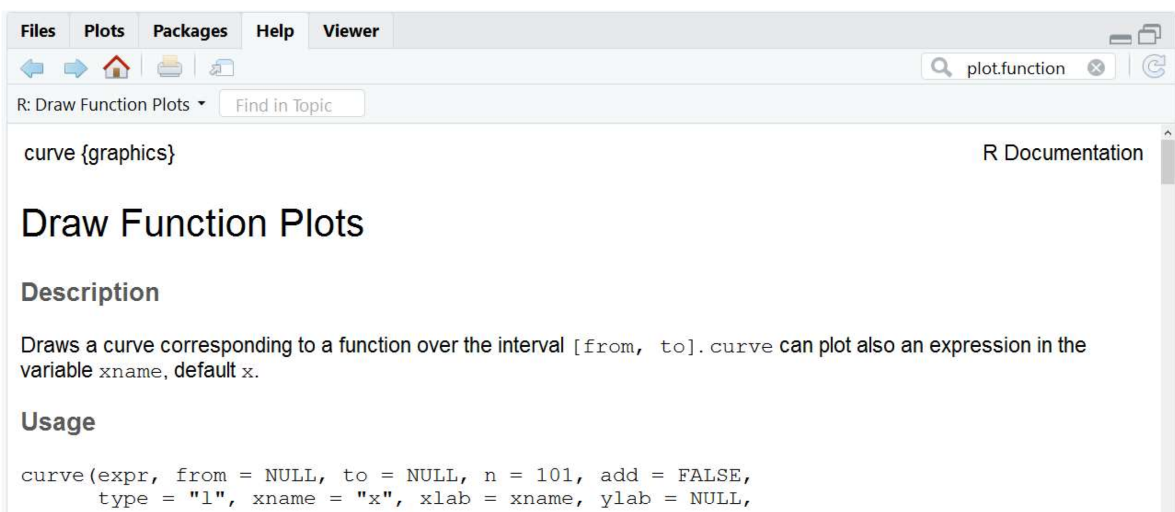
Figura 5. Utilización del paquete *R Markdown* para la edición de texto.



Nota: Elaboración propia, 2022.

Otro ejemplo, es la utilización de la ayuda de *RStudio* para visualizar la descripción y ejemplos de funciones o paquetes. En la figura 6, se muestra una parte de la ayuda de la función *plot*.

Figura 6: Utilización de la ayuda de *RStudio*, describe cómo utilizar los paquetes y muestra ejemplos.



Nota: Elaboración propia, 2022.

Como puede notarse, tanto el software *R* como su entorno de desarrollo *RStudio* pueden ser utilizados como recursos didácticos para abordar los temas del álgebra lineal. Su uso puede complementarse con vídeos tutoriales que pueden utilizar los estudiantes para potenciar habilidades y adaptar diferentes formas a las tradicionales, para la comprensión de los conceptos.

4. Vídeos tutoriales

Si bien existe una gran variedad de vídeos en Internet sobre temas de educación, Velarde, et al. (2017) acuden a que existe una problemática con los vídeos tutoriales que se encuentran en Internet, ya que muchos son creados por personas aficionadas que, en ocasiones, cuentan con conocimientos limitados sobre pedagogía, la materia o ambas. Por estas razones es recomendable que los vídeos tutoriales sean creados por profesores expertos en la materia y sean adecuados a los contenidos para la enseñanza.

Además, Ruiz (2015) menciona que la utilización de vídeos tutoriales facilita el aprendizaje y para su creación se debe considerar los siguientes procesos: la creación de un guion previsto, seleccionar los recursos a utilizar, creación y edición del video y por último la producción del video.

Para la creación de un guión Ruiz (2015), considere los siguientes aspectos:

- Debe ser atractivo para el estudiante
- Debe tener una secuencia corta con significado concreto
- La longitud no debe ser excesiva teniendo un mensaje claro y concreto
- Debe seguir secuencialmente pasos lógicos donde se aumente el nivel de dificultad y entendimiento. (p. 44)

Además, Galán (2007) plantea tres tipos de guiones, los cuales corresponden a:

- Guión de contenido: Se presenta un esquema de la información que se quiere comunicar.
- Guión didáctico: Se muestra la información que va a tratar el video totalmente desarrollado.

- Guión técnico: Muestra la información de los dos anteriores guiones y además considera otros aspectos como materiales, audiovisual o multimedia, para la elaboración del video.

Para la producción de video Bartolomé (1999), menciona que se eligen herramientas tecnológicas para su elaboración como cámaras, softwares o alguna otra herramienta, que facilite la realización del video.

Adicional a estos procesos Bartolomé (1999), establece un proceso más luego de la producción, el cual consiste en la evaluación de vídeos por parte de la opinión de expertos en la materia (juicio de expertos), los cuales evalúan el contenido, aspectos estéticos y su diseño.

Por su parte, Cabero y Llorente (2013) mencionan que "la evaluación mediante el juicio de experto consiste, básicamente, en solicitar a una serie de personas la demanda de un juicio hacia un objeto, un instrumento, un material de enseñanza, o su opinión respecto a un aspecto concreto."(p. 14). Por otro lado, Dorrego (1994) señala que la evaluación se da en la parte de planificación (guía) y luego de su realización (video preliminar).

Con respecto a la duración del video Fuentes, Hernández y Pra (2013), establecen el "mini video como un video de corta duración que constituye un material didáctico de tipo tecnológico para transmitir una determinada información que ayude a consolidar cierto aprendizaje" (p. 180). Los autores proponen que cada video no supere una duración de 10 minutos, ya que los estudiantes pierden el interés cuando supera esta duración.

Fuentes et al. (2013), establecen que para diseñar una propuesta sobre el diseño de mini vídeos, se deben considerar las siguientes pautas:

- Selección de los contenidos o temas a explicar.
- Identificación del grupo al que irá destinado.
- Determinación de los medios técnicos a utilizar.
- Temporalización del proceso u ordenación de las diferentes actividades que se van a llevar a cabo para elaborar cada mini video: identificación de los conceptos a tratar, preparación del guion, producción de las transparencias necesarias y ensayo de la presentación. (p. 182)

Capítulo III: Marco metodológico

3.1. ÁREA DE CONOCIMIENTO DEL ESTUDIO

La didáctica de la matemática se "centra en conocimientos ya establecidos y se preocupa de analizarlos para encontrar formas adecuadas de transmitir y entender las matemáticas" (Gutiérrez citando a Chevallard (1985), 1991, p.151). Por esta razón, el área de la didáctica de la matemática implica el diseño de actividades complementarias para las clases y de esta manera profundizar en el aprendizaje de los estudiantes (Gutiérrez, 1991).

Este Trabajo de Graduación se enmarcó en el área de la didáctica de las matemáticas, por medio de la elaboración de una propuesta que considero para su elaboración, los Análisis de Contenido, Análisis Cognitivo y el Análisis de Instrucción, que corresponden a la fase de diseño de unidades del Análisis Didáctico.

Se abordó como temática principal de la propuesta didáctica, el aprendizaje de los temas de matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes en el campo de los números reales, los cuales son contemplados en el plan de estudio *BLEM-2017* para el curso MAC411 Álgebra Lineal.

Además, en la propuesta didáctica se utilizó como recurso los vídeos tutoriales, que explican la utilidad paquetes y funciones del software *R,* para la solución de ejercicios contemplados en la propuesta didáctica.

3.2. ENFOQUE Y TIPO DE INVESTIGACIÓN

La propuesta de investigación se realizó bajo el enfoque cualitativo, la cual es apropiada para el estudio de temas relacionados con la educación. (McMillan y Schumacher, 2005)

El tipo de investigación de la propuesta es de tipo descriptivo. Los autores Quecedo y Castaño (2003) establecen que esta se encuentra "orientada a describir con detalle y exhaustividad los fenómenos en uno o más momentos de tiempo" (p. 38). En particular, se describió el proceso de planificación, elaboración de la propuesta didáctica y la evaluación de los vídeos tutoriales.

3.3. ELABORACIÓN DE LA PROPUESTA

Para la elaboración de propuesta didáctica se consideró las siguientes actividades, enmarcadas en los Análisis de Contenido, Cognitivo y de Instrucción:

3.3.1. Análisis de Contenido

- Se consultó referencias de Álgebra Lineal y el programa de estudio *BLEM-2017*, para el establecimiento de focos de estudio que organizaron, resumieron de conceptos, procedimientos y relaciones entre los contenidos de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
- Se establecieron sistemas de representación asociados a los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
- Se seleccionó fenómenos relacionados a los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, para establecer la clasificación y relación matemática.
- Se propuso una estructura conceptual por medio de un mapa conceptual, en la cual se relacionen los temas.

3.3.2. Análisis Cognitivo

- Se seleccionaron los objetivos de enseñanza para el aprendizaje de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales según el programa BLEM-2017.
- Se establecieron las relaciones de los objetivos de enseñanza con respecto a las competencias matemáticas básicas (Razonar y comunicar (RA), Comunicar (C), Matematizar (M), Elaborar estrategia para resolver el problema (RP), Representar (R), Utilizar lenguaje, simbología formal y técnico, y las operaciones (LS), Usar herramientas matemáticas (HM)).
- Se detectaron problemas relacionados con el aprendizaje de los temas de matrices, determinante y sistemas de ecuaciones lineales por medio de la consulta de investigaciones realizadas a la problemática.
- Se resumieron las dificultades y errores obtenidos de la indagación de fuentes relacionadas a investigaciones de errores y problemas que se pueden presentar en Álgebra Lineal.

- Se busco y seleccionó ejercicios que abarquen problemáticas detectadas relacionadas al aprendizaje de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones.

3.3.4. Análisis de Instrucción

- Se seleccionó ejercicios y problemas para el desarrollo de los objetivos de aprendizaje y las competencias establecidas en la propuesta didáctica.
- Se selección ejercicios y problemas para la utilización de los vídeos tutoriales que expliquen la utilización de paquetes y funciones del software *R*.
- Se organizó los ejercicios y problemas.

3.4. ESTRUCTURA DE PLANEAMIENTO DIDÁCTICO

López (2013) propone que, para el planeamiento basado en el enfoque por competencias, se relacione el aprendizaje por medio de actividades y las estrategias de evaluación. Además, el enfoque por competencias considera necesario la elaboración de evidencias, ya sea por parte del estudiante o docente. En la tabla 6, se considera el formato planteado por López (2013), adaptado para el estudio.

Para la elaboración de la propuesta didáctica, se considera el desarrollo de los siguientes aspectos relacionados a las competencias según la Escuela de Matemática de la UNA (2017) en el programa *BLEM-2017*

3.4.1. Competencia general

"Desarrollar habilidades en el uso de tecnologías de la información y comunicación (TIC) para el fortalecimiento de los procesos cognitivos en diversos contextos educativos" (p. 61).

3.4.2. Competencia didáctico-matemático

"Aplicar estrategias para la resolución de problemas que desarrollen el pensamiento lógico y sean profesionales críticos y reflexivos" (p. 62).

3.4.3. Competencia pedagógica

"Diseñar, seleccionar y aplicar recursos didácticos que potencien un aprendizaje estratégico para el logro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la asignatura" (p.63).

"Analizar necesidades de aprendizaje y capacidades cognitivas del estudiantado con el fin de mejorar la mediación pedagógica para el logro de los objetivos de aprendizaje" (p.63).

3.4.4. Competencia matemática del curso MAC411 Álgebra Lineal

"Aplicar los conocimientos sobre Resolución de Problemas en contextos multidisciplinares para mayor comprensión de su importancia en otras áreas científicas y sociales" (p. 238).

3.4.5. Subcompetencia matemática del curso MAC411 Álgebra Lineal

"Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado" en los temas de matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes (pp. 239-241).

Tabla 6: Propuesta de planeamiento considerando el enfoque por competencia

Datos generales del curso

Propósito general: metas que se desean que los estudiantes alcanzan. Se redacta introduciendo un verbo y respondiendo a las preguntas: ¿Qué?¿Cómo? y ¿Para qué?.

Saberes necesarios

Temas

Plan de aprendizaje

Competencia

Sub-competencia

Nombre de la actividad	*Tipo de mediación*	*Recursos*	*Procedimientos*	*Duración*		*Producto o evidencias*	*Instrumento de evaluación*	*Puntaje*
				Presencial	*No Presencial*			

Lista de referencias

Fuente: Adaptado a partir de López (2013).

3.5. DISEÑO DE VÍDEOS TUTORIALES

Para el diseño de cada uno de los vídeos tutoriales de la propuesta didáctica, se estableció que su duración no supere los 10 minutos.

Como parte de la propuesta se desarrollaron:

- **Vídeos tutoriales sobre el uso de *R* y *RStudio:*** Se diseñaron dos vídeos tutoriales que abordaron la utilización de *R* y *RStudio,* así como el lenguaje de programación *R* y algunas herramientas que se suelen utilizar para trabajar con dichos softwares.

  Vídeo 0: Instalación de R y RStudio Principiantes

  Vídeo 1: Introducción a las herramientas de RStudio
- **Vídeos tutoriales para el uso de paquetes de R:** Se diseñaron tres vídeos tutoriales que explican la utilización de paquetes y funciones de *R* en la solución de ejercicios prácticos de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

  Vídeo 2: Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales con matlib

  Vídeo 3: Matrices y sistemas de ecuaciones lineales con RSymPy

  Vídeo 4: Ejercicios de Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

3.5.1. Etapa de diseño

Con respecto al diseño de los vídeos tutoriales de la propuesta didáctica, se considerón los siguientes contenidos:

- **Vídeos tutoriales sobre el uso de *R* y *RStudio:*** Los contenidos abordó la descarga e instalación de los softwares *R* y *RStudio* para el sistema operativo Windows, la utilización de la consola de *R,* la utilización del lenguaje de *R* básico, la utilización del entorno integrado *RStudio,* componentes de RStudio, *datos* en forma de vectores en *R,* instalación y lectura de paquetes desde *RStudio,* gráficos en *RStudio* y la utilización de *Rscip* para guardar información. En esta etapa se consultaron fuentes relacionadas al uso de *R* para la selección o diseño de ejercicios enfatizando la utilización del lenguaje de programación *R*.
- **Vídeos tutoriales para el uso de paquetes de *R:*** Se utilizan funciones de *R* para ingresar matrices, efectuar operaciones de matrices*,* matriz identidad y matriz diagonal*,* transpuesta de matices en *R*, operaciones sobre las filas de una matriz en *R*, matriz inversa y el error que proporciona por *R* cuando la matriz no posee inversa, solución a los sistemas de ecuaciones lineales y los tipos de errores que proporciona

R cuando el sistema no posee solución o posee solución dependiendo de parámetros y determinantes de matrices. Utilización del paquete *MASS* para visualizar las entradas de las matrices en forma de fracción. Utilización del paquete *matlib* para visualizar los procedimientos en la solución de sistemas de ecuaciones por medio del método de Jordan-Gaus, inversa de matrices. Utilización del paquete *rSymPy* para definir variables en *R*, lenguaje de programación de SymPy para los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Se escogerán ejercicios prácticos de libros o material de Álgebra Lineal, relacionados a los temas de matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes, para ejemplificar la utilización de paquetes y funciones.

- **Vídeos tutoriales de la aplicación de *R* para problemas de Álgebra Lineal:** Se escogieron cuatro problemas de la propuesta didáctica que involucren para su solución la utilización de *R* y *RStudio*.

Para cada uno de los vídeos tutoriales se elaboró una guía detallada con los procedimientos, la cual abarcara los siguientes aspectos:

- Título de video.
- Objetivo del video.
- Explicación introductoria del video.
- Enunciados de ejercicios y problemas.
- Solución de ejercicios por medio de la utilización de *R* y *RStudio.*

3.5.2. Etapa de producción

Para el caso del estudio se utilizaron las herramientas para la elaboración de los vídeos tutoriales denominadas software *R* versión 3.4.0. o superior, *RStudio* cualquier versión, paquetes *matlib, rSymPy, MASS* y *Knirt* de *R*, capturado gráfica de video *Microsoft Expression Encoder 4* versión *4.0.1651.0* y editor de vídeos *Movie Maker.*

3.5.3. Epata de evaluación

Para efecto de la elaboración de la propuesta didáctica, se consideró los siguientes criterios para definir los expertos:

- Profesor que imparta lecciones en cualquier universidad pública y que utilicen el software *R* en sus lecciones.

- Profesor de matemática que imparten lecciones en cualquier universidad pública e imparta algún curso de Álgebra Lineal en carreras relacionadas a la enseñanza de la matemática.
- Profesor de matemática que imparta lecciones en cualquier universidad pública y haya impartido cursos de Álgebra Lineal de servicio por tres ciclos consecutivos.
- Profesor de matemática que imparta lecciones en cualquier universidad pública y que implemente vídeos en la metodología de enseñanza de cualquier curso relacionado a la matemática.
- Profesor de matemática que imparte lecciones en cualquier universidad pública y utilice algún software en la metodología de enseñanza en cursos de matemáticas.
- Profesor de matemática que imparte lecciones en cualquier universidad pública y posea conocimientos sobre el enfoque por competencias.

Se consideró la evaluación de los vídeos tutoriales por parte de tres expertos que cumplieron con uno de los criterios descriptos anteriormente. Además, se evaluaron las guías de cada uno de los vídeos tutoriales y la versión preliminar para ser mejorada.

3.6. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Para la evaluación de vídeos tutoriales, se dispone lo que se describe seguidamente.

Los instrumentos para la evaluación de vídeos, Dorrego (1994) recomienda la utilización de listas de cotejo o escalas de valoración, las cuales serán puntuadas por los expertos utilizando la técnica de observación, además considera que el investigador debe definir un criterio de puntuación cuando se utilizan escalas de valoración, esto para las correcciones que se van a realizar a los vídeos.

Beaudin y Quick (1996) establecieron algunos criterios para evaluar los vídeos, los cuales son:

- La precisión del contenido.
- Utilidad de los contenidos del video.
- Introducción motivadora del video.
- Presentación del contenido.
- Comprensión del video.

- Evita contenido no relacionado con los temas establecidos.
- El video cumple con los objetivos de aprendizaje y las necesidades del estudiante.
- El video promueve el aprendizaje activo.
- Se integra fácilmente el video con el aprendizaje.
- Características generales del diseño de video como calidad visual y de audio.
- Vocabulario apropiado.
- Material suplementario.
- Información introductoria.
- Resume el contenido del video.

Para la elaboración del cuestionario, se adaptaron algunos de los criterios propuestos por Beaudin y Quick (1996) y el cuestionario de evaluación está conformado por cuatro calificaciones, las cuales corresponden a 1. Completamente en desacuerdo; 2. En desacuerdo; 3. De acuerdo y 4. Completamente de acuerdo. Se corregirá el criterio de observación que puntúen 1 y 2 en los vídeos tutoriales.

Además, se establecieron otros criterios relacionados con la incorporación del entorno *R* en la propuesta didáctica, la cuál será evaluada por los expertos que evaluarán los vídeos tutoriales, una vez culminada la propuesta didáctica.

3.7. Fuentes de información

Se considera importante para la realización de la propuesta de investigación, la consulta de fuentes documentales y la información que puedan aportar individuos cercanos al fenómeno en estudio.

Las fuentes documentales que se considerarán necesarias para la elaboración de la investigación son:

- Plan de estudio *BLEM-2017.*
- Textos de referencia para cursos de Álgebra Lineal.
- Libros, guías u otro documento para la utilización del entorno *R.*
- Investigaciones que aborden problemáticas de aprendizaje y detección de errores en Álgebra Lineal.
- Docentes de matemáticas que imparten clases en universidades públicas.

Capítulo IV: Resultados y Análisis

4.1 ANÁLISIS DE CONTENIDO

En este apartado, se abordó el análisis conceptual, que corresponde a una de las etapas del análisis didáctico. Se analizaron los libros de referencias propuestos en los descriptores de cursos de servicios de Álgebra Lineal y cursos propios de carreras relacionadas a la enseñanza de la matemática de universidades públicas de Costa Rica.

4.1.1 APROXIMACIÓN CURRICULAR

Zais (1976), citado por Angulo (1994), señala que la concepción de currículo se puede dar de dos formas que son considerar al plan de estudio y al seguimiento de un programa específico para impartir lecciones, en los que se propician la enseñanza y aprendizaje; mientras que la otra concesión es el currículo como campo de estudio.

Para Pizano (1998), el currículo es "uno de los instrumentos de la educación formal cuyo objetivo fundamental es: concretar en términos de aprendizaje la concepción de educación asumida por un país en un momento histórico" (p. 7).

Por otro lado, uno de los aspectos que considera el plan de estudio BLEM-2017 es el desarrollo de los ejes curriculares que corresponden a la Historia de la matemática, al Pensamientos lógico matemático, al Pensamiento pedagógico, a la investigación y al uso de las TICs. Todo ello por medio del enfoque por competencias (Escuela de Matemática UNA, 2017), estas últimas entendidas como las habilidades propuestas por el MEP en el programa de estudio de matemáticas. (MEP, 2012)

4.1.2. Enfoque por competencias

En este apartado se destaca la visión del término competencia, visto desde la visión formativa y laboral. Para Cano (2005), citado por López (2013), las competencias se dan en el ámbito laboral desde el desarrollo de habilidades para desenvolvimiento de forma eficaz y eficiente de alguna tarea o actividad, para lo que se le da capacitación y entrenamiento al personal.
La otra visión corresponde a las competencias formativas. López (2013) menciona que:

> Las competencias vistas desde la perspectiva formativa se consideran desde un encuadre más amplio, en el que junto con la reflexión y el análisis se pretende desarrollar en los alumnos un conjunto de saberes secuenciados, situados y

> contextualizados que inciden directamente en su formación a largo de su vida, bajo un enfoque del movimiento del desarrollo humano. (p. 34)

Además, Pizano (1998) menciona que “las competencias en términos pedagógicos son adquisiciones de habilidades, destrezas, conocimientos y actitudes, que dan la capacidad para actuar con eficiencia, eficacia y satisfacción en relación consigo mismo y al medio natural y social” (p. 8).

En cuanto al plan BLEM-2017, González y Wagenaar (2003), citado por la Escuela de Matemática, (2017), establece la concepción de competencia como:

> La combinación dinámica de atributos (con respecto al conocimiento y sus aplicaciones, aptitudes, destrezas y responsabilidades) que describen los resultados del aprendizaje de un determinado programa o cómo los estudiantes serán capaces de desenvolverse al finalizar el proceso educativo (…) “conocer y comprender (conocimiento teórico de un campo académico, la capacidad de conocer y comprender), saber cómo actuar(la aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones), saber cómo ser(los valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en contexto social). (pp.59-60)

Por su parte, López (2013) menciona, con respecto al desarrollo de competencias, la identificación de evidencias para darse el desarrollo de actividades y tareas, además considera que el conocimiento puede ser superficial o profundo. El conocimiento superficial puede ser instruido y se vincula con los saberes de conceptos o materia, mientras que el conocimiento profundo corresponde a aquellos conocimientos que utilizan las personas expertas en un campo determinado para resolver problemas que son difíciles de transmitir a las demás personas.

Entre las actividades didácticas para el desarrollo de competencias, Estrada (2016) propone tareas como ensayos, resúmenes, investigación, proyectos, foros de discusión, presentación multimedia, uso y aplicación de herramientas informáticas.

Según Pizano (1998) para propiciar el currículo por competencias se debe desarrollar:

> El dominio de un conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que garanticen un desempeño eficiente; Responder con eficacia y satisfacción a las necesidades y Estímulo que provienen del medio natural, controlándolo activamente y resolver acertadamente en la interacción con los demás. (p. 10)

Por ello, para la planificación de lecciones, siguiendo a Tobón, Pimienta y García (2010), se propone la elaboración de secuencias didácticas para fomentar el desarrollo de competencias.

Tobón et al. (2010) mencionan que:

> Las secuencias didácticas son, sencillamente, conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos. En la práctica, esto implica mejoras sustanciales de los procesos de formación de los estudiantes, ya que la educación se vuelve menos fragmentada y se enfoca en metas. (p. 7620)

Por ello, se incorporaron actividades relacionadas con los contenidos de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales con el propósito de que puedan ser utilizadas o adaptarlas en curso MAC411 Álgebra Lineal.

4.1.3. Curso MAC411 Álgebra Lineal

Según el programa de estudio BLEM-2017, el curso MAC411 Álgebra Lineal forma parte del III nivel de la carrera de Bachillerato de la Enseñanza de las Matemáticas de la UNA. Las competencias específicas de matemáticas que se establecen para el curso, son las siguientes

- Comprender los conceptos básicos de la matemática superior desde una perspectiva universitaria para su formación como docente de matemática.
- Ser capaz de formular problemas en lenguaje matemático durante su actividad como estudiante para fortalecer sus estructuras de pensamiento.
- Entender los conceptos fundamentales de la matemática a través de su evolución socio-histórica para la comprensión de la disciplina y su enseñanza en diferentes contextos.
- Construir e interpretar modelos matemáticos a partir de situaciones reales para reconocer la importancia de la matemática en la vida cotidiana.
- Aplicar los conocimientos sobre Resolución de Problemas en contextos multidisciplinares para mayor comprensión de su importancia en otras áreas científicas y sociales. (pp. 237-238):

Por otro lado, según el descriptor del curso, se contemplan los temas de álgebra matricial, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, espacios vectoriales de dimensiones finitas, transformaciones lineales y el cálculo de valores y vectores propios. En la tabla 2 se muestra el desglose de las áreas temáticas de los temas de álgebra matricial, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes con sus respectivas subcompetencias a desarrollar por temas.

Tabla 6: Temáticas subcompetencias desarrollados en los temas de Álgebra matricial, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes

Área temática	Subcompetencia
Álgebra matricial	
Concepto de matriz, Igualdad de matrices. Operaciones con matrices: suma, resta, producto por escalar y producto de matrices. Tipos de matrices: identidad, diagonal, nula, triangular superior, triangular inferior, escalonada, escalonada reducida, rango de una matriz, transpuesta, idempotente. Propiedades de la transpuesta. Operaciones sobre las filas y columnas de las matrices. Matrices equivalentes. Matrices invertibles y sus propiedades.	Conocer el concepto de matriz y el de igualdad de matrices. Operaciones con matrices respetando las dimensiones de las matrices. Demostrar identidades matriciales usando la igualdad de matrices. Reconocer los diferentes tipos de matrices. Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado. Componente histórico sobre el origen y aplicaciones de las matrices. Usar las propiedades relacionadas a los diferentes tipos de matrices en contextos teóricos y prácticos. Demostrar teoremas relacionados. Calcular inversas de matrices invertibles.

Sistemas de ecuaciones lineales	
Definición de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Solución y conjunto de soluciones del sistema. Sistemas homogéneos y no homogéneos. Sistemas equivalentes. Matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales, matriz aumentada. Métodos de solución: Método de eliminación gaussiana y de Gauss-Jordán. Planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales relacionadas a problemas de la vida real. Rango de una matriz asociado a la solución de un sistema de ecuaciones lineales.	Construir e interpretar modelos matemáticos sobre sistemas de ecuaciones lineales a partir de situaciones reales para reconocer la importancia del Álgebra Lineal en la vida cotidiana. Resolver sistemas de ecuaciones lineales. Expresar, en forma apropiada, el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Componente histórico sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Aplicar los métodos de solución: eliminación gausiana y Gauss-Jordan en la solución de sistemas de ecuaciones. Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado. Determinar el rango de una matriz.
Determinantes	
Definición de determinante de una matriz cuadrada de dos. Definición recursiva de una matriz de orden mayor o igual a tres. Propiedades del determinante. Cálculo del determinante para una matriz de orden n. Regla de Cramer.	Demostrar teoremas sobre determinantes y calcular determinantes usando la definición y sus propiedades. Resolver sistemas de ecuaciones cuadrados usando la Regla de Cramer.

Relación entre invertibilidad de una matriz y su determinante. Relación con sistemas de ecuaciones lineales cuadrados.	Demostrar la invertibilidad de una matriz conociendo su determinante. Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado.

Nota: Escuela de Matemática de la UNA (2017, pp.238-241).

4.1.4. APROXIMACIÓN DIDÁCTICA

Se consideró la didáctica como una ciencia que se ocupa de las problemáticas relacionadas a la enseñanza y el aprendizaje (Hernández y Caballero, 2009) y como un proceso guiado por el docente para facilitar el aprendizaje en los estudiantes. (Ander-Egg, 2014)

En los estudios desarrollados en el campo de la didáctica, en cuanto la materia de Álgebra Lineal, acentúan:

- La utilización de software como ejemplo los trabajos desarrollados por Vílchez (2015a), Vergara et al. (2016), Rosales (2010), Lay (2013), Kolman y Hill (2006), entre otros, en los que se explican cómo utilizar diversos softwares para Álgebra Lineal.
- La modelación matemática como ejemplo problemas aplicados propuestos por Lay (2013).
- Y la utilización de materiales elaborados por docentes que imparten el curso.

4.1.5. Recursos didácticos

Cuando se trata del término recurso didáctico, se suele relacionar con el término “medio didáctico”, sin embargo, no se trata de lo mismo.

Los materiales didácticos son aparatos o documentación que ayudan a los procesos de enseñanza-aprendizaje (Ogalde y Bardavid, 2008), mientras que “un recurso didáctico es cualquier material que puede ser empleado con un propósito educativo” (Rojas y Sequeira, 2015, p. 28).

A manera de ejemplo, se puede utilizar un software computacional para enseñar algún tema, para este caso el medio didáctico es la computadora, ya que no se podría utilizar el software sin la computadora y el software juega el papel de recurso didáctico.

Para la elaboración de la propuesta, el software *R* en conjunto con los vídeos tutoriales juegan un papel como recursos didácticos.

4.1.6. Las tecnologías de la información y comunicación (TIC)

Las TIC's están conformadas por todas aquellas herramientas tecnológicas que se encuentran en la sociedad de la información. (Servicio Público de Empleo Estatal, citado por López, 2014)

Crovi (2002), señala que "de manera general entiendo por sociedad de la información (…) a una sociedad caracterizada por un modo de ser comunicacional que atraviesa todas las actividades (industria, entretenimiento, educación, organización, servicios, comercio, etc.)" (p. 16).

Las TIC implican un cambio a los procesos pedagógicos, con el fin de adaptar las tecnologías a la enseñanza de las nuevas generaciones, además las TIC fomentan nuevas prácticas educativas (OREALC y UNESCO, 2013).

En particular, las TIC's son un potencial en las lecciones de matemáticas. En este sentido la UNESCO (2005) menciona que:

> Las TIC estimulan el aprendizaje de las matemáticas experimentales a través de la experimentación, ya que permite a los alumnos dibujar gráficas a partir de funciones y verificar las relaciones en las configuraciones geométricas cambiando parámetros, como la posición de un punto, simplemente arrastrándolos con el ratón. (p. 145)

Como las TIC's engloban diferentes herramientas tecnológicas, y que, por las nuevas tecnologías que pueden surgir, se limita el desarrollo de las tecnologías a utilizar en la propuesta didáctica.

4.1.7 APROXIMACIÓN MATEMÁTICA

En este apartado se mencionan las definiciones sobre matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes encontradas en libros de referencias sobre Álgebra Lineal.

2.4.1 Álgebra Lineal

Isaacs y Sabogal (2009) mencionan que el Álgebra Lineal

> Se ocupa de ciertas estructuras llamadas espacios lineales o vectoriales, e investiga de qué manera ellos se interrelacionan mediante las llamadas transformaciones lineales; comprende además el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y de las matrices. (p. 3)

En cuanto, el curso de Álgebra Lineal (MAC 411) del plan BLEM-2017, se abordan los temas de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, espacios vectoriales de dimensión finita, transformaciones lineales y cálculo de valores y vectores propios.

4.1.6.1 Definición de matriz

Arce, Castillo y Gonzáles (2003) desarrollan la siguiente definición para matrices:

> *Sean m y n enteros positivos. Un arreglo rectangular en m filas y n columnas de números reales:*
>
> $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
>
> *Se llama matriz de orden (o tamaño) $m \times n$ sobre$\mathbb{R}$.*
>
> *En forma abreviada se escribe $A = (a_{ij})_{m \times n}$ donde a_{ij} denota la entrada de A en la fila i y la columna j.* (p. 49)

Por su parte González (s.f.) destaca la siguiente definición:

> *Se define una matriz de tamaño $n \times p$, con $n, p \in \mathbb{N}$, a toda aplicación de $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$ en un campo $\mathbb{K}$ y se acostumbra a escribir como $M = (a_{ij})$, donde a_{ij} es la entrada en la posición (i, j) de la matriz.*

4.1.6.2.Definición de sistemas de ecuaciones lineales

Definición propuesta por Arce, Castillo y Gonzáles (2003):

> *Un sistema de n ecuaciones lineales y m incógnitas $x_1, \dots, x_m$, se escribe en la forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

donde los números a_{ij} *y* b_i *son conocidos. El símbolo* a_{ij} *denota el coeficiente en la ecuación* i *asociado a la variable* j. (p. 6)

Definición propuesta por González (s.f.):

Sean m, n *números naturales. Se llama sistema de m ecuaciones y n incógnitas (o sistema lineal), con coeficientes en un campo* $\mathbb{K}$, *a la expresión*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

con $1 \leq i \leq m$

Si desarrollamos la suma anterior, se expresa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

4.1.6.3.Definición de determinante

Se resume la definición de determinante propuesta por Barrantes (2012):

Sea $J_n = \{1,2,3, \dots, n\}$, *se define una permutación de* J_n, *como cualquier función biyectiva de* J_n, *representada por* $\sigma: J_n \to J_n$.

Si $A = (a_{ij})$ *es una matriz cuadrada de orden n, se define el determinante de A, como el producto de todas las permutaciones posibles.*

Grossman y Flores (2012) primero definen determinante para una matriz cuadrada de tamaño 2×2, luego para una de tamaño 3×3 y por último define el determinante para el caso general. Los autores proponen lo siguiente:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. *Se define el determinante de A como*

$$|A| = det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. *Entonces*

$$|A| = det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Menor principal: Sea A una matriz de $n \times n$ *y sea* M_{ij} *la matriz de* $(n-1) \times (n-1)$ *que se obtiene de A eliminando el reglón i y la columna j.* M_{ij}*se llama el menor* ij *de* A.

Cofactor: Sea A una matriz de $n \times n$. *El cofactor* ij *de A, denotado por* A_{ij}, *está dado por*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Sea A una matriz de $n \times n$. *Entonces el determinante de A, denotado por* $det\ (A)$ *o* $|A|$, *está dado por*

$$det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \ \ (p. 185)$$

4.1.7. Revisión del Programa de Estudio

En este apartado se mencionan aquellas habilidades y competencias adquiridas por los estudiantes en el transcurso de la educación general básica y los cursos del BLEM-2017, los cuales son una base importante para el desarrollo de las habilidades propuestas en el curso MAC 411 Álgebra Lineal.

Revisión Programas de Estudio Matemáticas III de Educación General Básica

En octavo año de la Educación General Básica y en la asignatura de matemáticas, se abordan los temas de función lineal y la resolución de ecuaciones lineales.

Entre las habilidades específicas desarrolladas en el nivel de octavo de la educación secundaria se encuentran:

“Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma y = ax+ b.”(MEP, 2012, p. 331,)

“Representar de forma tabular, algebraica y gráficamente una función lineal.” (MEP, 2012, p. 332)

“Identificar la diferencia entre una expresión algebraica y una ecuación.” (MEP, 2012, p. 335)

“Comprobar si un número dado es solución de una ecuación.” (MEP, 2012, p. 335).

“Reducir una ecuación a otra que es equivalente a ella.” (MEP, 2012, p. 335).

“Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita.” (MEP, 2012, p. 335).

“Relacionar una ecuación de primer grado con una incógnita de la forma ax + b = c con la función lineal cuya representación algebraica es y = ax + b” (MEP, 2012, p. 336).

“Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.” (MEP, 2012, p. 336).

“Resolver ecuaciones algebraicas fraccionarias que se reducen a ecuaciones del primer grado con una incógnita.” (MEP, 2012, p. 336).

“Resolver ecuaciones literales para una de las letras.” (MEP,2012, p. 336).

Programas de Estudio Matemáticas Educación Diversificada

En el undécimo año del ciclo diversificado, se continúa con el estudio del tema de función lineal y se introduce el tema de sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos variables. Entre las habilidades específicas desarrolladas en el ciclo diversificado, se encuentran:

“Representar gráficamente una función lineal.” (MEP, 2012, p. 410)

“Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.” (MEP, 2012, p. 410)

“Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.” (MEP, 2012, p. 410)

“Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.” (MEP, 2012, p. 412)

“Relacionar la representación gráfica con la algebraica.” (MEP, 2012, p. 412)

“Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.” (MEP, 2012, p. 412)

“Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.” (MEP, 2012, p. 412)

Además, el programa de estudio del MEP (2012), plantea indicaciones puntuales para el tema de sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2, que indican:

Trabajar con sistemas de la forma $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ y utilizar los métodos de sustitución, igualación, suma y resta y de forma gráfica. (MEP, 2012, p. 412)

Se sugiere proponer sistemas con solución única, solución vacía y con infinitas soluciones. Enfatizar el significado gráfico de cada uno de los tres casos que son las rectas que se intersecan en un punto, rectas paralelas que no se intersecan y rectas coincidentes. (MEP, 2012, p. 412)

Revisión BLEM-2017

En este apartado se mencionan las subcompetencias establecidas en la primera versión del Plan de estudio BLEM-2017, que son consideradas para la elaboración de la propuesta didáctica. Se destacan habilidades desarrolladas en los cursos MAC400 Matemática Fundamental, MAC404 Recursos Informáticos y MAC408 Geometría Analítica.

Subcompetencias consideradas del Curso MAC400 Matemática Fundamental

Tema: Ecuaciones lineales

"Resolver ecuaciones e inecuaciones de cada tipo." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.10)

"Resolver ecuaciones e inecuaciones lineales y cuadráticas con parámetros." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

"Construir y expresar adecuadamente el conjunto solución (distintas representaciones)." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

"Interpretar los resultados obtenidos a partir de la resolución de una ecuación o una inecuación (distintas representaciones)". (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

"Identificar el tipo de ecuación e inecuación a resolver." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

"Identificar errores en procedimientos dados." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

"Identificar situaciones cotidianas o matemáticas que puedan ser modeladas por medio de una ecuación o inecuación, plantearla y resolverla." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

"Conocer el desarrollo histórico de la resolución de ecuaciones." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

"Conocer los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

Tema: Sistemas de ecuaciones lineales

"Resolver sistemas de ecuaciones e inecuaciones." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

"Interpretar los resultados obtenidos al resolver un sistema de ecuaciones o inecuaciones en sus distintas representaciones." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106)

"Identificar situaciones cotidianas que puedan ser resueltas por medio de un sistema de ecuaciones o inecuaciones." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.106-107)

Subcompetencias consideradas del Curso MAC404 Recursos Informáticos

Competencia: Estructuras básicas de programación. Comandos básicos. Programación básica: Estructuras condicionales y Estructuras de ciclos. Funciones para cálculos con polinomios. Cálculo simbólico. Vectores de tamaño n y de tamaño nxm. Uso de ficheros. Funciones (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.148).

Subcompetencias: Conocer comandos y funciones básicas para programación. Conocer las estructuras básicas de programación en el entorno de trabajo. Diseñar rutinas de programación con ciclos para resolver ejercicios afines a temas matemáticos. (Escuela de Matemática UNA, 2017, p.148)

Como observación, en la modificación del 2021 del Plan de Estudio PLEM-2017 el curso MAC404 Recursos Informáticos, se replanteó el curso en cuanto competencias y subcompetencias.

Subcompetencias consideradas del Curso MAC408 Geometría Analítica

"Conocer y comprender el sistema de coordenadas rectangulares". (Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 207)

"Conocer y comprender las nociones del espacio tridimensional, puntos en el espacio."(Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 207)

"Conocer y comprender las nociones de vectores en el plano y el espacio." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 207)

"Conocer y aplicar las operaciones de suma, resta, multiplicación por un escalar y producto escalar de vectores y su respectiva representación geométrica." (Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 207)

“Demostrar las propiedades de las operaciones con vectores” (Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 207)

“Conocer y aplicar el producto vectorial, producto mixto y sus interpretaciones geométricas.” (Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 207)

“Demostrar las propiedades analíticas y geométricas del producto vectorial y producto mixto Conocer, identificar y aplicar las distintas representaciones de la recta en el espacio.” (Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 207)

“Conocer, identificar y aplicar las distintas representaciones del plano.” (Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 207)

“Conocer y aplicar las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas, planos, rectas y planos.” (Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 207)

4.1.8. Análisis de Referencias

Se delimitó la cantidad de referencias consultadas relacionadas a la materia de Álgebra Lineal, esto debido a la gran cantidad existente. Se escogieron las referencias que recomienda el descriptor del curso MAC411 Álgebra Lineal del BLEM-2017 que considera el plan de estudio BLEM-2017. En la tabla 7, se muestran las referencias, propuestas en el BLEM-2017 para el curso.

Tabla 7: Referencias contempladas en el descriptor del curso MAC411

Autor	Nombre de la referencia	Año
Anton, H.	Introducción al álgebra lineal	2002
Apostol, T.	Cálculo. Segunda edición	1985
Arce, C.	Álgebra Lineal	2002
Barrantes, H.	Elementos de Álgebra Lineal	2012
Bernard, C.	Álgebra Lineal con aplicaciones y Matlab	1999
Del Valle, J.	Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias	2012
Grossman, S.	Álgebra lineal con aplicaciones	1996
Grossman y Flores	Álgebra lineal	2012
Hill. R.	Algebra lineal elemental con aplicaciones	1997
Lay, D.	Álgebra Lineal Elemental y sus Aplicaciones	2013
Lay, D.	Álgebra Lineal para cursos con enfoque por competencias	2013
Lipschutz, S.	Algebra Lineal	1968
Mostow, G. y Sampson, J.	Algebra lineal	1969
Nering, E.	Álgebra lineal y teoría de matrices	1977
Noble, B.	Algebra lineal aplicada	1989
Vílchez, E.	Álgebra Lineal apoyada con Mathematica	2012

Nota: BLEM-2017 (Escuela de Matemática UNA, 2017, p. 245)

Además, se consultaron referencias adicionales relacionadas a la historia de la matemática y a la utilización del software R en la enseñanza.

Orden de temas en textos de Álgebra Lineal

Primero se realizó un análisis del orden de cómo aparecen los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales en las referencias consultadas. El orden de los temas en listados en orden cronológico se presenta a continuación:

- En el libro Introduction to higher algebra de Bocher (1907); según Luzardo y Peña (2006) es uno de los primeros libros de Álgebra Lineal en el siglo XX. En el libro de

Bocher (1907) se presenta en el segundo capítulo el tema de determinantes, el cuarto ecuaciones lineales y en el capítulo cinco presenta el tema de rango de una matriz. Para el tema de determinantes se define primero el termino de matriz antes de los resultados de determinantes.

- Hoffman y Kunze (1971), presentan primero el tema de Ecuaciones Lineales, el cual incluye también el desarrollo de matrices y por último determinantes.
- Lang (1990) primero desarrolla el tema de vectores y, conjuntamente, presenta el tema de matrices y ecuaciones lineales y, por último, el de determinantes.
- En el libro de Pita (1991) se presenta primero el tema de sistemas de ecuaciones lineales, después el de matrices y, por último, determinantes.
- Por su parte Anton (1994), desarrolla los temas de sistemas de ecuaciones y matrices conjuntamente; luego el de determinantes.
- Apóstol (2001) posee un capítulo que desarrolla conjuntamente los temas de transformaciones lineales y matrices.
- Kolman y Hill (2006) desarrolla conjuntamente el tema de ecuaciones lineales y matrices y, por último, determinantes.
- Lipschutz y Lipson,(2009) primero introducen el tema de vectores, luego álgebra de matrices. Posteriormente sistemas de ecuaciones lineales y, por último, determinantes.
- Axler (2015) desarrolla los temas de matrices y determinantes conjuntamente.
- Del Valle (2011) presenta primero el tema de matriz, luego sistemas de ecuaciones lineales y, por último, desarrolla conjuntamente el tema de inversa de matrices y determinantes.
- Beezer (2011) desarrolla primero el tema de sistemas de ecuaciones lineales, luego vectores y, posteriormente, el de matrices y por último determinantes
- En el texto de Lay (2012, 2013) presenta el orden de Ecuaciones lineales, Álgebra de matrices y determinantes. Además, en el tema de ecuaciones lineales se presenta el tema de transformación lineal y la matriz asociada a la transformación lineal.
- Grosman y Flores (2012). Presenta sistemas de ecuaciones lineales, vectores y matrices desarrollados conjuntamente y por último el tema de determinantes
- Páez (2013) desarrolla matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

- Friedberg, Insel y Spence (2014) desarrolla conjuntamente el tema matriz y trasformaciones lineales, luego operaciones elementales de matrices. Posteriormente, sistemas de ecuaciones lineales y, por último, determinantes.
- Arce, Castillo y González (2014) desarrollan primero el tema de sistemas de ecuaciones lineales, luego matrices y determinantes.
- Mora et al (2018) desarrollan los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

Con las referencias consultadas, se evidencia que existen distintos enfoques de enseñar los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Esto en parte por la utilización de teoremas que vinculan los temas de matrices, determinantes y caracterización de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, lo que permite una flexibilidad en el orden de enseñar los temas.

Definición de Matriz

En la revisión de los libros de Álgebra Lineal, se identificaron las siguientes estrategias para introducir la definición de matriz:

- Hacer referencia a la definición de vectores.
- Introducir un ejemplo aplicado de matrices con datos de algún contexto.
- Solo se menciona la definición y se dan ejemplos.
- No hay apartado propio para el tema de matrices, pero se utilizan en el tema de sistemas de ecuaciones lineales (matriz de coeficientes de un sistema de ecuación lineal o matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales).
- No hay apartado para el tema de matrices, pero se utilizan en el tema de transformaciones lineales (matriz de una transformación lineal).
- La mayor parte de los libros definen el término de matriz como un arreglo rectangular de valores.

Como observa de lo mencionado anteriormente, se encuentran las siguientes formas de introducir el tema de matrices:

Libro Álgebra Lineal de Grossman y Flores (2012)

Se introduce la definición de matriz por medio de vectores, la cual se muestra a continuación:

Vector reglón de n *componentes: Un vector de* n *componentes se define como un conjunto ordenado de* n *números escritos de la siguiente manera:* $(x_1, \cdot\cdot\cdot, x_n)$. *Vector columna de* n *componentes: Un vector columna de* n *componentes es un conjunto ordenado de* n *números escritos de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ (Grossman y Flores, 2012, p.46)

Matriz: Una matriz A de $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ *es un arreglo rectangular de* mn *números dispuestos en m reglones y n columnas*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

... El vector reglón $(a_{i1}, a_{12}, \ldots, a_{in})$ *se le llama reglón i y el vector columna* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *se le llama columna j. La componente o elemento i de A, denotado por* a_{ij} *es el número que aparece en el renglón i y la columna j de A. En ocasiones se escribirá la matriz A como* $A = (a_{ij})$ *(Grossman y Flores, 2012, p. 48-49).*

Libro Matrices y sus aplicaciones de Acuña (2014)

En este libro introduce la definición de matriz en un contexto con datos. La propuesta hecha por Acuña (2014) es la siguiente:

Las matrices son una forma de notación matemática, que permite representar de manera compacta conjuntos de valores que, por su naturaleza, pueden organizarse tubularmente. Por ejemplo, la información en el cuadro.

Puede resumirse, si los encabezados se sobreentienden, con la notación

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 & 13 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Definición (matriz): Una matriz es un arreglo rectangular de números[1]. Los elementos de una matriz se organizan en filas (horizontales) y columnas (verticales)…

"1 En realidad esto define una matriz de números. También hay matrices de funciones, matrices de polinomios y otros tipos de matrices." (Acuña, 2014,p.53)

Libro Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal de Apostol (2001)

En esta referencia se proporciona una definición matemática para matriz y es utilizada para el tema de transformaciones lineales.

El teorema 16.12 demuestra que una transformación lineal $T : V \to W$ de un espacio lineal de dimensión finita V está determinada por su acción sobre un conjunto dado de elementos base $e_1, \cdots, e_n$. Supongamos ahora que el espacio W también es de dimensión finita, por ejemplo $dimW = m$, y sea $w_1, \cdots, w_n$ una base para W. (Las dimensiones n y m pueden ser o no iguales.) Puesto que T tiene los valores en W, cada elemento $T(e_k)$ puede expresarse, con unicidad, como una combinación lineal de los elementos de la base $w_1, \ldots, w_n$, por ejemplo $T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik}\, w_i$ donde $t_{1k}, \cdots, t_{mk}$ son los componentes de $T(e_k)$ respecto a la base ordenada $(w_1, \ldots, w_m)$...

Dispondremos verticalmente la m-pla $(t_{1k}, \cdots, t_{mk})$ como a continuación se indica: $\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \vdots \\ t_{mk} \end{bmatrix}$

Esto se llama vector columna o matriz columna. Tenemos una tal columna para cada uno de los n elementos $T(e_1), \cdots, T(e_n)$. Colocándolas una junto a otra y encerrándolas en un par de corchetes obtenemos la disposición rectangular siguiente:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}$$

Este cuadro se le llama matriz y consta de m filas y n columnas. La llamamos matriz m × n. (Apostol, 2012, p. 726-727)

El teorema que hace referencia en el libro es el siguiente:

Sea $e_1,\cdot\cdot\cdot,e_n$ una base para un espacio lineal n-dimensional V. Sean $u_1,\cdot\cdot\cdot,u_n$ elementos arbitrarios de un espacio lineal W. Existe entonces una y sólo una transformación

$T : V \rightarrow W$ tal que $T(e_k) = u_k$ para k = 1, · · · , n. (Apostol, 2012, p. 725)

Además, el término de matriz reaparece en espacios lineales de matrices, que se define en el libro para realizar operaciones con matrices.

Hemos visto cómo las matrices se presentan espontáneamente como representaciones de las transformaciones lineales. También se pueden considerar las matrices como elementos existentes con independencia de las transformaciones lineales. Como tales elementos, forman otra clase de objetos matemáticos que pueden definirse por medio de las operaciones algebraicas que pueden realizarse con ellos. La relación con las transformaciones lineales da origen a esas definiciones, pero tal relación será por el momento ignorada. Sean m y n dos enteras positivos y sea Im,n el conjunto de todos los pares de enteros (i, j) tales que $m \leq 1 \leq n$. Cualquier función A cuyo dominio $I_{m,n}$ se denomina matriz m× n. El valor de la función A(i, j) se llama elemento ij de la matriz y se designará también por a_{ij}. Ordinariamente se disponen todos los valores de la función en un rectángulo que consta de m filas y n columnas, del modo siguiente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ *(Apostol,2012, p. 733-734)*

Cada una de las definiciones de matrices consultadas, son de suma importancia para el conocimiento de los estudiantes. Sin embargo, se enfatiza que la definición propuesta en el libro de Apostol (2012), es más compleja y para efectos de ejercicios teóricos y prácticos de la propuesta didáctica, no se utiliza. Dicha definición, solo se menciona.

Definición Sistemas de ecuaciones lineales

La definición presente en las referencias, sobre sistemas de ecuaciones lineales no difiere mucho, por lo cual solo se menciona un resumen de cómo se presenta.

Libro Algebra Lineal con Aplicaciones de V. Costa, et al. (2015)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$, es un sistema de m ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Donde los coeficientes $a_{11}, a_{12}, \cdots$, amn y $b_1, b_2 \cdots, bm$ son números reales (o en general complejos) conocidos. El sistema puede escribirse también en forma compacta como$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i$, i = 1, · · · ,m (Costa, et al. ,2015)

Libro Práctica del curso Álgebra lineal para computación

En este libro se resume resultados de sistemas de ecuaciones lineales y muestran de forma resumida el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial $An, mX = b$, Mora et al.(2016).

Definición de determinante

Libro Introducción al Álgebra Lineal de Anton (1994)

Anton (2014), presenta la definición de determinantes por medio de permutación en conjuntos con elementos enteros, números de inversiones de una permutación y la clasificación par e impar de la permutación, para justificar como se da la definición determinante.

Una permutación del conjunto de enteros {l , 2, .. . , n } es un arreglo de estos enteros en cierto orden, sin omisiones o repeticiones (p.77).

Para denotar una permutación general del conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$, se escribirá

$(j_1, j_2, \cdots, j_n)$. Aquí, j_1 es el primer entero de la permutación, j_2 es el segundo, etc. Se dice que ocurre una inversión en una permutación $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$, siempre que un entero mayor precede a uno menor. Se puede obtener el número total de inversiones que ocurren en una permutación de la manera siguiente : 1) se encuentra el número

de enteros que son menores que j_1 que siguen a j_1 en la permutación, 2) se encuentra el número de enteros que son menores que j_2 y que siguen a j_2 en la permutación. Se continúa con este proceso de conteo para $j_3, \cdots, j_n$. La suma de estos números será el número total de inversiones en la permutación. (Anton, 1994, p.78)

Se dice que una permutación es por, si el número total de inversiones es un entero par, y se dice que es impar, si el número total de inversiones es un entero impar. (Anton, 1994, p.79)

Considere la matriz $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por producto elemental tomado de A se entiende por cualquier producto tomados de A, sin que dos cualesquiera de ellos provengan del mismo renglón o la misma columna.

Se denomina producto elemental con signo tomado de A a un producto elemental $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ multiplicado por + l o bien, -l. Se utiliza el + si $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ es una permutación par y el - $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ es una permutación impar. (Anton, 1994, p.80)

Sea A una matriz cuadrada. La función determinante se denota por det, y se define det (A) como la suma de todos los productos elementales con signo tomados de A (Anton, 1994, p.81)

Libro de Grossman y Flores

"Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el menor ij de A". (Grossman y Flores, 2012, p.178)

"Cofactor: Sea A una matriz de $n \times n$. El cofactor ij de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$ "(Grossman y Flores, 2012, p. 179)

Sea A una matriz de $n \times n$... Entonces el determinante de A, denotado por det A o |A|, está dado por

$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$ (Grossman y Flores, 2012, p. 181)

4.1.8. Estructura conceptual

Con base en la revisión de las referencias de Álgebra Lineal, se reconocen las notaciones y resultados de los temas de matrices determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, que se muestran en la Tabla 7, a continuación.

Tabla 7: Estructura Conceptual

Término	**Notación**	**Resultado**
Matriz	A $A_{m\times n}$ Arreglo rectangular encerrado con paréntesis redondos. Arreglo rectangular encerrado con paréntesis redondos.	Para realizar operaciones con raíces, se debe tener en cuenta el tamaño.
Elementos de matrices	$A_{ij}, (a_{ij}), [a_{ij}], a_{ij}, \langle a_{ij} \rangle$	La igualdad de matrices.
Orden o dimensión de matrices	$m \times n$ n	Establece cuándo se puede realizar la operación de matrices.
Conjunto de matrices	$M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$	
Matriz Transpuesta	A^T	$(A^T)^T = A$ $(A+B)^t = A^t + B^t$ $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

		$(\alpha A)^T = \alpha\, A^T$
Matriz Inversa	A^{-1}	$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(A^{-1})^{-1} = A$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\, A^{-1}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Operaciones elementales sobre filas	Multiplicación de un escalar sobre una fila $\alpha\, f_i$ $f_i \to \alpha f_i$ Cambio de posición de filas $f_i \leftrightarrow f_j$ $f_i \rightleftarrows f_j$ Operación sobre fila $\alpha f_i + f_j$ $f_j \to \alpha f_i + f_j$ Nota: Se pueden denotar las filas con letras minúsculas o mayúsculas.	Método de reducción por filas Método de eliminación Gaussiana Reducción Gauss Jordan Matrices Equivalentes
Matrices equivalentes	$A \sim B$ $A \to B$	
Matriz elemental	E	
Rango de matrices	$r(A)$	$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}): r(A) \leq m$
Traza de matrices	$tr(A)$	$tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ $tr(\alpha A) = \alpha \cdot tr(A)$ $tr(A^T) = tr(A)$

		$tr(AB) = tr(A) \cdot tr(B)$
Matriz Aumentada	$(A\|I)$ AI	Resultado para encontrar la matriz inversa de cualquier matriz: Si A es una matriz cuadrada equivalente a la matriz identidad, entonces $(A\|I) \sim (I\|A^{-1})$
Sistema de ecuaciones lineales	$AX = b$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_j$ con $j = 1, \ldots, m$	Si A es una matriz invertible, entonces la solución del sistema $AX = b$ es $X = A^{-1}b$ Sistema homogéneo: Forma $AX = 0$ Sistema consistente: Es el sistema de ecuaciones con solución. Sistema inconsistente: Un sistema que no posee solución Sistema cuadrado: Cuando coincide la misma cantidad de variables con soluciones en el sistema. Algunos resultados son: Si $r(A) = r(A\|b)$, entonces el sistema $AX = b$ es consistente $r(A) < r(A\|b) \Leftrightarrow$ el sistema $AX = b$ es inconsistente Aplicación de métodos de reducción de la matriz $(A\|b)$
Determinantes	$\det(A)\,, \|A\|$	Resultados relacionados con las operaciones elementales sobre filas

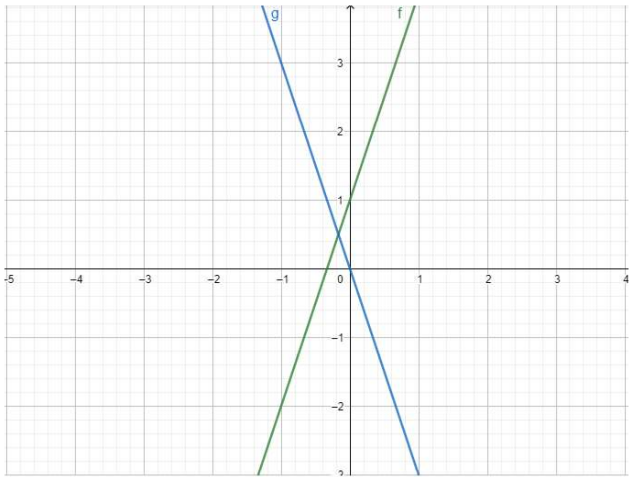
		Si A es una matriz cuadrada, al aplicar la operación sobre fila $\alpha f_i + f_j$, formando la matriz B, entonces $\|B\| = \|A\|$ Si A es una matriz cuadrada, al aplicar un cambio de fila $f_i \leftrightarrow f_j$, formando la matriz B, entonces $\|B\| = -\|A\|$ Si A es una matriz cuadrada, al aplicar la operación sobre fila αf_i formando la matriz B, entonces $\|B\| = \alpha\|A\|$ Resultados relacionados con la inversa de una matriz: A es invertible $\Leftrightarrow \|A\| \neq 0$ Resultados relacionados a la solución de sistemas de ecuaciones lineales: Regla de Cramer para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales Otros resultados: $\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|$

Nota: Elaboración propia, 2022.

4.1.9. Sistemas de representación matricial

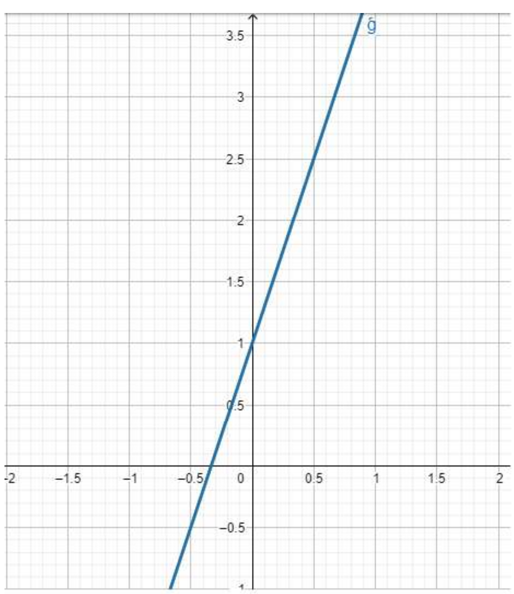
Se pueden representar de forma geométrica los sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2, los cuales representan rectas en el plano cartesiano y pueden poseer solución única que corresponden a un punto (Figura 7). También, un sistema 2x2 puede poseer solución infinita que correspondería geométricamente a tener dos rectas en la misma posición (Figura 8) o bien pueden tener una solución (Figura 9).

Figura 7: Representación geométrica sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2 con solución única.



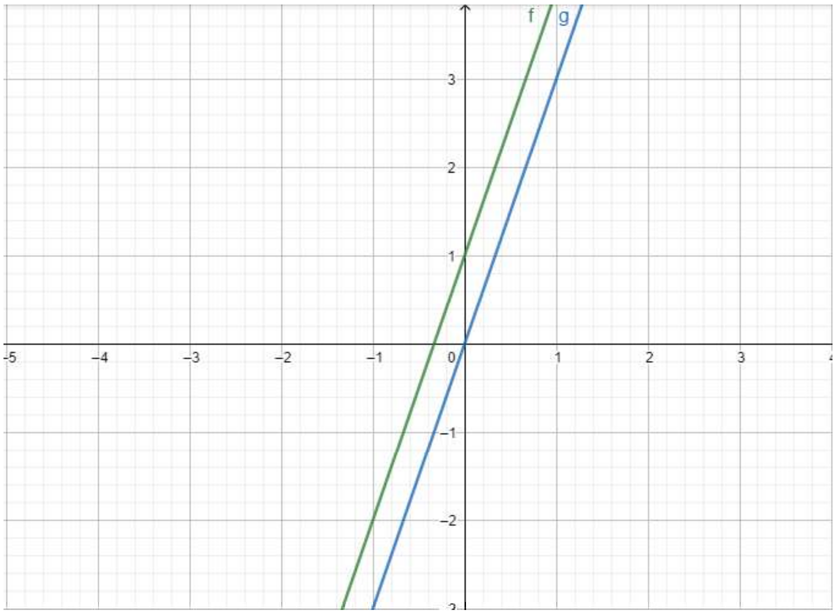
Nota: Elaboración propia, 2022.

Figura 8: Representación geométrica sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2 con solución infinita



Nota: Elaboración propia, 2022.

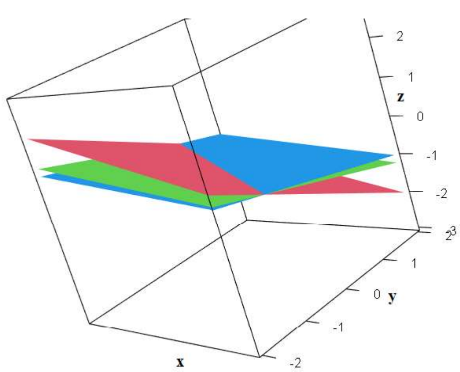
Figura 9: Representación geométrica sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2 sin solución.



Nota: Elaboración propia, 2022.

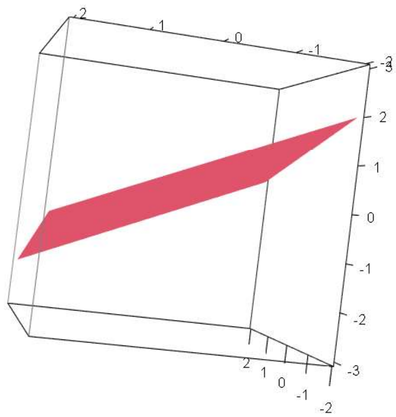
Para el caso de sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 3x3, se pueden representar planos en el espacio geométrico. Para sistemas 3x3 con solución única, vamos a tener tres planos que intersecan entre sí y forman una recta (Figura 10). En el caso de sistemas 3x3 con soluciones infinitas, se tiene una representación de tres planos en la misma posición (Figura 11) y cuando un sistema 3x3 no posee solución, los planos no poseen una intercepción que coincidan a los tres planos (Figura 12).

Figura 10: Representación geométrica sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 3x3 con solución única.



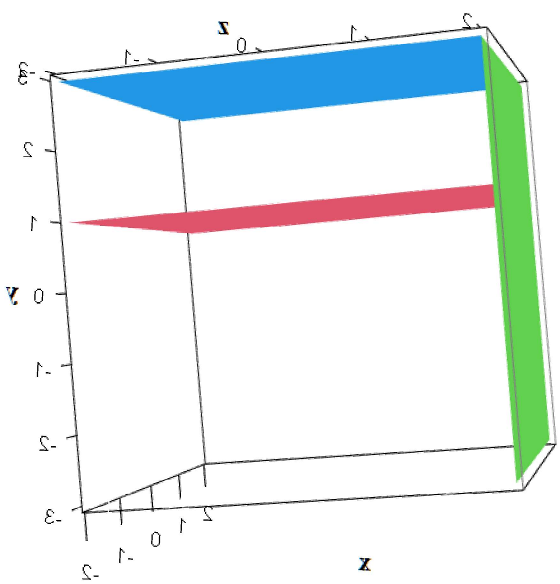
Nota: Elaboración propia, 2022.

Figura 11: Representación geométrica sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 3x3 con soluciones infinitas.



Nota: Elaboración propia, 2022.

Figura 12: Representación geométrica sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 3x3 con soluciones infinitas.



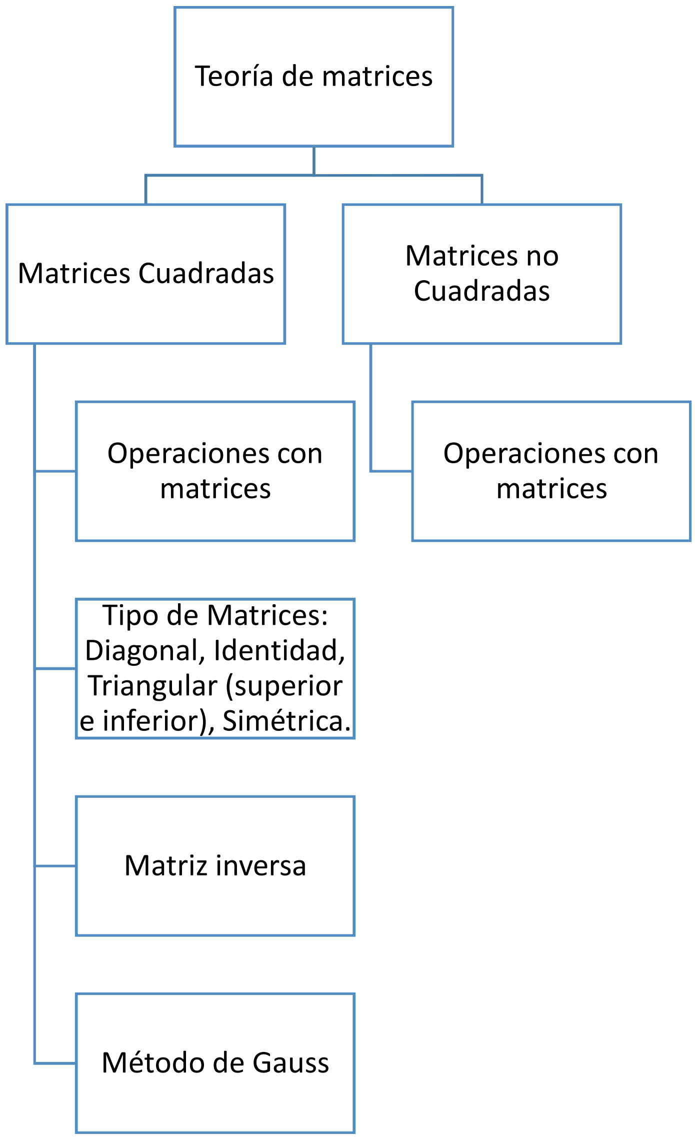
Nota: Elaboración propia, 2022.

4.1.9. Esquema Estructura conceptual

Por medio de la consulta de libros de texto de Álgebra Lineal y de las habilidades propuestas en Programa de estudio BLEM-19, se propone las estructuras conceptuales.

En la Figura 13, se muestra la estructura conceptual para el tema de matrices. Parte de las habilidades a desarrollar en el tema de matrices, se encuentra la operación correcta de matrices y el conocer tipos de matrices y operaciones elementales de filas para encontrar la inversa de matrices.

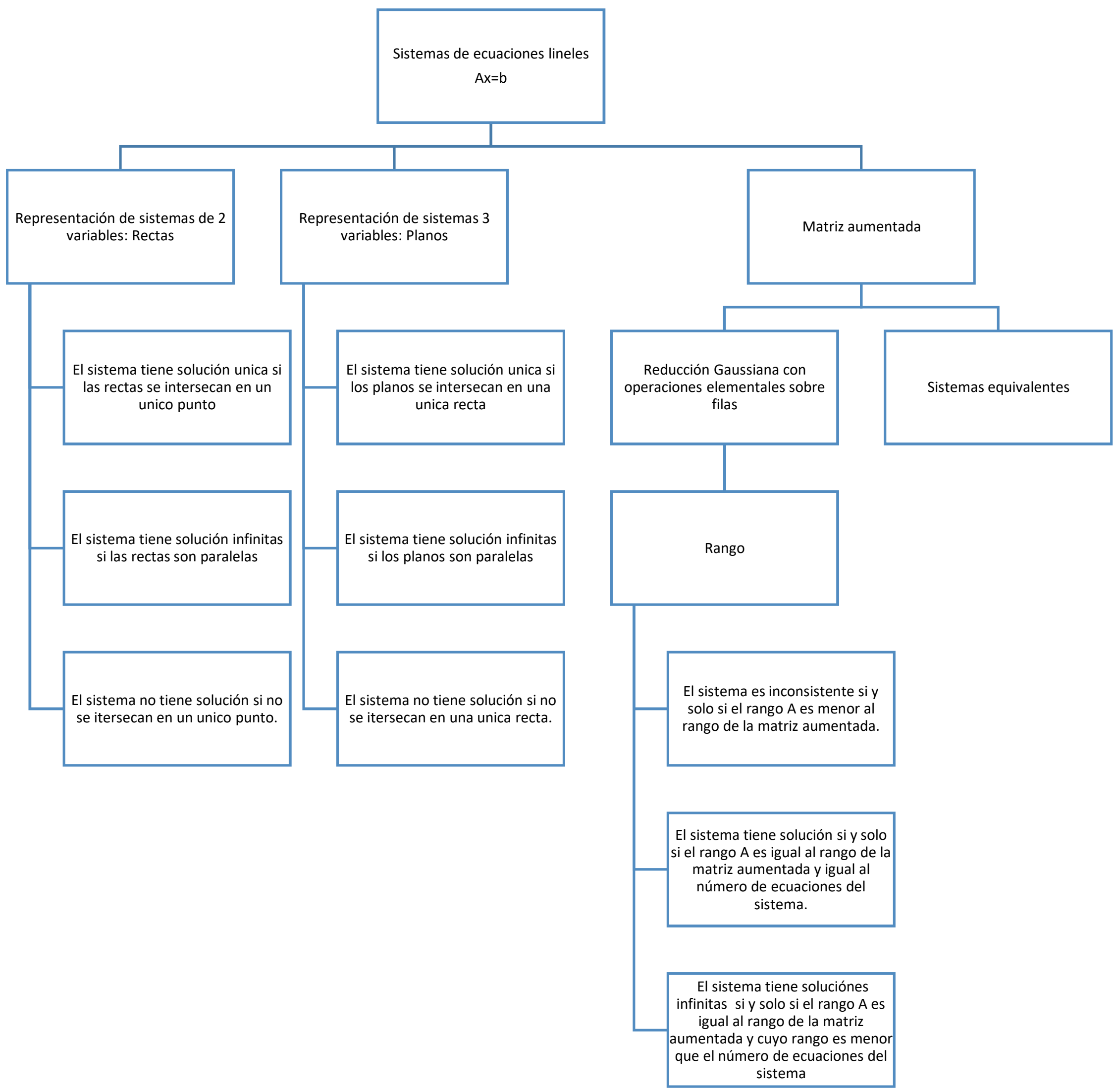
Figura 13: Estructura Conceptual Matrices



Nota: Elaboración propia, 2022.

En la Figura 14 se muestra la estructura conceptual del tema de sistemas de ecuaciones lineales, tomando en cuenta que primero se ha visto el tema de Matrices. Se destacan los procedimientos prácticos y teóricos para identificar la solución de ecuaciones lineales.

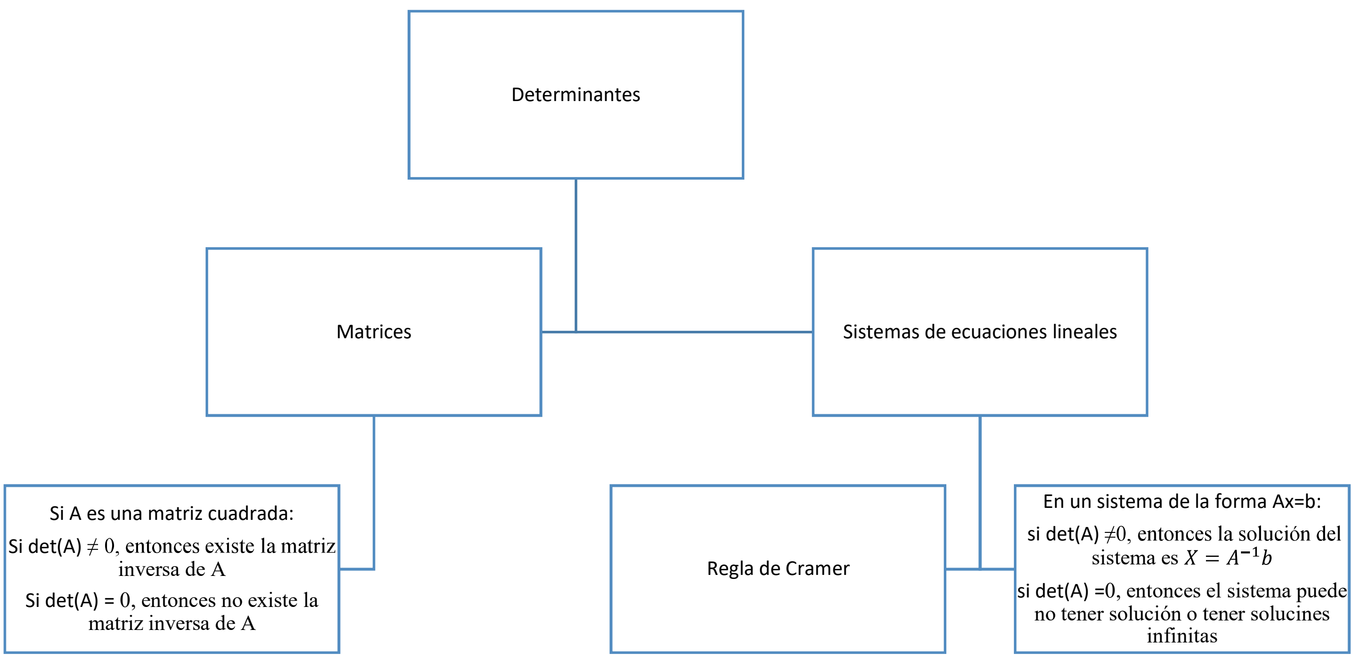
Figura 14: Estructura Conceptual Sistemas de ecuaciones lineales



Nota: Elaboración propia, 2022.

En la Figura 15, se observa la estructura conceptual para el tema de determinantes, que enfatiza lograr relacionar los temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales, para describir la solución de sistemas de ecuaciones lineales y cuando una matriz cuadrada en particular posee inversa.

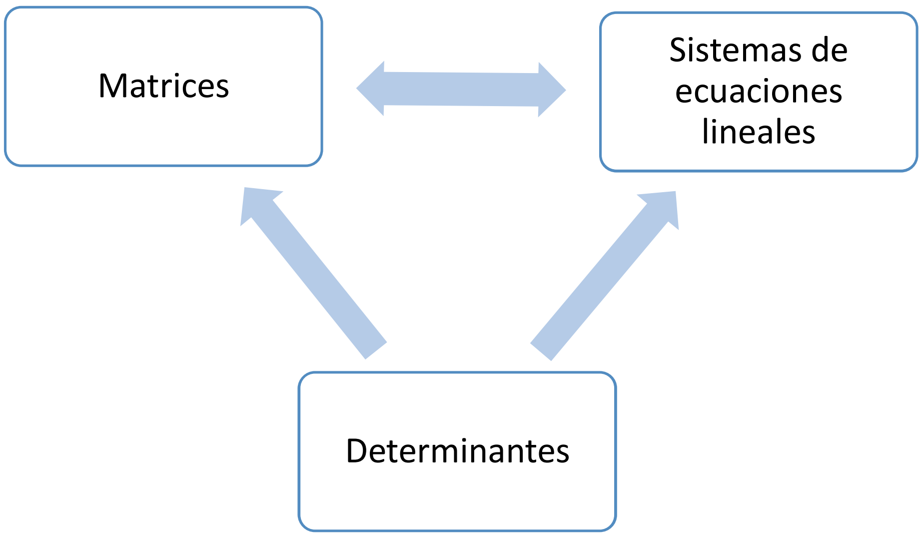
Figura 15: Estructura Conceptual Determinantes



Nota: Elaboración propia, 2022.

En la Figura 16, se muestra la relación que existe entre los temas, se destaca que no existe un orden para ver los temas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Figura 16: Relación entre los temas



Nota: Elaboración propia, 2022.

4.1.10. Campo procedimental

La revisión del programa MAC411 Álgebra Lineal propuesto en el plan de estudio BLEM-17, se propone el siguiente campo procedimental, el cual considera las destrezas, razonamiento y estrategias de aprendizaje (Tabla 8).

Tabla 8: Campo procedimental para los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Destrezas
Conoce la historia referente a la creación de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Aplica habilidades vistas en educación media y en el transcurso de la carrera para resolver sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2 y 3x3. Identifica la representación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2 y 3x3. Reconoce si existe o no la solución de un sistema de ecuación lineal de tamaño 2x2 y 3x3 a partir de la representación geométrica. Identifica la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales de tamaño mxn.

Aplica operaciones elementales sobre las filas de una matriz para obtener la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Reconoce elementos de la matriz como el tamaño, entradas en una posición determinada y posiciones de colunas y filas. Construye una matriz a partir de una función definida. Aplica operaciones elementales sobre las filas de una matriz para obtener la matriz inversa. Aplica propiedades de transpuesta de matrices, determinantes e inversa de matrices. Aplica operaciones elementales por filas para invertir matrices. Obtiene el rango de una matriz. Reconoce el tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir del rango de la matriz ampliada del sistema o la matriz de coeficientes. Obtiene determinantes de matrices. Reconoce matrices especiales.
Razonamiento
Reconoce cuando se puede realizar operaciones con matrices según el tamaño de la matriz. Reconoce si existe la inversa de una matriz a partir del determinante. Reconoce si existe la inversa de una matriz a partir del rango. Despeja correctamente matrices en igualdades de matrices.
Estrategias
Demuestra propiedades que involucran igualdades de matrices. Resuelve problemas que involucran matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales en diferentes contextos. Aplica funciones para la solución de ejercicios con matrices y sistemas de ecuaciones lineales con el software R. Realiza demostraciones relacionadas a la operación de matrices (suma, restas, multiplicación por un escalar, multiplicaciones de matrices, transpuesta de una matriz).

Nota: Elaboración propia, 2022.

4.2. ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

Contexto 1: Conocer el orden cronológico e histórico del desarrollo de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Como parte de la actividad se propone y realizar un esquema cronológico de la historia presente en las siguientes lecturas, resuma las ideas principales y elabore una lista de personajes que influyeron a la teoría de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales:

- Luzardo y Peña (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX, link de referencia <https://www.emis.de/journals/DM/v14-2/art6.pdf>
- Semblanza de Carl Friedrich Gauss (p. 21), Nota histórica (p. 52, p. 220), Semblanza de Sir William Rowan Hamilton (p. 54), Semblanza de Arthur Cayley y el álgebra de matrices (p. 76), Semblanza de Gottfried Wilhelm Leibniz, Augustin-Louis Cauchy y Breve historia de los determinantes (p. 228) presentes en el libro de Álgebra Lineal de Grosman y Flores (2012)

El desarrollo histórico de los temas inicia con el interés de resolver sistemas de ecuaciones y se encontraron aplicaciones de la teoría de determinantes en la solución de sistemas. Otro aspecto es que, la teoría de matrices se desarrolló a partir del 1850, años después que el desarrollo de determinantes y procesos de solución a sistemas de ecuaciones lineales.

Se propone como segunda actividad comparar el orden en que aparecen los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales en tres libros diferentes de Álgebra Lineal.

Contexto 2: Aplicaciones de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

En contexto real, la aplicación de matrices determinantes y sistemas de ecuaciones lineales se aplican en muchos contextos. Además, la mayor parte de los sistemas de ecuaciones lineales se resuelven con matrices ampliadas, por ello las aplicaciones de sistemas de ecuaciones, se dan en contextos que involucran pocas variables a la hora de la enseñanza, sin embargo, la aplicación de la tecnología perite la solución de sistemas con muchas variables.

Entre las aplicaciones, se encuentran por tema:

Matrices

- Estimación de mínimos cuadrados, para la estimación de regresión en datos.
- Análisis de insumos y productos en economía abierta y cerrada.
- Problemas que involucran cadena de Márkov.
- Programación.
- Minería de texto.
- Solución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Algoritmo Page Rank para la búsqueda de información en Internet.

Determinantes

- Conocer si existe la inversa de matrices.
- Solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 con la utilización de la regla de Cramer.
- Cálculo de volúmenes y áreas.

Sistemas de ecuaciones lineales

- Solución de problemas que involucran muchas ecuaciones.
- Programación lineal.

4.2.1. Análisis cognitivo

Las expectativas de aprendizaje se relacionan con las competencias que se desarrollan en el transcurso del curso.

Se espera que los estudiantes desarrollen en el curso MAC411 Álgebra Lineal, las siguientes subcompetencias, que consideran los niveles de complejidad I y II, según el BLEM-17. El BLEM-2017 considera los niveles I y II como:

> Nivel I (elemental): Incluye acciones en su mayoría rutinarias, predecibles y elementales que permiten incorporar el conocimiento nuevo a las estructuras mentales previas.

Nivel II (intermedio): Incluye acciones, no rutinarias, con complejidad superior a las anteriores. Se llevan a cabo en diferentes contextos y requieren de autonomía y responsabilidad individual o colectiva por parte del estudiantado. (p. 25)

En la tabla 9, se desarrollan los objetivos de enseñanza para las subcompetencias de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Se utilizan las siguientes abreviaciones:

PR: Pensar y razonar, AJ: Argumentar y justifica, C: Comunicar, M: Modelizar, RP: Plantear y resolver problemas, R: Representar, LS: Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, HT: Emplea herramientas tecnológicas

Tabla 9: Objetivos de aprendizaje y desarrollo de competencias

<table>
<tr><td colspan="9">Subcompetencias:
Conocer el concepto de matriz y el de igualdad de matrices
Operaciones con matrices respetando las dimensiones de las matrices
Demostrar identidades matriciales usando la igualdad de matrices</td></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>PR</td><td>AJ</td><td>C</td><td>M</td><td>RP</td><td>R</td><td>LS</td><td>HT</td></tr>
<tr><td>Reconocer las dimensiones de una matriz</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Ubicar la posición de cualquier entrada de una matriz</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Reconocer cuándo se pueden aplicar operaciones de matrices según sus dimensiones</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Solucionar ecuaciones con matrices donde se pueda realizar el despeje</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Demostrar teoremas de las propiedades de las operaciones de matrices</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="9">Subcompetencias:
Reconocer los diferentes tipos de matrices</td></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>PR</td><td>AJ</td><td>C</td><td>M</td><td>RP</td><td>R</td><td>LS</td><td>HT</td></tr>
<tr><td>Determinar el tipo de matriz especial a partir de ejemplos</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Determinar el tipo de matriz especial a partir de ejemplos</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="9">Subcompetencias:</td></tr>
</table>

Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado								
Objetivos	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Ingresar matrices en el programa R					X			x
Realizar operaciones con matrices en el programa R					X			X
Realizar operaciones con matrices en el programa R					X			X
Verificar propiedades de matrices con el programa R					X			X
Verificar contra ejemplos de propiedades de matrices que no se cumplen con el programa R	X				X			X
Subcompetencias: Componente histórico sobre el origen y aplicaciones de las matrices								
Objetivos	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Investigar el origen histórico del término de matriz y los matemáticos precursores de la teoría de matrices								
Subcompetencias: Usar las propiedades relacionadas a los diferentes tipos de matrices en contextos teóricos y prácticos. Demostrar teoremas relacionados								
Objetivos	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Aplicar propiedades de matrices en contexto aplicados	X				X			
Demostrar propiedades de matrices a partir de teoremas	x						X	
Subcompetencia: Calcular inversas de matrices invertibles								
Objetivos	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Aplicar propiedades de matrices en contexto aplicados	X				X			
Demostrar propiedades de matrices a partir de teoremas	X	X					X	
Subcompetencias: Calcular inversas de matrices invertibles.								
Objetivos	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Aplicar operaciones elementales de fila para reducir la matriz original a una matriz identidad					X		x	

Subcompetencias: Construir e interpretar modelos matemáticos sobre sistemas de ecuaciones lineales a partir de situaciones reales para reconocer la importancia del álgebra lineal en la vida cotidiana Sistemas de ecuaciones lineales Expresar, en forma apropiada, el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales Componente histórico sobre los sistemas de ecuaciones lineales								
Objetivos	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Repasar los métodos de solución en sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2 por medio de problema de contexto real					X			
Resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales utilizando la matriz ampliada	X				X			
Investigar situaciones o contextos donde se utilizan sistemas de ecuaciones lineales								
Reconocer los tipos de soluciones que pueden existir en sistemas de ecuaciones lineales (solución única, solución infinita o no posee solución)	X							
Aplicar los métodos de solución: eliminación gausiana y Gauss-Jordan en la solución de sistemas de ecuaciones.					X			
Reconocer los tipos de soluciones que pueden existir en sistemas de ecuaciones lineales (solución única, solución infinita o no posee solución).	X							
Subcompetencia: Aplicar los métodos de solución: Eliminación gaussiana y Gauss-Jordan en la solución de sistemas de ecuaciones.								
Objetivos	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Aplicar operaciones elementales de matrices a la matriz ampliada para obtener un matriz triangular					X			
Aplicar operaciones elementales de matrices a la matriz ampliada para obtener una matriz identidad					X			
Subcompetencia:								

Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado								
Objetivos	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Resolver sistemas de ecuaciones lineales con el software R, a partir de ejemplos contextualizados					X			X
Resolver sistemas de ecuaciones lineales obteniendo la reducción de Jordan-Gauss con el software R, a partir de ejemplos contextualizados					X			X
Realizar operaciones elementales de fila a matrices con el software R					X			X
Subcompetencia: Determinar el rango de una matriz								
Objetivos	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Aplicar operaciones elementales de fila para reducir la matriz para obtener el rango de la matriz						x		
Identificar cuando un sistema de ecuaciones lineales tiene solución a partir del rango de la matriz de ecoeficientes	x							
Subcompetencias: Demostrar teoremas sobre determinantes y calcular determinantes usando la definición y sus propiedades								
Aplicar la definición de determinantes de forma recursiva	X							
Demostrar propiedades de determinantes	X	X						
Reconocer cuando una matriz tiene un determinante de cero, a partir de la observación de filas o columnas repetidas o múltiplos.	X							
Aplicar propiedades de determinante para resolver ejercicios	X		X					
Subcompetencias: Resolver sistemas de ecuaciones cuadrados usando la Regla de Cramer								
Reconocer cuando se puede aplicar la regla de Cramer a un sistema de ecuaciones lineales	X							

Aplicar la Regla de Cramer a sistemas de ecuaciones lineales con solución única	X							
Subcompetencias: Demostrar la invertibilidad de una matriz conociendo su determinante								
Reconocer si una matriz posee inversa a partir del determinante	X							
Subcompetencias: Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado								
Calcular matrices en el software R								X
Verificar propiedades utilizando el software R								X
Resolución de problemas que involucren el cálculo de determinante								X

Nota: Elaboración propia, 2022.

4.2.2. Errores y dificultades del aprendizaje de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

En este apartado se resumen una lista de los principales errores en el aprendizaje de los temas propuestos que se encontraron en artículos científicos y académicos. Se destacan las dificultades y errores encontrados en los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales:

Efectúan erróneamente operaciones de matrices, en especial el producto de matrices y aplican propiedades incorrectas. (Barros, Mendes, y Fernandes, 2013)

Los estudiantes no representan la solución de un sistema de ecuaciones como un par ordenado, en el caso de sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2. (Bozzalla y García, 2015)

Los estudiantes no verifican los resultados obtenidos. (Bozzalla y García, 2015)

La no utilización o incorrecto uso de simbología para resolver problemas prácticos. (Bozzalla y García, 2015)

Las creencias de los estudiantes que los sistemas de ecuaciones lineales tienen una solución única y cometen errores algebraicos, queriendo encontrar la solución. (Bozzalla y García, 2015)

En el caso de sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2, se suelen confundir los conceptos de ecuación lineal con dos incógnitas, sistemas de ecuaciones lineales y funciones, ocasionando errores graves de conceptos. (Panizza et al, 1999)

Dificultades en interpretar el sistema de ecuaciones lineales de un problema real y dar una solución a partir de la representación geométrica. (Trigueros, Oktac y Manzanero, 2007)

Dificultad de resolver sistemas de ecuaciones con más ecuaciones que variables. (Peña, 2019)

En sistemas de 2x2, donde las variables del sistema son x y y, reconocen la respuesta como x, dejando de lado el valor que toma. (Peña, 2019)

Al presentar sistemas de ecuación diferentes notaciones de variable de x y y, como ejemplos variables a y b. (Peña, 2019)

Se refleja una dificultad de trabajar con determinantes al aumentar las dimensiones de la matriz. (Ozdag y Aygor, 2012)

Las investigaciones consultadas, reflejan que los errores que suelen cometer los estudiantes cuando están aprendiendo sobre los conceptos de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, están relacionados con los contenidos que deberían manejar; como es el caso del término variable y procesos algebraicos, además de los conceptos propios de la materia.

Es conocido que los cálculos para realizar producto de matrices de tamaños mayores a 3x3, vuelve un poco extenso el procedimiento, por lo que se puede implementar la utilización de software, para evitar errores de cálculos en sumas y restas, para que sea útil la verificación de propiedades.

4.3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

Se desarrollaron ocho sesiones de clases para la aplicación de las tareas o actividades desarrolladas. En este apartado se resumen las actividades seleccionadas para la elaboración de la propuesta didáctica.

4.3.1. Sesión de clases 1

En la primera sesión de clase se definen los conceptos de matriz, igualdad de matrices, operaciones con matrices respetando las dimensiones y se deja una investigación de la historia del álgebra lineal matrices. Se mencionan las actividades incluidas en la propuesta didáctica.

Tareas desarrolladas

1. Escriba las siguientes matrices de acuerdo con su definición.

Sean $A, B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, donde $A = (a_{ij})$, $\quad B = (b_{ij})$, $\quad C = (c_{ij})$ y se definen sus entradas

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & si \quad i < j \\ i & si \quad i > j \\ i^2 & si \quad i = j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & si \quad i < 3 \\ i & si \quad i = 3 \end{cases}, \quad c_{ij} = \begin{cases} i & si \quad i = j \\ j & si \quad i \neq j \end{cases}$$

2. Con base a las matrices de la parte 1, identifique cuáles de las siguientes igualdades se cumplen

a. $A + B = B + A$.

b. $A \cdot B = B \cdot A$

c. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Tome en cuenta que se define la potencia de matrices cuadradas como $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{\text{k veces}}$.

d. $A \cdot B \cdot C = C \cdot A \cdot B$

e. $C \cdot B - B \cdot C = 0$

3. Se puede encontrar una matriz O que cumpla $A + O = A, B + O = B$ y $C + O = C$.

4. Se puede encontrar una matriz I que cumpla $A \cdot I = A, B \cdot I = B$ y $C \cdot I = C$.

5. Se puede encontrar una matriz S que cumpla $A \cdot S = B$

Actividad de investigación: Historia del álgebra lineal

1. Realice una línea de tiempo sobre el descubrimiento de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

2. Investigue 3 aplicaciones de la utilización de matrices.

   Puede utilizar las siguientes referencias, sin embargo puede utilizar otras

   Luzardo y Peña (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX, link de referencia https://www.emis.de/journals/DM/v14-2/art6.pdf

   Semblanza de Carl Friedrich Gauss (p. 21), Nota histórica (p. 52, p. 220),Semblanza de Sir William Rowan Hamilton (p. 54), Semblanza de Arthur Cayley y el álgebra de matrices (p. 76), Semblanza de Gottfried Wilhelm Leibniz, Augustin-Louis Cauchy y Breve historia de los determinantes(p. 228) presentes en el libro de Álgebra Lineal de Grossman y Flores (2012).

4.3.2. Sesión de clase 2

En la sesión de clase 2, se abordan los tipos de matrices, el método para demostrar identidades matriciales usando la igualdad de matrices, la utilización de propiedades para los diferentes tipos de matrices en ejercicios teóricos y prácticos

Tareas desarrolladas

3. Considere las siguientes matrices de tamaño $n \times n$:

- A es una matriz triangular superior
- B es una matriz triangular inferior
- C es una matriz simétrica
- I es una matriz identidad

Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

$A + B$ es una matriz diagonal

AC es una matriz simétrica

AI es una matriz triangular superior

$B + C$ es simétrica

$I + I$ es una matriz diagonal

4. Discuta si puede existir una matriz antisimétrica con elementos en la diagonal distintos de cero.

5. Una matriz A cuadrada es idempotente si cumple $A^2 = A$.

- Compruebe que la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

- Demuestre que si A es idempotente entonces $A^n = A$ con $n \geq 2$.

- Considera la matriz A, encuentre una formula para establecer ejemplos de matrices idempotentes de tamaño 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

6. Propiedades de la transpuesta de matrices

Sea A una matriz de cualquier tamaño y α un escalar

$(\alpha A)^t = \alpha A^t$ **(*)**

$(A + B)^t = A^t + B^t$ **(*)**

$(A^t)^t = A$ **(*)**

$(AB)^t = B^t A^t$ **(*)**

7. Demostrar las propiedades de matrices enmarcadas con **(*)**.

8. Como ejemplo de la propiedad de sumatoria utilizada en la demostración de producto de matrices: Compruebe que se cumple

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{v=1}^{4} a_{kv} = \sum_{v=1}^{4}\sum_{k=1}^{3} a_{kv}$$

6. Una matriz A cuadrada es ortogonal si $AA^t = I$. Comprobar que la siguiente matriz es ortogonal para cualquier valor de θ (Ejemplo tomado de Apostol, 2001, p.755).

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

7. Para cada una de las proposiciones siguientes acerca de las matrices $n \times n$, dar una demostración o en su lugar un contra ejemplo. (Tomado de Apostol, 2001 p.755)

a) Si A Y B son ortogonales, $A + B$ es ortogonal.

b) Si A Y B son ortogonales, AB es ortogonal.

c) Si A Y AB son ortogonales, B es ortogonal.

8. Determinar en caso de que existan, todas las matrices B que satisfacen cada igualdad (Ejercicio tomado de Costa, Rossignoli, Sorichetti y Vampa, p.44, 2018)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + B = B^t + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + B = 2B^t + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Demostrar que si A es una matriz nxn, entonces $A + A^t$ es una matriz simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica. De un ejemplo con una matriz de $2x2$ (Ejercicio tomado de Costa, Rossignoli, Sorichetti y Vampa, 2018, p.44)

9. Considere las siguientes matrices, identifique cuáles operaciones se pueden efectuar y calcule en caso de que esté definido:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 7 & 13 \\ 0 & 15 & 14 & 5 \\ 2 & -3 & 10 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 11 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Operaciones:

- $A + I_3$
- $(AB)^t$
- $B^t A^t$
- $C^t I_3$
- $(AB)^t C^t$

4.3.3. Sesión de clase 3

Se da una introducción al ingreso de matrices y operaciones con matrices en el lenguaje de programación *R,* por medio de la utilización del software *R Studio*.

10. Investigue como ingresar a RStudio datos de un archivo de Excel. Convierta los datos a formato matriz con la función $as.matrix(A)$, donde A es el nombre del archivo de Excel. Tome como ejemplo la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Ingrese la matriz B con la función **matrix**.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

- Cuál es el tamaño de la matriz resultante de realizar $B \cdot A$

- Realizar la operación $B \cdot A$ en **R**.

12. La esta actividad vamos a reconocer una de las importancias de utilizar software para ejercicios de álgebra de matrices que es el tiempo de resolución de ejercicios, considera el siguiente código:

```
n=2
A=matrix(sample(-10:10,n*n),ncol=n)
B=matrix(sample(-10:10,n*n),ncol=n)
A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    5   -5
## [2,]    2   -6
```

```
B
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   -7    4
## [2,]   -6   -2
```

En el fragmento de código, n representa el tamaño de la matriz cuadrada y la función *sample* realiza una aleatorización de números enteros entre un rango de -10 a 10. Ahora, aumente el valor de n en 5, 8 y 12 para realizar las siguientes operaciones, tome el tiempo cronometrado que toma en realizar las operaciones con papel y lápiz, además realice las operaciones en el software:

$$A + B$$

$$A \cdot B$$

$$B \cdot A$$

Verifique si los resultados obtenidos con papel y lápiz son iguales a los que obtuvo en el software.

6.4. Sesión de clases 4

En la sección de clase 4, se imparte la definición de inversa de matrices y el método para encontrar la inversa en matrices que poseen inversa. Se menciona el método para encontrar el rango de una matriz.

Tareas desarrolladas

13. ¿Se puede encontrar una matriz inversa para A?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

14. Encuentre matriz inversa de B

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Demuestre cada uno de los siguientes puntos. Si A^{-1} es la inversa de A, entonces:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$

16. Con la matriz A del ejemplo anterior, verificar que se cumple la siguiente igualdad

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

17. A la matriz $(A|I)$ del ejemplo anterior aplique el cambio de fila $f_1 \leftrightarrow f_3$, luego aplique el procedimiento para encontrar la inversa de A sin volver a utilizar el cambio de fila.

18. Considere las matrices R, S y U

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz inversa de R y determine la matriz W que satisface la siguiente igualdad

$R(W^t + S) = U,$ (Tomado de Mora et al., 2018 p.13)

19. Sea A una matriz de tamaño 3×3. Si S se obtuvo aplicando la operación elemental $3f_1 + f2$ a la matriz A y B se obtuvo aplicando la operación elemental $-2f_2$. Justifique si se concluir que S sea equivalente a B o que B sea equivalente a S.

20. Encontrar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.5. Sesión de clase 5

Se abordan dos aplicaciones de matrices, las cuales corresponden a regresión lineal por medio del método de ajuste de mínimos cuadrados y el análisis de semántica latente. Estas dos aplicaciones se enseñan por medio de la utilización *software R*.

Tareas desarrolladas

21. Supongamos que un contratista de obra ofrece los siguientes tipos de viviendas residenciales que tienen los requisitos de insumos indicados en la tabla siguiente:

Vivienda e insumos	**Acero**	**Madera**	**Vidrio**	**Mano de obra**
Campestre	5	20	16	17
California	7	18	12	21
Colonial	6	25	6	13

Supongamos ahora que el contratista mencionado recibe un pedido para construir 5 casas de tipo campestre, 7 del tipo California, y 12 del tipo Colonial.

Determinar el requerimiento de insumos (Cantidad de materiales y mano de obra) por medio de la relación.

$$R = xA$$

Donde x corresponde a una matriz columna de los requerimientos y A los datos que se disponen en la tabla.

22. Realizar un análisis de regresión de mínimos cuadrados utilizando los siguientes datos, que corresponden a las exportaciones de moluscos y peces en Costa Rica,

para predecir cuantos kilos se exportarán en el 2019, suponiendo que el comportamiento es lineal. Los datos fueron escogidos de forma aleatoria.

Año	Kilos
1999	2197498
2001	32033516
2002	32394710
2007	15895804
2010	12813288
2011	14632046
2012	17818512
2015	13630430

Nota: Datos tomados Estadísticas ambientales producidas por el INEC

23. Calcule la matriz de terminos-terminos y documentos-documentos del siguiente párrafo (Datos tomados de Grarajes, 2018):

De seguir a este ritmo, a nivel mundial, la ONU estima que para el 2050 habrá más plástico que peces en el mar.

El 80% del plástico desechado es lanzado al mar.

De acuerdo con el Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD), la industria del plástico es la tercera industria más grande de Costa Rica.

El problema es que la cantidad de plástico que desechamos también es sorprendente. Según el PNUD, por día, Costa Rica desecha cerca de 550 toneladas de plástico diariamente.

A pesar de los esfuerzos que hace el país por cuidar el ambiente, los expertos concuerdan en que una de las mayores debilidades es la falta de una ley que regule el uso del plástico.

4.3.6. Sesión de clase 6

Se dan las bases teóricas para demostrar teoremas sobre determinantes y calcular determinantes utilizando la definición y sus propiedades. Además, se considera el resultado de que una matriz es invertible, conociendo el valor de su determinante.
Se introduce la utilización del software R Studio para el cálculo de determinantes.

Tareas desarrolladas

24. Realizar el procedimiento para encontrar el determinante de la matriz A del ejemplo anterior, utilice la definición en la fila 2 y luego en la fila 3.

25. Analice que sucede con el determinante si aplicamos la definición operaciones elementales a las filas ¿Qué se puede concluir?

26. De ejemplo de una matriz de tamaño $2x2$ con determinante distinto de cero. Encuentre una relación del determínate de A cuando se aplica operaciones elementales en la fila. A partir de las conclusiones determine el determinante de B aplicando operaciones elementales de fila

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -10 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

27. Demuestre por medio de contraejemplo que dado A y B matrices cuadradas, $|A + B| \neq |A| + |B|$

28. Calcule el determinante de B aplicado la definición en cualquier fila, adiccionalmente aplique el mismo método, pero aplicado a cualquier columna. ¿El resultado es el mismo?

29. Una de las aplicaciones de determinantes en matrices de tamaño 2×2 es el cálculo de área de paralelogramos. Considere dos vectores direccionales $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$, el área del paralelogramo determinando por esos vectores se puede calcular

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Grafique los vectores direccionales $u = (1,1)$ y $v = (1,-2)$. Calcule el área del paralelogramo utilizando el determinante.

30. Determine si las siguientes matrices poseen inversa y calcule la inversa utilizando el determinante

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 11 & -9 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & -2 & -9 & 4 \\ 3 & -6 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & -7 & 6 & 0 & 6 \\ 7 & -15 & -7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

31. La fórmula para obtener la estimación de coeficientes por medio de regresión por mínimos cuadrados es:

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y$$

Suponiendo que existe una relación lineal y los supuestos para aplicar el modelo. ¿Cuál es la condición matemática para aplicar el método?

4.3.7. Sesión de clase 7

Se aborda el tema de sistemas de ecuaciones lineales. Se dan ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones cuadrados usando la Regla de Cramer. Además, se introduce el tema de eliminación gausiana y Gauss-Jordan en la solución de sistemas de ecuaciones.

Tareas desarrolladas

32. La compañía Sunrise Porcelain fabrica tazas y platos de cerámica. Para cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que los forma, de donde pasa al vidriado y secado automático. En promedio, un trabajador necesita tres minutos para iniciar el proceso de una taza y dos minutos para el de un plato. El material para una taza cuesta 25 dólares y el material para un plato cuesta

20 dólares. Si se asignan 44 dólares diarios para la producción de tazas y platos, ¿cuántos deben fabricarse de cada uno en un día de trabajo de 8 horas, si un trabajador se encuentra trabajando cada minuto y se gastan exactamente 44 dólares en materiales? (Tomado de Grosman y Flores, 2012 p.8,)

33. Determine el comportamiento de la solución de sistema de ecuaciones lineales cuando el determinante de la matriz de coeficientes es 0. Considere los siguientes sistemas, calcule y determine si posee o no solución.

$$\begin{cases} x+z &= 2 \\ 2y &= 6 \\ x+y+z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1+3x_3 &= 22 \\ 2x_1+2x_2 &= 24 \\ x_1+x_3 &= 7 \end{cases}$$

Determinar el valor de la constante K para que el siguiente sistema posea:

- Solución única
- Solucione infinitas
- No posea soluciones

$$\begin{cases} x+y+kz &= 2 \\ 3x+4y+2z &= k \\ 2x+3y-z &= 1 \end{cases}$$

34. Modelo abierto de Leontief : Se quiere calcular la demanda final a partir de una matriz de tecnología. Se tiene la siguiente igualdad:

$(I-A)X=D,$ donde A es una matriz tecnológica y D indica la demanda final

Si la matriz de tecnología es

	Agricultura	*Siderurgía*	*Carbón*
Agricultura	0.1	0.01	0.01
Siderurgía	0.02	0.13	0.20
Carbón	0.05	0.18	0.05

Con un superávit de 2350 toneladas producción agrícola, 4552 acero y 911 de carbón. Represente el sistema y calcular la producción bruta.

35. Plantee el sistema de ecuaciones lineales del siguiente problema y encuentre la solución:

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 del B y 5 del C. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 5 unidades del C. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento A, 20 000 unidades del alimento B y 55 000 del C. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago? (Tomado de Grossman y Flores, 2012, p.17)

4.3.8. Sesión de clases 8

Tareas desarrolladas

36. De ejemplos de un sistema de tamaño 3×3 que posee solución única, un sistema con solución que depende de parámetros y un sistema que no posee solución. Calcule el rango de la matriz de coeficientes y matriz aumentada.
    ¿Cuál es la relación que existe entre los rangos y la solución del sistema?
37. Un sistema es homogéneo cuando tiene la forma $AX = 0$. Encuentre la relación de la solución comparándolo con el rango.

4.4. DISEÑO DE VÍDEOS TUTORIALES

4.4.1. Guía de Vídeo 1: Vídeos tutoriales sobre el uso de *R* y *RStudio*

Objetivos del video:

Mostrar el proceso de instalación de *R* y *RStudio* para sistema operativo *Windows.*

Manipular datos desde *R*.

Factibilidad de utilizar *RStudio.*

Ejemplificar el lenguaje de programación *R*.

Instalar y utilizar paquetes desde *RStudio*.

Utilizar *Rscrip* guardar funciones, comandos y datos.

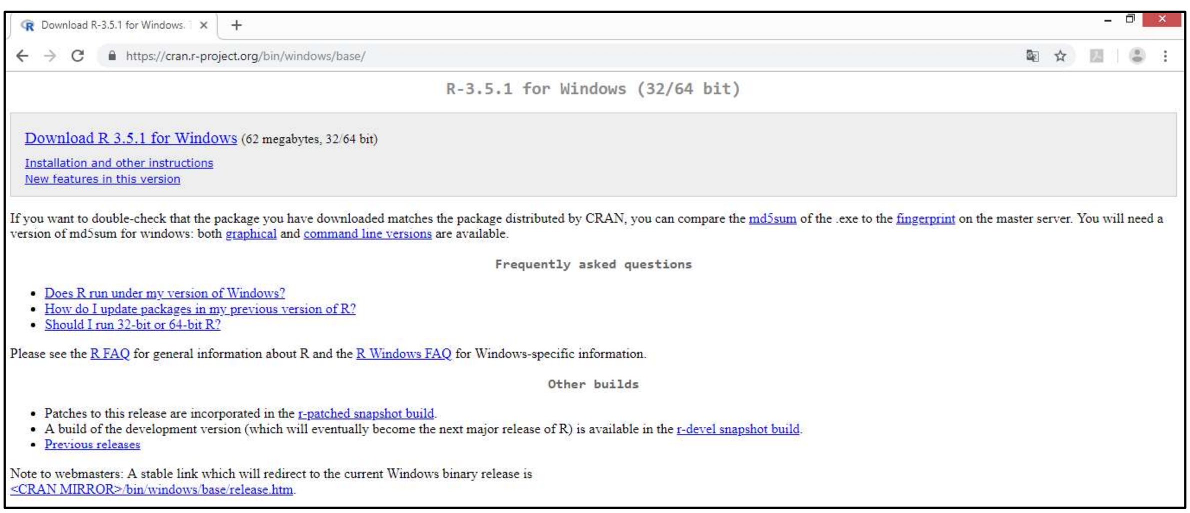
Vídeo 1: Instalación de *R* y *RStudio* en sistema operativo *Windows*.

Introducción del video: *R* es un software y lenguaje de programación estadístico. El software *R* es de licencia libre, multiplataforma y posee una gran variedad de paquetes. Además, posee un entorno de desarrollo integrado conocido como *RStudio* que facilita la utilización de *R*. En este video se muestra el proceso de instalación y utilización introductoria de *R* y *RStudio*.

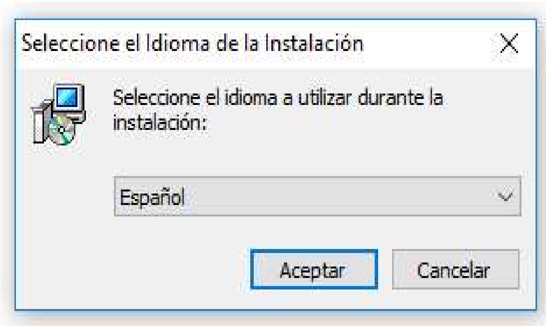
Contenido y explicación detallada del video:

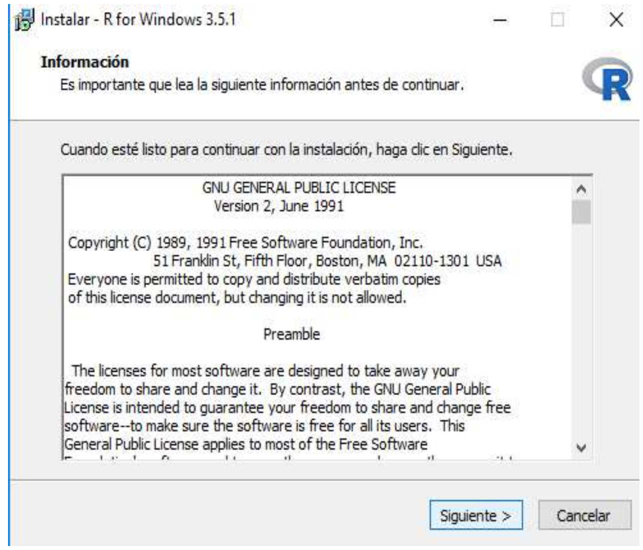
Primera parte: Instalación del software *R*

En la dirección https://cran.r-project.org/bin/windows/base/ se descarga el instalador de *R* para *Windows*.

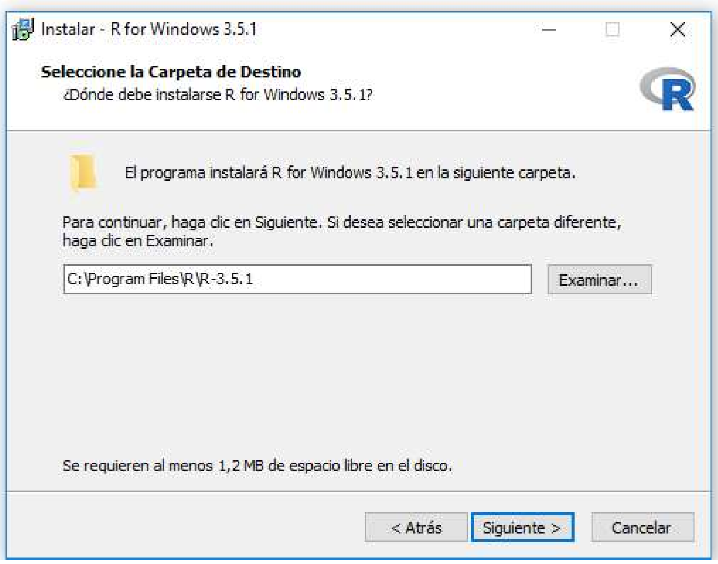


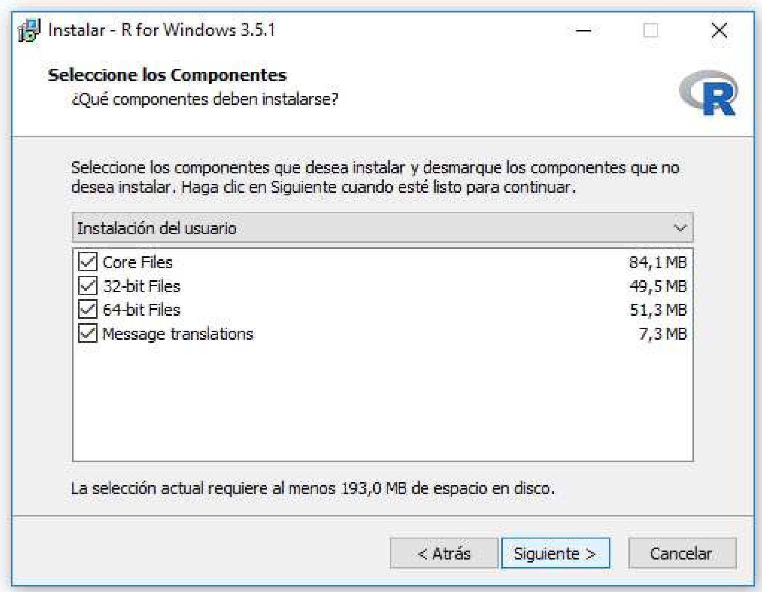
La forma de instalar el programa, es abriendo el instalador descargado. Se escoge el idioma para la instalación del programa, luego se aceptan las condiciones de su uso.



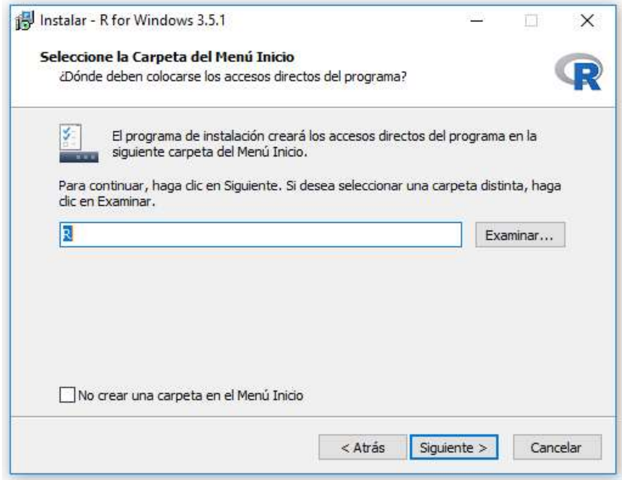


Se puede seleccionar cualquier carpeta en la computadora para su instalación. Posteriormente se escogen los componentes para su instalación.





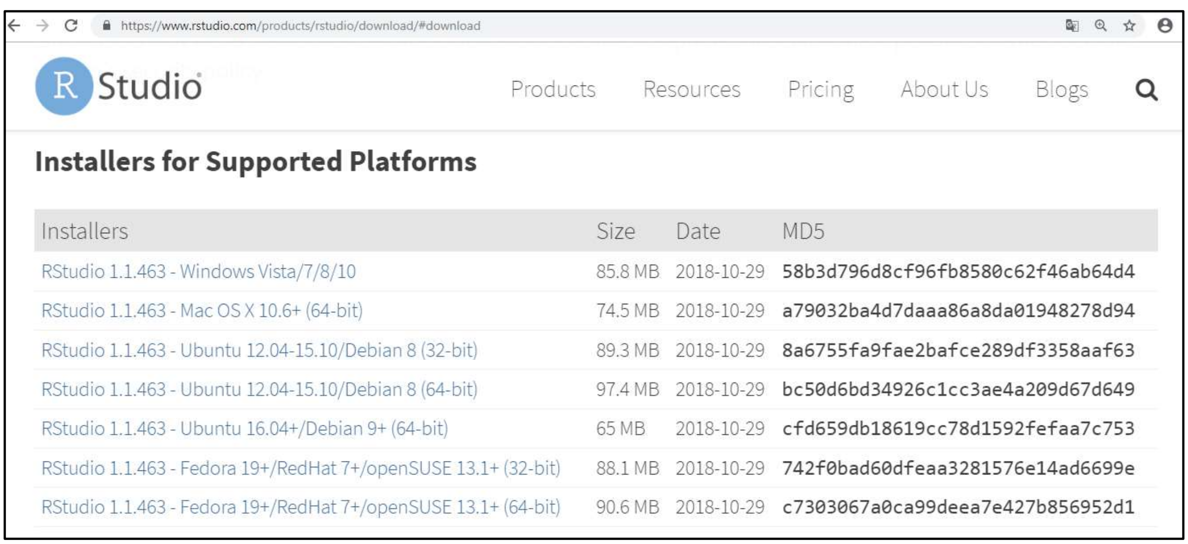
Luego da una opción para agregar el programa al inicio (de no quererlo así se selecciona no crear carpeta al menú de inicio). A la próxima opción se le da siguiente y comenzará la instalación del software.



Al finalizar la descarga de *R*

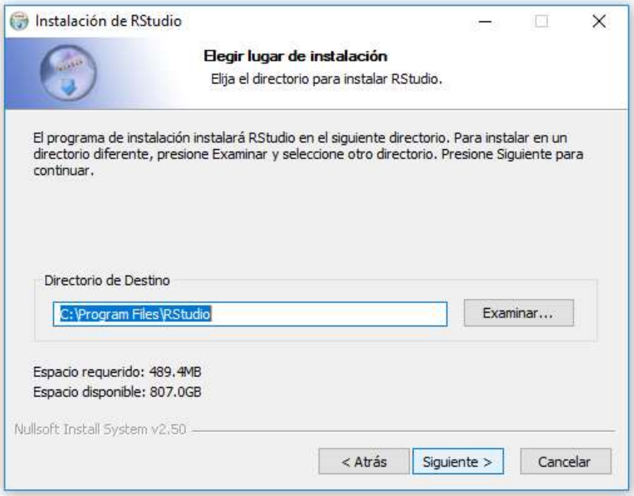
Segunda parte: Instalación de *RStudio*

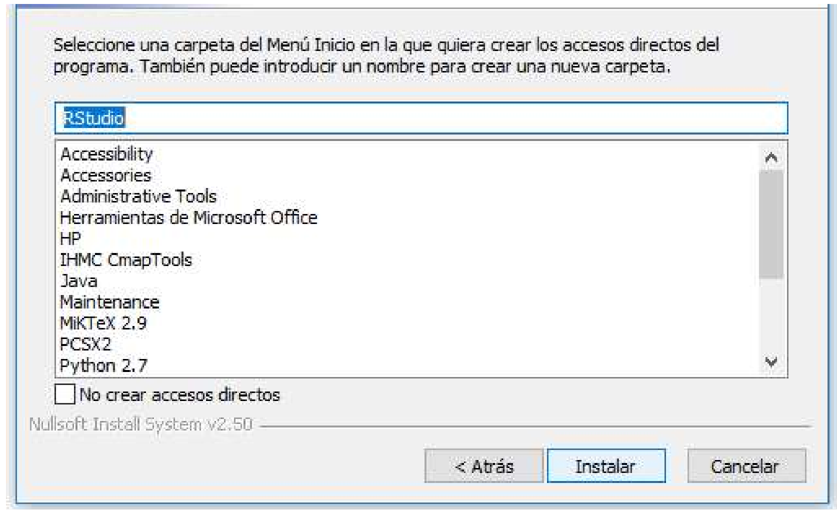
La versión libre de *RStudio* se encuentra en la https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/ .



Installers	Size	Date	MD5
RStudio 1.1.463 - Windows Vista/7/8/10	85.8 MB	2018-10-29	58b3d796d8cf96fb8580c62f46ab64d4
RStudio 1.1.463 - Mac OS X 10.6+ (64-bit)	74.5 MB	2018-10-29	a79032ba4d7daaa86a8da01948278d94
RStudio 1.1.463 - Ubuntu 12.04-15.10/Debian 8 (32-bit)	89.3 MB	2018-10-29	8a6755fa9fae2bafce289df3358aaf63
RStudio 1.1.463 - Ubuntu 12.04-15.10/Debian 8 (64-bit)	97.4 MB	2018-10-29	bc50d6bd34926c1cc3ae4a209d67d649
RStudio 1.1.463 - Ubuntu 16.04+/Debian 9+ (64-bit)	65 MB	2018-10-29	cfd659db18619cc78d1592fefaa7c753
RStudio 1.1.463 - Fedora 19+/RedHat 7+/openSUSE 13.1+ (32-bit)	88.1 MB	2018-10-29	742f0bad60dfeaa3281576e14ad6699e
RStudio 1.1.463 - Fedora 19+/RedHat 7+/openSUSE 13.1+ (64-bit)	90.6 MB	2018-10-29	c7303067a0ca99deea7e427b856952d1

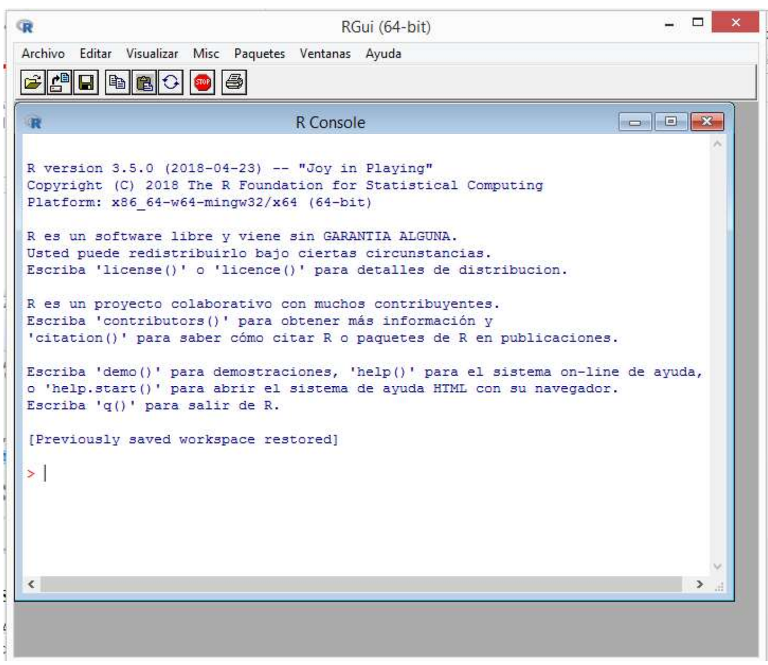
Luego de abrir el instalador de *RStudio* se la da la opción de siguiente, luego se puede escoger una carpeta pasa su instalación y luego se pulsa la opción de instalar.





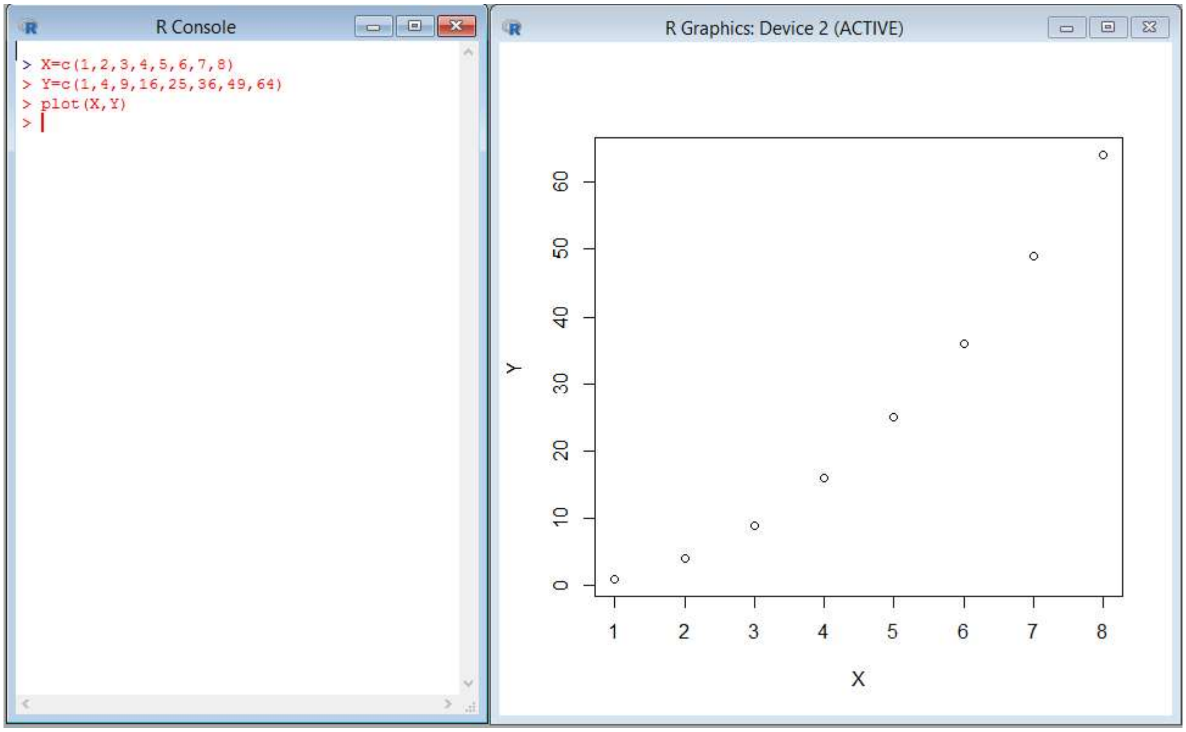
4.4.2. Video2: Utilización de R

Al abrir el software *R* se muestra la consola. En esta ventana se digitan funciones o códigos que se quieren trabajar.

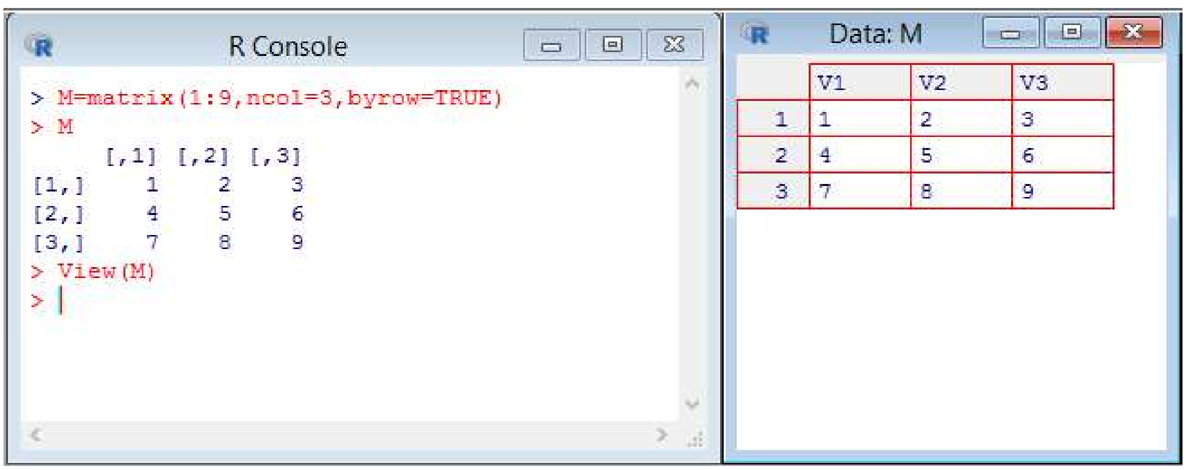


Ejemplo: Crear vectores numéricos con la siguiente información y luego realizar una gráfica de puntos con la función plot().

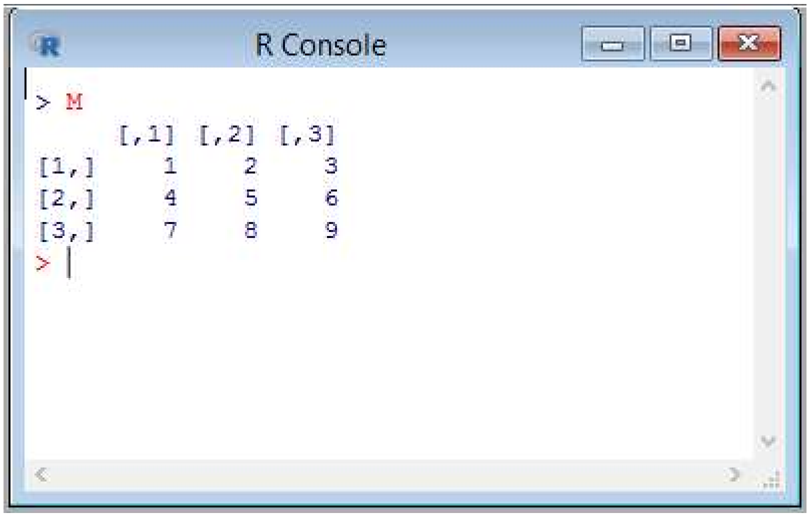
X= (1,2,3,4,5,6,7,8) , Y=(1,4,9,16,25,36,49,64)



Ejemplo crear la siguiente matriz y visualizarla.

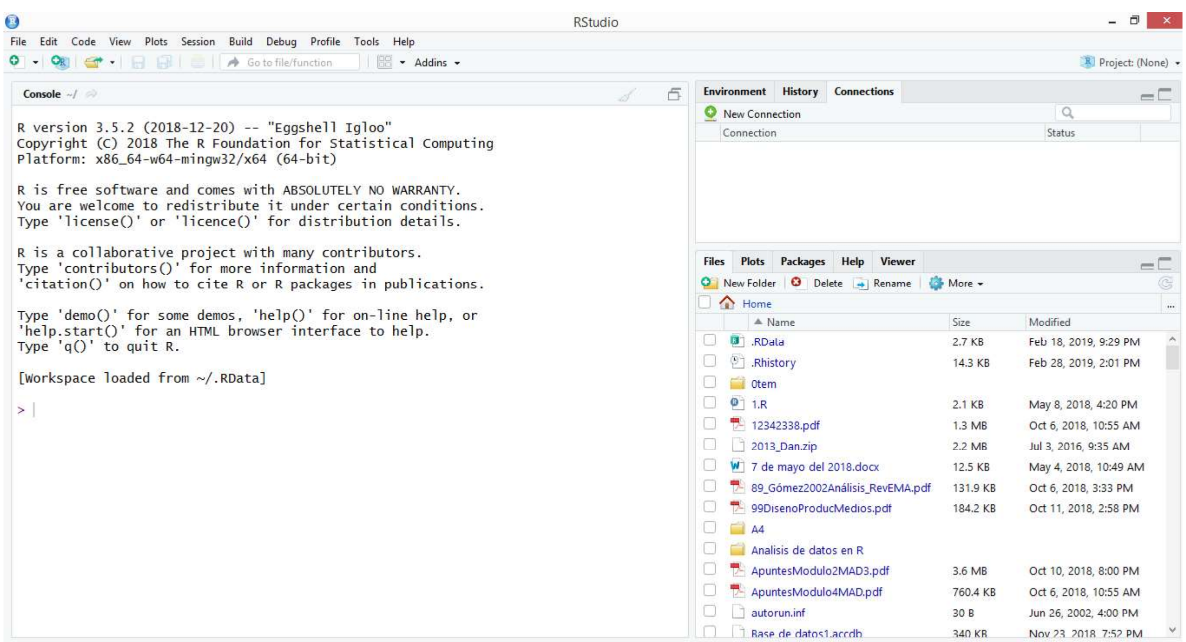


Para limpiar la consola de R, se digita las teclas ctrl L. Al limpiar la consola no se pierden los datos ingresados.

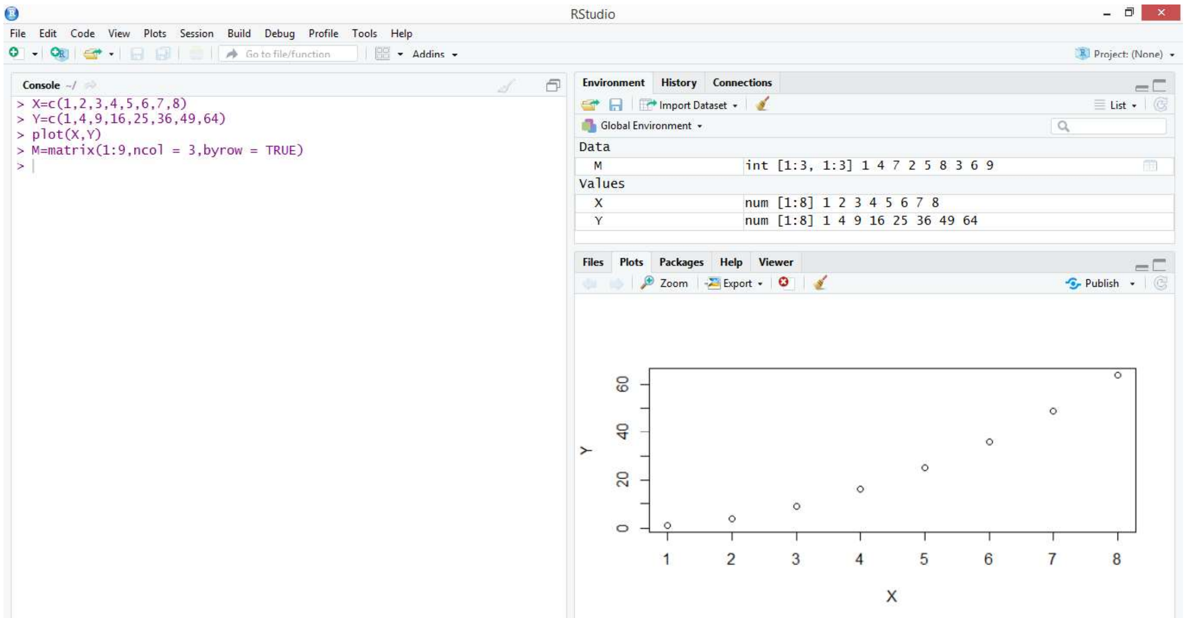


Por lo general se utiliza RStudio, que es un entorno de desarrollo integrado de R, lo que facilita el manejo de herramientas como la instalación de paquetes, visualización de datos, creación de documentación, entre otras.

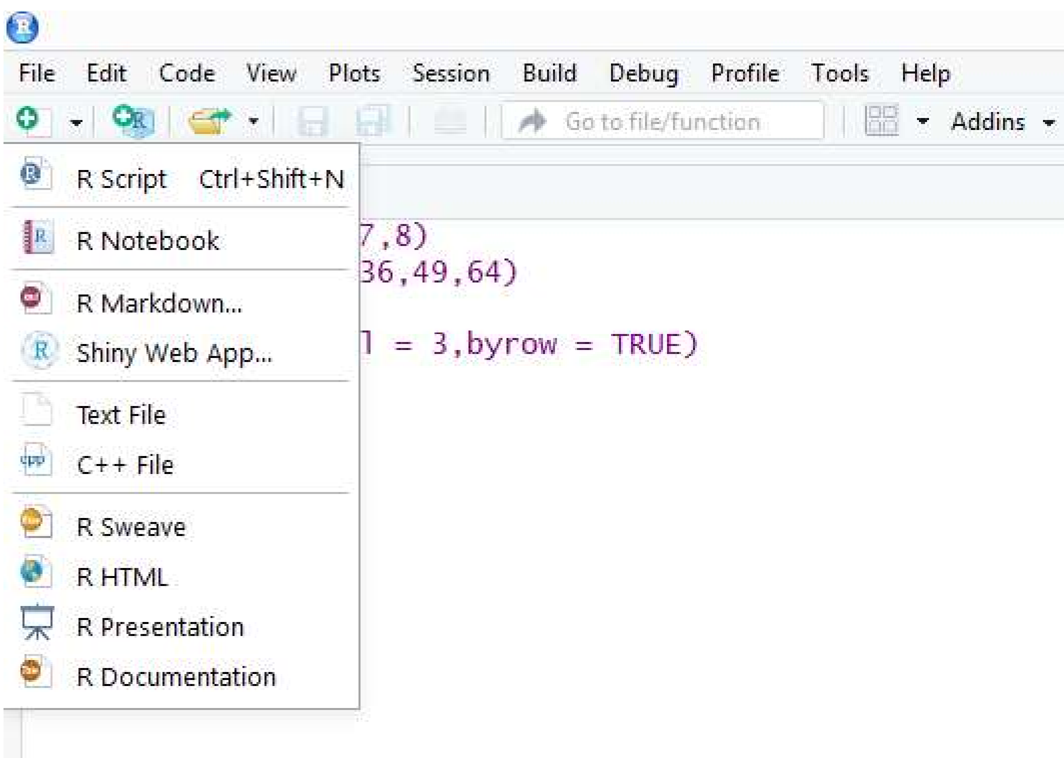
Al abrir por primera vez RStudio, se muestran tres ventanas de trabajo. La ventana izquierda es la consola de trabajo, en la derecha superior se importan datos y se muestran las variables que se trabajan, y en la parte derecha inferior, se instalan paquetes, se muestran las gráficas y el escritorio donde se trabaja.



Al hacer los ejemplos anteriores se ven los datos de X,Y y M en la parte derecha superior y la gráfica en la parte derecha inferior.

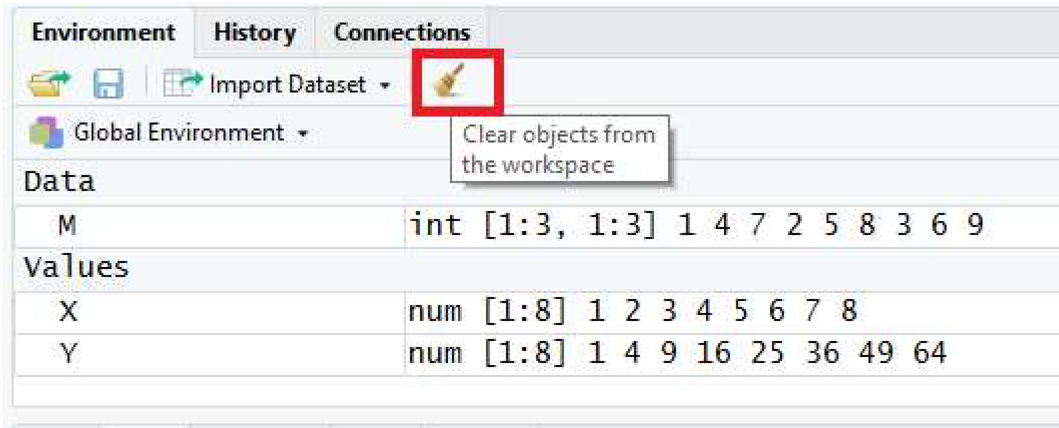


Para guardar lo digitado en la consola, se crea un RScrip que se encuentra en la parte izquierda.

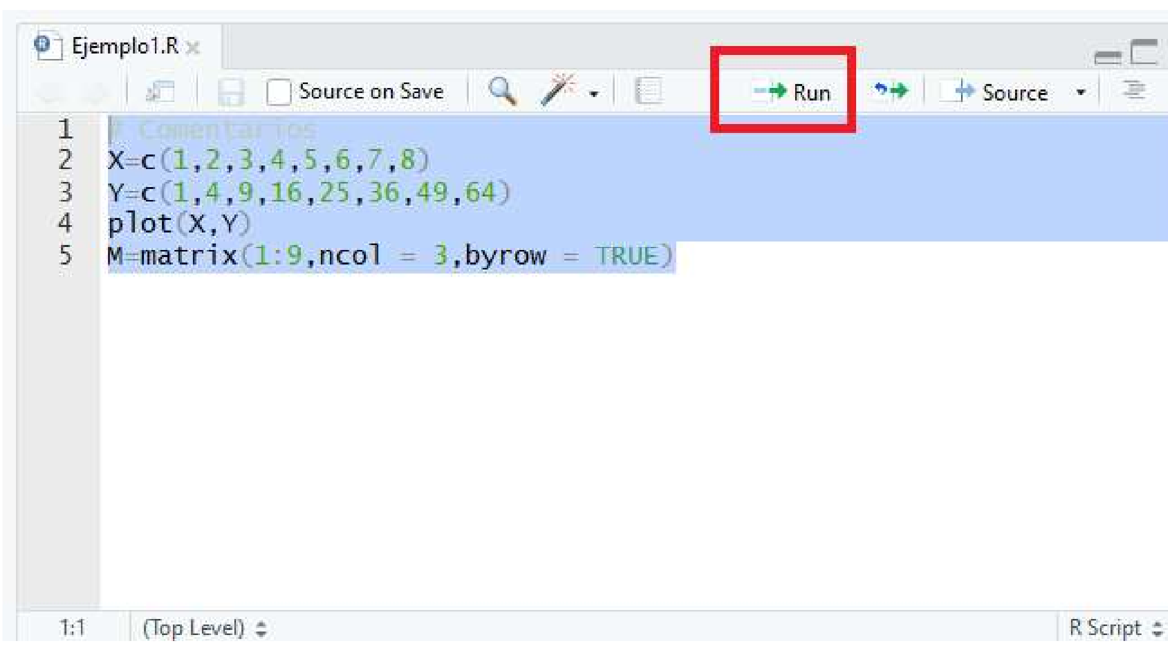


Luego, se digitan las funciones que se trabajan en la consola (Nota: llamaremos funcione a los comandos acompañados con ()) y para agregar algún comentario se pone el símbolo # acompañado de los comentarios. Se guarda el archivo en cualquier lugar de la computadora.

Ahora, se borran los datos en el sistema de R por medio del icono en forma de brocha que se encuentra al lado superior derecho



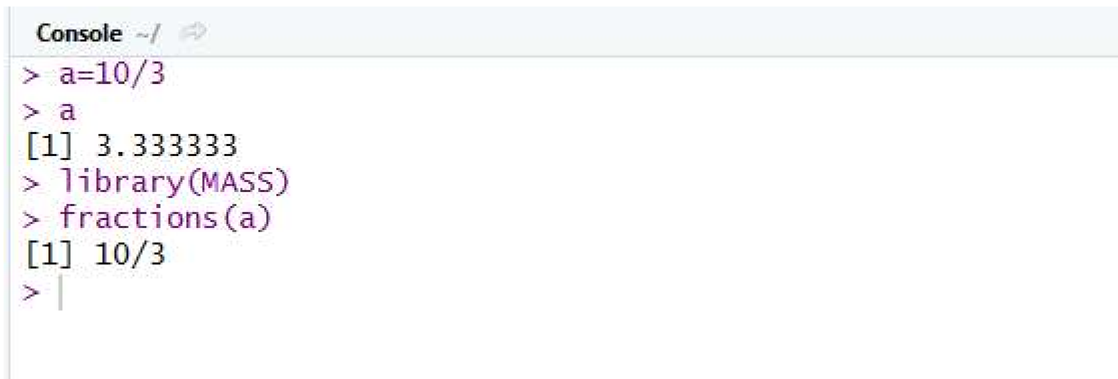
Seguidamente, con ayuda de las funciones que se encuentran en RScrip se van a volver a ingresar los datos. Para ello se seleccionan las funciones y se corre por medio de comando RUN que se encuentra en la parte superior del RScrip.



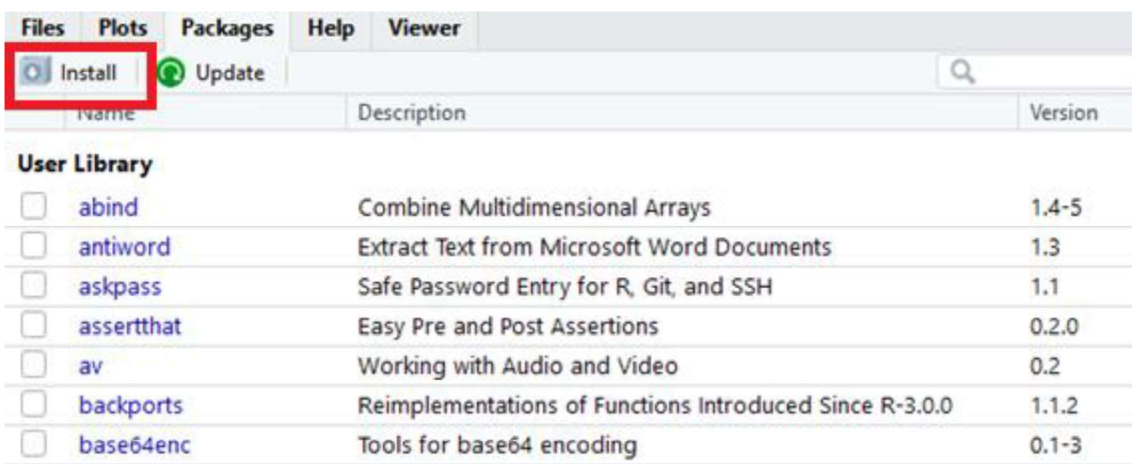
Instalación de paquetes de R

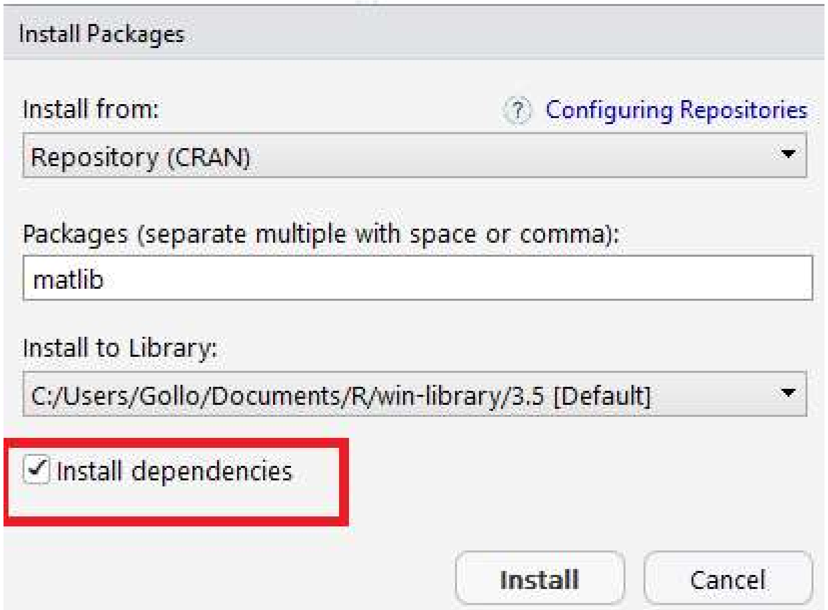
En la parte derecha inferior se hace clic a Package. Muestra los paquetes que se encuentran instalados, para utilizarlos se emplea en la consola la función library (nombre del paquete).

Ejemplo: Ingresar el valor a=3/10. Utilizar el paquete MASS para visualizarlo en forma fraccionaria por medio de la función fractions().



Para instalar paquetes se da clic a Install y se muestra una ventana. Basta indicar el nombre del paquete para instalarlo. Se va a instalar el paquete matlib y es importante indicar la instalación de dependencias en la ventana.





4.4.3 Guía de Video 2

Lenguaje de programación *R* con ejemplos

Objetivo del video: Introducir el lenguaje de programación de R, por medio de ejemplos para la manipulación de funciones, lenguaje condicional (if else) y bucles (for, while) en R.

Explicación introductoria del video: Este video explica cómo utilizar el lenguaje de programación de R. Los ejemplos están orientados a la utilización de funciones, bucles y lenguaje condicional en programación.

Programación en *R*

Estructura de while: *while(Condición para efectuar la operación) { Operación que se quiere realizar}*

Estructura de if: *if(Condición) { Operación que se quiere realizar si la condición es cierta }else{Operación que se quiere realizar si la condición es falsa }*.

Estructura for: *for(i in v){instrucción con i}*, *i* variable y *v* es un vector.

Ejemplo: Considerando un valor entero m cualquiera . Programar con while la siguiente condición recursiva: Para valores de m menores a 30, efectué la siguiente operación $m = m^2 + m + 1$. Observar el valor resultante de m.

```
m=-1 # Numero entero
while(m<30){m=m^2+m+1}
m
```

```
## [1] 183
```

Lo que realiza la condición while es lo siguiente:

Como $m = -1$ se cumple la condición $m < 30$, realiza la operación $m = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$.

Ahora $m = 1$ se vuelve a cumplir la condici?n $m < 30$, realiza la operación $m = (1)^2 + (1) + 1 = 3$.

Sucesivamente realiza este proceso hasta llegar con una condición que no cumpla que $m < 30$.

Para observar todos los valores de m se utiliza la función *print()* dentro de la programación del while.

```
m=-1
while(m<30){
  m=m^2+m+1
  print(m)}
m
```

Nota: En este ciclo se tiene que definir intuitivamente una condici?n para detener el ciclo. Como ejemplo, para $m = 0$ ingresar $while(m < 30)\{m = m^2 + m; print(m)\}$ en la consola de *R*. Se observa que la consola solo indica 0, para detener el ciclo se puede pulsar la tecla *esc* en el teclado o dar *stop* en la consola de *R*.

Ejemplo: Considerando un valor n cualquiera. Programar con if una instrucción que indique si el número es positivo o negativo.

Una opción es:

```
n=-15
if(n<0){
  print(" El número es negativo")
}else{
    print(" El número es positivo")
  }
```

Nota: Se pueden agregar más condiciones if en una misma instrucción.

Ejemplo: Considerando un valor n cualquiera. Programar con if una instrucción que indique si el número es positivo, negativo o cero.

```
n=0
if(n<0){
  print(" El número es negativo")
  }else if(n>0){
    print(" El número es positivo")
  }else{
      print(" El número es cero")}
```

Ejemplo: Programar la suma de números naturales consecutivos del 1 al 50 con *for*.

Por lo general en la programación se utilizan contadores iniciales para guardar los datos resultantes. Para este ejemplo, se utilizará una variable llamada *suma* fuera de la instrucción *for* y el valor va a ser a un inicio de 0.

```
suma=0
for(i in 1:50){suma=suma+i}
suma
```

El procedimiento del *for* es el siguiente:

La suma empieza en cero. Cuando $i = 1$: $suma = 0 + 1 = 1$.

Luego, del proceso anterior la $suma$ es 1 y el contador se mueve una unidad $(i = 2)$, lo cual se obtiene $suma = 1 + 2$. El proceso continua sucesivamente hasta que el contador i llegue a 50.

Programación de funciones (function) en *R*: Se habla de funciones a todas aquellas expresiones acompañadas con paréntesis $()$. Por defecto *R* posee una variedad de funciones, como es el caso de la función para ingresar vectores *c()*. En esta parte el enfoque está en programar funciones para ser utilizadas.

Estructura: *nombre de la función = function (variable o variables){ Instrucciones para la función}*.

Ejemplo: Programar una función llamada *idnum* que indique si el número es positivo, negativo o cero.

```
idnum = function(n){
 if(n<0){
  print(" El número es negativo")
  }else if(n>0){
   print(" El número es positivo")
   }else{
    print(" El número es cero")
   }}
#### Para llamar a la función
idnum(3)
idnum(0)
idnum(-6)
```

Ejemplo: Programar una función llamada *suman* que permita realizar la siguiente sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

```
suman=function(n){
  suma=0
  for(i in 1:n){suma=suma+i}
  return(suma)
}
#### Para llamar a la función
suman(10)
suman(4)
suman(100)
```

La función *return()* sirve para devolver el valor final en la función.

Otra forma para hacer esta función es utilizando el siguiente resultado.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

De esta manera la función *suman* puede programarse de esta manera

```
suman=function(n){
 suma=n*(n+1)/2
 return(suma)
}
#### Para llamar a la función
suman(10)
suman(4)
suman(100)
```

4.4.3 Video 3: Funciones de R para los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

Objetivo del video: Utilizar funciones de *R* para los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, por medio de ejemplos para su manipulación.

Explicación introductoria del video: Este video explica cómo utilizar las funciones de *R* para ingresar vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Ingreso de vectores en *R*

Para el ingreso de vectores en *R* se utiliza la función $c(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es el vector con el que queremos trabajar.

Ejemplo 1: Ingresar los siguientes vectores $z = (5,1,3)$ $v = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$, $w = (2,2,2,2)$, x vector vacío, $y = (1,3,5,7,9)$ en *R*.

Para ingresar z solo digitamos lo siguiente en la consola de *R*

```
z=c(5,1,3)
```

R posee funciones particulares para ingresar vectores. Se observa que las entradas de v son números enteros consecutivos del 1 al 10, por lo cual se puede utilizar el siguiente comando a:b el cual obtiene números enteros consecutivos de a hasta b.

Nota: Se puede utilizar la función $c()$, también se puede omitir dando el mismo resultado.

```
v1=1:10
v2=c(1:10)
```

Ahora, se ve que el vector w se compone de cuatro elementos repetidos, que en este caso son 2. Para este tipo de vectores se utiliza la función $rep(a, n)$ donde a es el número que se quiere repetir y n la cantidad de veces.

```
w=rep(2,4)
```

Para la creación del vector vacío se utiliza solamente la función $c()$ sin valores. Esta función es útil para la programación.

```
x=c()
```

Para ingresar el vector y se utiliza la función $seq(a, b, by = n)$ donde a es un valor inicial y b valor final de un intervalo y n es una constante que suma desde valor incial y toma los valores hasta finaliza el proceso en el valor final.

```
y=seq(1,10,3)
```

Operaciones con vectores

Si $u = (u_1, \cdots, u_n)$,$v = (v_1, \cdots . v_n)$ son vectores, se definen:

Suma de vectores: $u + v = (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n)$

Resta de vectores: $u - v = (u_1 - v_1, \cdots, u_n - v_n)$

Producto punto: $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

Norma de vector: $||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_1^n}$

Distancia entre vectores: $d(u, v) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \cdots + (v_n - u_n)^2}$

Ejemplo 2: Considere los vectores $u = (3,10,11,12,27)$, $w = (3,4,15,18,28)$.

Para realizar $u + w$ y $u - w$ se utilizan las operaciones usuales.

```
u=c(3,10,11,12,27)
w=c(3,4,15,18,28)
Vsuma=u+w
Vresta=u-w
```

Observe que se agregó el nombre de las operaciones como *Vsuma* y *Vresta*. Esto se realiza con el propósito para utilizar el resultado, después solo indicando el nombre que se asigna.

Para realizar el producto punto $u \cdot w$ se utiliza el operador $\% * \%$.

```
u=c(3,10,11,12,27)
w=c(3,4,15,18,28)
Rprodpun=u%*%w
```

Para la norma del vector u se utiliza la función $sqrt()$ para sacar la raíz cuadrada de $u \cdot u = u_1^2 + \ldots + u_n^2$

```
u=c(3,10,11,12,27)
Rnorma=sqrt(u%*%u)
```

Ejercicio

```
u=c(3,10,11,12,27)
w=c(3,4,15,18,28)
V=u-w
R=sqrt(V%*%V)
```

Matrices

La función que permite ingresar matrices en *R* es *matrix(v,nrow=m,ncol=n,byrow=TURE)* donde v es un vector con las entradas de la matriz, m número de filas, n número de columnas y se ingresa $byrow = TRUE$ para indicar que el vector v se encuentra acomodado en orden de las filas.

Ejemplo 3: Ingresar la matriz A en *R*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Si se utiliza *byrow=TRUE* en la función matrix, el vector que se tendría que ingresar es (2,0,4,3,6,2).

```
M=matrix(c(2,0,4,3,6,2),nrow = 3,ncol = 2,byrow = TRUE)
```

Nota: Se puede solo indicar el número de filas o columnas.

```
M=matrix(c(2,0,4,3,6,2),ncol = 2,byrow = TRUE)
```

Otra forma seria ingresar el vector en orden de columnas y no se indica *byrow=TRUE* en la función *matrix()*.

```
M=matrix(c(2,4,6,0,3,2),ncol = 2,byrow = TRUE)
```

Funciones para matrices

- **Suma de matrices:** A+B
- **Resta de matrices**: A-B
- **Producto escalar k a una matriz:** $k * A$
- **Producto de matices:** $A\% * \%B$
- **Inversa de la matriz A cuadrada (en caso de existir):** *solve(A)*
- **Determinante de la matriz cuadrada A:** *det(A)*
- **Transpuesta de la matriz A:** *t(A)*

Ejemplo: Considerando la matriz A para realizar las siguientes operaciones matriciales

$|A|A$, $A^{-1}A$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
A=matrix(c(2,0,3,4,3,1,6,2,0),ncol=3,byrow=TRUE)
det(A)*A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]  -68    0 -102
## [2,] -136 -102  -34
## [3,] -204  -68    0
```

```
solve(A)%*%A
```

```
##              [,1]         [,2] [,3]
## [1,] 1.000000e+00 0.000000e+00    0
## [2,] 0.000000e+00 1.000000e+00    0
## [3,] 2.220446e-16 5.551115e-17    1
```

Al observar el resultado de $A^{-1}A$, se sabe que al efectuar la operación da como resultado la matriz identidad de tamaño 3x3. Por efecto de los métodos de la computadora da el resultado que no es igual a la matriz identidad.

Sin embargo, el paquete *MASS* posee una función llamada *fractions()* que permite visualizar los resultado en forma fraccionaria.

```
library(MASS)
A=matrix(c(2,0,3,4,3,1,6,2,0),ncol=3,byrow=TRUE)
fractions(solve(A)%*%A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] 1    0    0
## [2,] 0    1    0
## [3,] 0    0    1
```

Sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales se utiliza la función *solve(A,b)* donde A es la matriz de coeficientes y b un vector de los resultados del sistema.

Ejemplo: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con *R*

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 4y + 6z = -2 \\ 3x + 5y + 7z = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

El primer sistema posee solución única.

```
A=matrix(c(1,-2,-1,3),ncol=2,byrow=TRUE)
a=c(-1,3)
solve(A,a)
```

```
## [1] 3 2
```

La interpretación de la solución es $x = 3$, $y = 2$.

El segundo sistema la solución depende de parámetros.

```
B=matrix(c(1,2,3,2,4,6,3,5,7), ncol=3,byrow = TRUE)
b=c(-1,-2,3)
solve(B,b)
```

```
## Error in solve.default(B, b): Lapack routine dgesv: system is exactly singular: U[3,3] = 0
```

El tercer sistema no tiene solución, al igual que el anterior sistema *R* proporciona un error.

```
C=matrix(c(1,-2,1,-2),ncol=2,byrow=TRUE)
c=c(-1,0)
solve(C,c)
```

```
## Error in solve.default(C, c): Lapack routine dgesv: system is exactly singular: U[2,2] = 0
```

4.4.4. Título de video: Paquete *rSymPy* de R para los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales con variables simbólicas.

Objetivo del video: Utilizar funciones de *Python* en *R* para los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales para definir variables simb?licas.

Explicación introductoria del video: Este video explica cómo utilizar el paquete *rSymPy* que es un paquete que permite trabajar variables simbólicas en *R*. Por ejemplo, no podemos definir desde la consola de *R* una variable *x*.

Primero se instala el paquete *rSymPy*. Para utilizarlo luego de cargar el paquete, se introduce la función *sympyStart()*, para que no haya errores en su utilización.

```
library(rSymPy)
sympyStart()
```

El lenguaje de programación es diferente al de *R*, por lo cual se explica a continuación su utilización.

Definir variables Ejemplo: Definir las variable a y b con la función *Var* de *rSymPy*. Realizar las siguientes operaciones

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}, \quad (a+b)^2$$

.

```
a=Var("a")
b=Var("b")
a/2+a/2
```

Ahora, se observa que sucede cuando se realiza $(a+b)^2$.

```
a=Var("a")
b=Var("b")
(a+b)^2
```

Para obtener el resultado la función *sympy("procedimiento")* y la función *simplify()* de SymPy. Se utiliza $**$ para las potencias.

```
a=Var("a")
b=Var("b")
sympy("simplify((a+b)**2)")
```

Matrices Se resumen las siguientes funciones que se utilizan en *SymPy*. Etas se introducen dentro de la función *sympy()* y entre comillas.

Suma de matrices: $A+B$

Producto de matrices: $A*B$

Producto escalar por matriz: $k*A$

Potencia de matrices: $A**k$

Inversa de matrices: $A**-1$

Transpuesta de matrices: $A.T$

Matriz Identidad: $eye(n)$

** Matriz Nula:** $zeros(m,n)$

Determinantes: $A.det()$ Ejemplo: Ingresar la matriz A y calcular $A^tA - x^2I_3$ con I_3 la matriz identidad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$$

```
library(rSymPy)
sympyStart()
x=Var("x") #Definir variable x
sympy("A = Matrix([[0,1,x], [1,x,0],[1,2,x]])")
cat(sympy("A = Matrix([[0,1,x], [1,x,0],[1,2,x]])"))
```

La función *cat()* permite visualizar la matriz de mejor manera.

Sistemas de ecuaciones lineales:

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax & + & by & - & cz & = & k \\ ex & - & fy & + & gz & = & u \\ hx & - & iy & + & jz & = & v \end{cases}$$

Se utiliza la función *Eq()* en *SymPy* para indicar ecuaciones. Como ejemplo *Eq(ax+ by - cz,k)* nos indica la ecuaci?n $ax + by - cz = k$. La función que permite resolver sistemas de ecuaciones es *solve([ecuaciones separadas por comas],(variables separadas por coma))*

```
x=Var("x")
y=Var("y")
z=Var("z")
sympy("solve([Eq(x + y + z ,- 1),Eq( x + y + 2*z ,- 3) ], (x, y, z))")
```

Capítulo V. Conclusiones y Recomendaciones

5.1. CONCLUSIONES

En cuando el objetivo general planteado que indica "Elaborar una propuesta didáctica que posea actividades para el uso de vídeos tutoriales que traten el uso del software *R* como un apoyo para la enseñanza de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales en el curso MAC411 Álgebra lineal de la carrera Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional", se puede concluir que la aplicación del análisis didáctico, en particular el análisis de instrucción, proporcionó las herramientas necesarias para la construcción de una propuesta didáctica para temas del curso de álgebra lineal y que además, consideran las especificaciones de aprendizajes planteadas en el programa de estudio BLEM-2017.

Con respecto al objetivo específico de "Revisar libros de texto o cualquier otro material de Álgebra Lineal para la elaboración del Análisis de Contenido en los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales según las especificaciones establecidas en el BLEM-2017 para el curso MAC411 Álgebra Lineal", permitió visualizar que el orden de los temas de Matrices y Sistemas de ecuaciones lineales puede variar. Es decir, dependiendo del enfoque que se desee dar a la asignatura, se puede impartir, por ejemplo, primero el tema de sistemas de ecuaciones lineales y después el de Matrices. En este aspecto, el diseño de la propuesta didáctica abarcó el orden establecido en BLEM-2017 que considera primero Matrices, luego Determinantes y por último Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Asimismo, la revisión bibliográfica de temas sobre Álgebra Lineal permitió, por una parte, seleccionar ejercicios en los cuales los estudiantes pueden incurrir a errores y, por otra, dotar a los docentes que imparten el curso MAC411 Álgebra Lineal, de material para ser utilizado en clase y así promover actividades con las que se puedan evidenciar los errores en que incurren los estudiantes y aprender de ellos.

En esta misma línea, resulta relevante determinar el nivel de habilidad con que cuentan los estudiantes en la educación secundaria y universitaria, en relación con los tópicos relacionados con matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes, ya sea por conocimientos previos o bien como parte del desarrollo de las competencias del curso. No obstante, debido a la pandemia de COVID-19 es posible que se suprimieran temas en la asignatura de matemáticas de la educación secundaria, por lo que en este caso el uso de vídeos, como los propuestos en esta investigación, pueden servir como complemento o herramienta para impartir el curso.

Con respecto al objetivo específico "Describir errores o limitaciones en el aprendizaje de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, por medio de la consulta de material o investigaciones relacionados a los temas de la propuesta" se concluye, que los errores que pueden presentar los estudiantes cuando cursan Álgebra Lineal son de notación, compresión del tema, errores en habilidades algébraicas por no manejar el tema y la confusión al relacionar las operaciones usuales con las operaciones matriciales.

En cuanto los objetivos específicos de "Seleccionar problemas y ejercicios de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales para la elaboración de actividades de la propuesta didáctica" y "Seleccionar ejercicios para la enseñanza de los temas de matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinante en el curso MAC411 Álgebra Lineal que posibiliten el uso del entorno estadístico *R* para su resolución", se concluye que la selección, adaptación y creación de ejercicios es importante para el desarrollo de actividades contempladas en la propuesta didáctica.

Con relación al objetivo específico de "Crear Vídeos tutoriales, que muestren el uso del entorno estadístico *R* para la resolución de los ejercicios seleccionados sobre los temas de matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes en el curso MAC411 Álgebra Lineal", se concluye que los vídeos tutoriales son un recurso valioso en temas de matemáticas y al del aprendizaje de un software.

Tras la emergencia surgida por la pandemia de COVID-19, se presentó un cambio metodológico y evaluativo en la enseñanza tradicional, al tener que hacer un uso intensivo de la tecnología como medida ante el cierre de las instituciones educativas. En este contexto, la creación de contenido relacionado con la enseñanza por medio de vídeos y aplicaciones, entre otras herramientas diferentes a la tradicionales, resultaron ser recursos valiosos para impartir lecciones en todos los niveles educativos.

Si bien las actividades de este proyecto se plantearon teniendo en cuenta que los docentes iban a estar en una modalidad presencial, la pandemia obligó a la reformulación de lo inicialmente propuesto y fue necesario realizar adaptaciones. No obstante, se evidencia que la creación de vídeos como se planteó inicialmente, resultó ser más que adecuada, ante la obligación de utilizar de manera constante herramientas diferentes a las tradicionales para enseñar.

Con respecto al objetivo específico de “Validar la funcionalidad y calidad técnica de los vídeos tutoriales diseñados a partir del criterio de expertos, para la elaboración de una versión mejorada de los vídeos tutoriales en cuanto al contenido temático, visual, auditivo y estético”, se concluye que la revisión de los vídeos y de la propuesta didáctica diseñada como parte de validación, resulta valiosa para corregir todos aquellos errores o limitaciones que puedan tener con base en la experiencia de docentes que imparten clases a nivel de universidad

En cuanto la selección del software R y su entorno de desarrollo RStudio como apoyo en el aprendizaje, su elección se debió principalmente para contar con una gran variedad de paquetes, manuales y recursos en línea que pueden ser aprovechados. Dichos programas, suelen actualizarse con frecuencia, por lo cual se recomienda la instalación de sus últimas versiones o utilizar su versión en línea.

5.2. RECOMENDACIONES

Recomendaciones a docentes

Para la aplicación de la propuesta diseñada, se recomienda a los profesores que imparten el curso MAC411 Álgebra Lineal la utilización de versiones recientes de los programas R y RStudio.

La propuesta didáctica diseñada se elabora a partir de los criterios establecidos en la primera versión del Plan de Estudio BLEM-2017. En el 2021 la Escuela de Matemáticas propuso cambios en el Plan de Estudio, por ello en caso de la aplicación o adaptación de la propuesta didáctica debe tomar en cuenta los actuales requerimientos del curso.

Recomendaciones a la Escuela de Matemáticas

El abordaje de programas tecnológicos o la utilización de material didáctico es una buena elección para desarrollar habilidades de cursos con enfoque por competencias. Puede facilitar la comprensión de temas prácticos y teóricos.

LIMITACIONES

A causa de la pandemia, se modificaron los objetivos específicos para en el desarrollo del Trabajo Final de Graduación. Entre las limitaciones del estudio se encuentran:

- Conseguir profesores universitarios de matemáticas que colaboraran en la revisión de la Propuesta Didáctica y en los vídeos tutoriales, debido a que se encontraban en preparación y adaptación de modalidades virtuales. Se pudo optar de la validación de la Propuesta Didáctica por medio de la aplicación de la misma a los estudiantes MAC411 Álgebra Lineal, sin embargo, no se realiza por la misma situación de emergencia y adaptación de modalidad virtual.
- Se logró la revisión de cuatro docentes que revisaron la propuesta didáctica y los vídeos tutoriales. Se contemplaba una mayor cantidad de profesores para la revisión.
- Aun un principio, se planteó tener en cuenta el criterio de profesores universitarios de matemáticas, que se encontraban impartiendo el cualquier curso de Álgebra Lineal, para conocer los principales errores que cometen los estudiantes en dicho curso.

Adicionalmente, se proponen las siguientes interrogantes que no fueron estudiadas en el Trabajo Final de Graduación, para futuros trabajos de investigación:

¿Existe diferencias en aplicar una metodología tradicional comparada con la metodología de la Propuesta Didáctica?

¿Cuáles son los errores específicos que cometen los estudiantes del curso MAC 411 Álgebra Lineal?

¿La utilización de los programas R y RStudio proporcionan un mayor entendimiento en los temas de matemáticas?

Tomando en cuenta otras teorías de diseño de Propuestas Didácticas, ¿Cuál diseño es mejor para la elaboración de Propuestas Didácticas, para el desarrollo de habilidades en Álgebra Lineal?

Referencias

Acuña, R. (2014). Matrices y sus aplicaciones. Escuela de Matemáticas TEC.

Anton, H. (1994). Introducción al Álgebra Lineal. Editorial Limusa: México

Ander-Egg, E. (2014). *Diccionario de educación*. Córdoba, AR: Editorial Brujas. Tomado de http://www.ebrary.com

Angulo, J. F. (1994). ¿A qué llamamos curriculum?. En R. Angulo, J. Félix y N. Blanco (Eds.) (1994). *Teoría y Desarrollo del Currículum* (pp. 17-29). Málaga: Aljibe.

Arce, C., Castillo, E. y Gonzáles, V. (2003). *Algebra lineal*. Costa Rica: Editorial UCR.

Apóstol, T. (2001). Cálculo: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Segunda edición. Ed. Reverte Ediciones

Apóstol, T. (2012). Cálculo: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Editorial Reverte

Axler, S. (2015) Linear algebra done right, third. Springer.

Barrantes, H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. Segunda edición. Costa Rica: EUNED.

Barros, P., Mendes, C., & Fernandes, J. A. (2013). Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco, & F. Viseu (Orgs.), Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 295-308). Braga: Centro de Investigación en Educación de Universidad de Minho. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/55627391.pdf

Bartolomé, A. (1999). El diseño y la producción de medios para la enseñanza. En Cabero, J. (Ed.) Tecnología Educativa. Madrid: Síntesis, 71-86.

Beaudin, B. y Quick, D. (1996). Instructional video evaluation instrument. *Journal of Extension, 34(3), n3*. Recuperado de https://www.joe.org/joe/1996june/a1.php

Beezer, R. (2011) Sage for linear algebra, A Supplement to A Firts Course in Linear Algebra. Recuperado de http://www.faculty.luther.edu/~bernatzr/CoCalc/Sage_LinAlg.pdf

Bengtsson, H., Jacobson, A. y Riedy, J. (2018). *Read and Write MAT Files and Call MATLAB from Within R*. Recuperado de https://cran.r-project.org/web/packages/R.matlab/index.html

Bocher (1907). Introduction to higher algebra. MacMillan Company. Recuperado de https://download.tuxfamily.org/openmathdep/algebra/Higher_Algebra-Boucher.pdf

Bozzalla, Analía; García, Silvina Aída (2015). *Análisis de los errores cometidos en el elemento matemático sistemas de ecuaciones lineales de 2x2*. Premisa, 66, pp. 20-33. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/22942/

Cabero, J. y Llorente, M. (2013). La aplicación del juicio de experto como técnica de evaluación de las tecnologías de la información y comunicación (TIC). *Revista de Tecnología de Información y Comunicación en Educación, 7*(2), pp. 11-22 Recuperado de http://www.mriuc.bc.uc.edu.ve/handle/123456789/1175

Carmona, F. y Subirana, I. (2015). Taller 2: Shiny: aplicaciones web interactivas con r. *VI Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Estadísticas y la Investigación Operativa, pp*. 21-42. Congreso llevado a cabo en Universidad de Huelva, Huelva.

Carranza, M., Andino, G., Miró Erdmann, S., & Baracco, M. (2009). Una propuesta de enseñanza-aprendizaje integradora de algebra lineal en el marco de formación de competencias. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/17581/

Cleve Moler. (2018). Matrix Laboratory (MATLAB).Recuperado de https://la.mathworks.com/products/matlab.html

Costa, V., Rossignoli, R., Sorichetti, S. y Vampa, V. (2015). Algebra Lineal con Aplicaciones, Parte I. Universidad Nacional de la Plata

Costa, V., Rossignoli, R., Sorichetti, C., & Vampa, V. (2018). Álgebra lineal con aplicaciones. Editorial de la Universidad de La Plata, Primera edición. Buenos Aires, Argentina.

Crovi, D. (2002). Sociedad de la información y el conocimiento: entre el optimismo y la desesperanza. Revista Mexicana de Ciencias políticas y sociales, 45(185), 13-33. Recuperado de https://www.ssoar.info/ssoar/handle/document/59457

Data Camp (2022). Página de Inicio cursos Data Camp. https://www.datacamp.com/

De Cabezón, E. (2015). *Derivando*. Recuperado de https://www.youtube.com/channel/UCH-Z8ya93m7_RD02WsCSZYA/featured

Del Valle, Juan C. (2012) Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias. Mc Graw Hill. México.

Dorrego, E. (1994). Modelo para la producción y evaluación formativa de medios instruccionales, aplicado al video y al software. *Revista de Tecnología Educativa, 12(3)*, pp. 313-327. Recuperado de http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Maestria/MGIEMV/DisenoMatDidactEV10/materiales/Unidad%205/Lec1_ModProdEvalMediosInstr_U5_MGIEV001.pdf

Escuela de Matemática UNA (2017). *Plan de estudios carrera de bachillerato y licenciatura en Enseñanza de la Matemática con salida lateral al profesorado (BLEM-2017).* Recuperado de http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentacion-digital/category/7-planes-de-estudio

Estrada, A. (2016). Estrategias didácticas bajo el enfoque de competencias: aplicación del uso de herramientas de forma interactiva. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 6*(12), 398-411. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/4981/498153966022.pdf

Fieller, N. (2015). Basics Of Matrix Algebra for Statistics with R. London, NY: CRC Press.

Friedberg, S., Insel, A. y Spence, L. (2014). Linear algebra, third ed., Prentice Hall.

Friendly, M., Fox, J., Monette, G., Sanchez, G. y Chalmers, P. (2018) *matlib: Matrix Functions for Teaching and Learning Linear Algebra and Multivariate Statistics.* Recuperado de: https://cran.r-project.org/web/packages/matlib/index.html

Fuentes, D., Hernández, M. y Pra, I. (2013). El mini video como recurso didáctico en el aprendizaje de materias cuantitativas. *RIED. Revista Iberoamericana De Educación a Distancia, 16*(2), 177-192. doi:http://dx.doi.org/10.5944/ried.16.2.9911

Graraje, I. (2018). Costa Rica tira al mar 15 camiones de plástico por día [Noticia en línea]. Recuperado de https://www.tec.ac.cr/hoyeneltec/2018/06/05/costa-rica-tira-mar-15-camiones-plastico-dia

Grothendieck y Gil, C. (2015). *R interface to SymPy computer algebra system*. Recuperado de https://cran.r-project.org/web/packages/rSymPy/index.html

Galán Fajardo, E. (2007). El guión didáctico para materiales multimedia. *Espéculo Revista de estudios literarios*. Recuperado de https://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/5555/guion_didactico_multimedia.html?sequence=1&isAllowed=y

Galindo, A. (2017). Didáctica con R. Menos cuentas y más pensamiento crítico. *Pensamiento Matemático, 7(1),* 53-73. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6000064

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-292. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1537/

González, Andrés (2014). Enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal a través de sus relaciones intra e inter matemáticas. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 959-967). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5653/

González, F. (s.f.). *Apuntes para el curso de Álgebra lineal* (sin publicar).

Gutiérrez, A. (1991). La investigación en la didáctica de las matemáticas. En Gutiérrez, A. (ed.), *Área de conocimiento didáctica de la matemática*, (pp. 149-195). Madrid: Síntesis.

Grossman, S. y Flores, J. (2012). Algebra lineal. México: McGraw-Hill.

Hernández, L. y Caballero, M. (2009). *Aprendiendo a enseñar: una propuesta de intervención didáctica para una enseñanza de calidad*. Editorial CCS.

Hojsgaard, S. (2011). *Introduction to linear algebra with R*. Recuperado de http://galton.uchicago.edu/~meiwang/courses/Hojsgaard-linalg-R.pdf

INRIA. (2017). Software Scilat. Recuperado de https://www.scilab.org/en/scilab/about

Isaacs, R. y Sabogal, S. (2009). Aproximación al álgebra: un enfoque geométrico. Recuperado de http://matematicas.uis.edu.co/libros/l_lineal.pdf

Kolman, B., y Hill, D. R. (2006). Álgebra lineal. Pearson Educación.

Lang, S. (1990) Introducción al Algebra Lineal. España: Addison Wesley

Lay, D. (2012) Álgebra Lineal Elemental y sus Aplicaciones. Tercera edición. Pearson. México.

Lay, D. (2013). Álgebra lineal para cursos con enfoque por competencias. Pearson Educación

Lipschutz, S., y Lipson, M. L. (2009). Linear algebra. MacGraw-Hill.

López, N. (2010). Antecedentes Históricos del Algebra Lineal. Facultad de Ingeniería de la UNAM, México D.F.

López, M. (2013). La planeación para el aprendizaje en el ABC. En López, M. (Ed.), Aprendizaje, competencias y TIC's (pp. 73-94). México: Editorial PEARSON.

Lupiáñez, J. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En Rico, L., Lupiáñez, J. y Molina, M. (Ed.), Análisis Didáctico en Educación Matemática (pp. 81-102). Granada: Editorial COMARES

Luzardo, D., y Pena, A. J. (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. Divulgaciones Matemáticas, 14(2), 153-170. Recuperado de https://www.emis.de/journals/DM/v14-2/art6.pdf

Marín, A. (2013). El análisis de instrucción: instrumento para la formación inicial de profesores de secundaria. En Rico, L., Lupiáñez, J. y Molina, M. (Ed.), Análisis Didáctico en Educación Matemática (pp. 103-120). Granada: Editorial COMARES

Márquez, F., López, L. y Pichardo, V. (2008). Una propuesta didáctica para el aprendizaje centrado en el estudiante Apertura. *APERTURA vol. 8(8),* pp. 66-74. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=68811215005

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación cualitativa*. Madrid: Pearson Educación.

MEP (2012). *Programa de estudio de Matemática I y II ciclo de la Educación Primaria, III ciclo de educación general básica y educación diversificada*. San José, Costa Rica.

MEP (2018). Profe en Casa. Recuperado de https://www.mep.go.cr/profe-en-casa

Mora, W. (2016). Cómo utilizar R en métodos numéricos. *Revista Digital Matemática*, *16*(1), 1-72. Recuperado de http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2480

Mora, W, Páez, C., Alfaro, M, Chacón, E. Rodríguez, R. y Wynta R. (2018). Práctica del curso: Álgebra lineal para computación. Revista Digital Matemática. Recuperado de *https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/Libros/practicas/A-PRINCIPAL-Practicas-ALC-I-2018.pdf*

OECD. (2005a). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. España: Santillana Educación. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf

OECD. (2010). PISA 2012 Mathematics Framework. Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf

Ogalde, I. y Barbavid, E. (2008). *Los materiales didácticos*. México, DF: Editorial Trillas.

OREALC y UNESCO (2013) .*Enfoque estratégico sobre las Tics en educación en América Latina y Caribe*. Recuperado de http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/images/ticsesp.pdf

Oropeza, C. y Lezama, J. (2007). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 2(1)*, pp. 23-39. Recuperado de http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S1850-66662007000100002&script=sci_arttext&tlng=en

Ozdag, H. y Aygor, N. (2012). Misconceptions in linear algebra: the case of undergraduate students. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 46.

Ozdag, H. y Aygor, N. (2012). Misconceptions in linear algebra: the case of undergraduate students. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 46.

Panizza, M. Sadovsky, P., Sessa, C(1999). La ecuación lineal con dos variables : entre la unicidad y el infinito. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. Vol. 17, pp. 453-461. Recuperado de https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21603.

Paredes, Z., Iglesias, M., y Ortiz, J. (2009). Los docentes y su formación inicial hacia el aula de matemática. Una propuesta con modelización y nuevas tecnologías. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *7*(1), pp. 85-102. Recuperado de http://www.redalyc.org/html/551/55170107/

Páez, C. (2013). Matrices y sistemas lineales. Revista digital Matemática Educación e Internet. Recuperado de https://repositoriotec.tec.ac.cr/handle/2238/3062

Peña Lizano, A. E. Análisis de los errores y dificultades en la solución de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de ingeniería [Tesis de Grado Magister].

Pita, Claudio. (1991) Álgebra lineal con aplicaciones. Cuarta edición. Mc Graw Hill. España.

Pizano, G. (1998). Currículo por competencias. *Investigación Educativa*, *2*(2), pp. 5-14. Recuperado de http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/7460

Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). Cursos Virtuales Mini MOOC. Recuperado de http://cursos.reformamatematica.net/

Quecedo, R. y Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. Revista de psicodidáctica, 14, 5-40. Recuperado de http://www.redalyc.org/html/175/17501402/

R Core Team (2017). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL https://www.R-project.org/.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 9(33*). Recuperado de http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/801

Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de la Investigación. En Rico, L., Lupiáñez, J. L., y Molina, M. Análisis Didáctico en Educación Matemática (pp. 1-22). Editorial Comares.

Ripley, B., Venables, B., Bates, D., Hornik, K., Gebhardt, A. y Firth, D. (2018). *Support Functions and Datasets for Venables and Ripley's MASS*. Recuperado de https://cran.r-project.org/web/packages/MASS/index.html

Rodríguez, A., Moreno, J. y Trigos, M. (2016). Los vídeos tutoriales como herramienta formativa. *Revista Ingenio UFPSO, 10*(1), 37-42. Recuperado de http://revistas.ufpso.edu.co/index.php/ringenio/article/view/346

Rojas, E. y Sequeira, R. (2015). Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática. San José, Costa Rica: EUNED.

Rosales, G. (2012). *Diseño e implementación de talleres para la enseñanza y aprendizaje del álgebra matricial y solución de sistemas de ecuaciones lineales con Scilab* (Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales). Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/9099/

Rosales, G. (2010), "Uso de Matlabpara la enseñanza y aprendizaje de la solución de las ecuaciones lineales con enfoque geométrico para ingeniería", en Revista Ingeniería Solidaría, vol. 6, núm. 10, pp. 59-68. Recuperado de https://revistas.ucc.edu.co/index.php/in/article/view/452

RStudio Team (2020). RStudio: Integrated Development for R. RStudio, PBC, Boston, MA URL http://www.rstudio.com/

Ruiz, J. (2015). Taller 3: Creación y edición de vídeos como recurso didáctico. En *VI Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Estadísticas y la Investigación Operativa, pp*. 43-57. Congreso llevado a cabo en Universidad de Huelva, Huelva.

Santana, J. y Farfán, E.(2014). *El arte de programar en R: un lenguaje para la estadística*. México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Recuperado de https://cran.r-project.org/doc/contrib/Santana_El_arte_de_programar_en_R.pdf

Tobón, S., Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. México, DF: Prentice Hall.

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. In Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Vol. 5, pp. 2359-2368.

UNESCO (2005). Las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza: Manual para docentes o Cómo crear nuevos entornos de aprendizaje abierto por medio de las TIC. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0013/001390/139028s.pdf

Velarde, A., Dehesa, J., López, E. y Márquez, J. (2017). Los vídeo tutoriales como apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje y sus implicaciones pedagógicas en el diseño instruccional. *EDUCATECONCIENCIA*, *14*(15), 67-86. Recuperado de *http://tecnocientifica.com.mx/educateconciencia/index.php/revistaeducate/article/view/330*

Valencia, M (2021). Elaboración de un manual para la enseñanza de Álgebra Lineal usando el pensamiento computacional [Trabajo título de Magister en Enseñanza de la Matemática]. Recuperado de https://repositorio.espe.edu.ec/bitstream/21000/27123/1/T-ESPE-017462.pdf

Vergara, G., Avilez, A., y Romero, J. (2016). Uso de Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra Lineal. Revista de Matemática MATUA, 3(1), pp.83-91. Recuperado de *http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA/article/view/1512*

Vílchez, E. (2015a). Paquete VilGebra: recurso didáctico a través del uso del software Mathematica en el campo del álgebra lineal. Revista Digital Matemática, 15(1), pp. 1-73. Recuperado de *http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1997*

Vílchez, E. (2015b). VilGebra como recurso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. Trabajo presentado en XIV Conferencia Interamericana de la Educación Matemática, México, Chiapas. Recuperado de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/68/47

Vinod, H. D. (2011). *Hands-on matrix algebra using R: Active and motivated learning with applications*. USA: World Scientific Publishing Company.

Vinod, H. D. (2014). Matrix Algebra Topics in Statistics and Economics Using R. *In Handbook of Statistics,* Vol. 32, pp. 143-176. Recuperado de *https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63431-3.00004-8*

Wolfram, S. (2018). Software Mathematica. Recuperado de http://www.wolfram.com/mathematica/?source=nav

Zamora, J. y Arroyo, J. (2016). Edición de textos dinámicos con LATEX y R. V Encuentro sobre didáctica de la estadística, la probabilidad y el análisis de datos. Congreso impartido en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago.

Anexos

Productos del proyecto

Link de Vídeos

https://youtube.com/playlist?list=PL8cMDUioXON3nJbdbM3J2yIz4_tqK7qxw

Link de Propuesta didáctica

RPubs - Propuesta Didáctica - Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Instrumento para la evaluación de vídeos educativos

Título del video: ____

Tema del video: ____

Objetivo del video: ____

Nombre del experto evaluador: ____

Fecha: ______________________

Instrucciones: Por medio de la observación del video, indique con una X en cada uno de los criterios la calificación que considera adecuada, donde los valores corresponden a:

1. Muy malo 2. Malo 3. Regular 4.Bueno 5.Muy bueno

Además, realice una observación en cada uno de los criterios, sin importar la puntuación asignada.

Criterio de observación	Calificación					Observación
	1	2	3	4	5	
1. La calidad de la resolución del video es						
2. El audio del video es						

3. La duración del video es						
4. La organización de la secuencia del video es						
5. El tiempo de la explicación de la temática es						
6. Los ejemplos desarrollados son						
7. Letra utilizada en el video es						

8. La introducción del video es						
9. El desarrollo del objetivo en el video es						

Aspectos generales que se pueden mejorar en el video:

____

____

____

____

____

____

Muchas gracias

Instrumento para la evaluación de la propuesta didáctica

Instrucciones: Evalué cada uno de los siguientes criterios indicando con una **x** en el recuadro SI o NO se logró cumplir con lo indicado. Realice una observación en cada uno de los criterios sin importar la calificación.

Criterios	Observación		Observación
	NO	SI	
1. La propuesta didáctica desarrolla adecuadamente la competencia establecida.			
2. La propuesta didáctica desarrolla adecuadamente la subcompetencia establecida.			
3. El propósito general de la propuesta didáctica es pertinente para el aprendizaje.			

4. Se logra cumplir con los objetivos establecidos en la propuesta didáctica.			
5. Los ejemplos utilizados en la propuesta didáctica son adecuados para el aprendizaje establecido.			
6. El lenguaje y redacción utilizada en la propuesta didáctica es la adecuada.			
7. El tiempo establecido en la propuesta didáctica es adecuado para cumplir con el propósito de aprendizaje.			

8. La evaluación establecida en la propuesta didáctica, es la adecuada para cumplir con el propósito de la propuesta didáctica.			
9. La duración de las actividades en la propuesta didáctica es adecuada.			
10. Se contemplan los saberes necesarios para el desarrollo de la propuesta didáctica.			

Revisión de vídeos

En este apartado se muestra los resultados de la revisión de los vídeos diseñados.

Tabla 10: Valoración del Vídeo 1

Criterio de evaluación	Valoración			
	Completamente desacuerdo	**Desacuerdo**	**De acuerdo**	**Completamente de acuerdo**
La calidad de la resolución del vídeo es adecuada.			**2**	**1**
El audio del vídeo es el adecuado (permitiendo escuchar la explicación sin interrupciones y sin ruidos en el sonido).			**1**	**2**
La duración del vídeo permite la comprensión del tema abarcado.	**1**	**1**		**1**
La organización de		**2**	**1**	

la secuencia del vídeo es la adecuada.				
Los ejemplos desarrollados en los vídeos permiten la compresión del tema expuesto.			**2**	**1**
El vídeo permite visualizar de buena manera las letras e imágenes			**1**	**2**
La introducción del vídeo es la adecuada.			**2**	**1**
Se desarrolla el objetivo establecido en el vídeo.			**2**	**1**

Tabla 11: Valoración vídeo 2

Criterio de evaluación	**Valoración**			
	Completamente desacuerdo	**Desacuerdo**	**De acuerdo**	**Completamente de acuerdo**
La calidad de la resolución del			**2**	**1**

vídeo es adecuada.				
El audio del vídeo es el adecuado (permitiendo escuchar la explicación sin interrupciones y sin ruidos en el sonido).			**3**	
La duración del vídeo permite la comprensión del tema abarcado.			**2**	**1**
La organización de la secuencia del vídeo es la adecuada.	**1**		**1**	**1**
Los ejemplos desarrollados en los vídeos permiten la compresión del tema expuesto.		**1**	**2**	
El vídeo permite visualizar de buena manera			**2**	**1**

las letras e imágenes				
La introducción del vídeo es la adecuada.		**1**	**1**	**1**
Se desarrolla el objetivo establecido en el vídeo.			**2**	**1**

Tabla 12: Valoración video 3

Criterio de evaluación	**Valoración**			
	Completamente desacuerdo	**Desacuerdo**	**De acuerdo**	**Completamente de acuerdo**
La calidad de la resolución del vídeo es adecuada.			**2**	**1**
El audio del vídeo es el adecuado (permitiendo escuchar la explicación sin interrupciones y sin ruidos en el sonido).			**1**	**2**

La duración del vídeo permite la comprensión del tema abarcado.			**2**	**1**
La organización de la secuencia del vídeo es la adecuada.	**1**		**1**	**1**
Los ejemplos desarrollados en los vídeos permiten la compresión del tema expuesto.			**1**	**2**
El vídeo permite visualizar de buena manera las letras e imágenes			**1**	**2**
La introducción del vídeo es la adecuada.			**2**	**1**
Se desarrolla el objetivo establecido en el vídeo.		**2**		**1**

Tabla 13: Valoración video 4

Criterio de evaluación	**Valoración**			
	Completamente desacuerdo	**Desacuerdo**	**De acuerdo**	**Completamente de acuerdo**
La calidad de la resolución del vídeo es adecuada.			**1**	**2**
El audio del vídeo es el adecuado (permitiendo escuchar la explicación sin interrupciones y sin ruidos en el sonido).			**2**	**1**
La duración del vídeo permite la comprensión del tema abarcado.	**1**	**2**		
La organización de la secuencia del vídeo es la adecuada.		**1**		**2**

Los ejemplos desarrollados en los vídeos permiten la compresión del tema expuesto.		**2**	**1**	
El vídeo permite visualizar de buena manera las letras e imágenes			**1**	**2**
La introducción del vídeo es la adecuada.				**3**
Se desarrolla el objetivo establecido en el vídeo.				**3**

Tabla 14: Observación vídeo 5

Criterio de evaluación	**Valoración**			
	Completamente desacuerdo	**Desacuerdo**	**De acuerdo**	**Completamente de acuerdo**
La calidad de la resolución del			**1**	**2**

vídeo es adecuada.				
El audio del vídeo es el adecuado (permitiendo escuchar la explicación sin interrupciones y sin ruidos en el sonido).			**2**	**1**
La duración del vídeo permite la comprensión del tema abarcado.	**1**	**2**		
La organización de la secuencia del vídeo es la adecuada.		**3**		
Los ejemplos desarrollados en los vídeos permiten la compresión del tema expuesto.		**1**	**2**	
El vídeo permite visualizar de buena manera			**1**	**2**

las letras e imágenes				
La introducción del vídeo es la adecuada.			**1**	**2**
Se desarrolla el objetivo establecido en el vídeo.				**3**

De las tablas 10, 11, 12, 13 y 14, se encontró un acuerdo de los evaluadores de que el tiempo de los vídeos no es el adecuado, acuden a que son vídeos muy cortos y que se explica el contenido rápido.

Correcciones de los vídeos

En este apartado se describe las correcciones que se realizaron en cada uno de los vídeos, de acuerdo con los comentarios y sugerencias de los docentes revisaron los vídeos y de los resultados obtenidos en la escala de evaluación.

Los cambios sugeridos por los evaluadores son:

Observaciones Evaluador 1:

> Video 2 En el ejemplo del determinante sugiero separar, primero explicar la forma de obtener el determinante y luego mostrar otro ejemplo en que se utiliza. La misma observación para el ejemplo que incluye la inversa. Separar y explicar en ejemplo aparte lo relacionado con la inversa y luego utilizar en el otro ejemplo que incluye la operación con ella. En el caso del ejemplo relacionado con el sistema de ecuaciones indicar que un vector es para los coeficientes del sistema y el otro es para los términos independientes. Es mejor utilizar los nombres correctos que se utilizan en álgebra lineal.

Video 3 En es te video siento que va muy rápido. Podría hacerlo más despacio. Luego, al obtener el rango se hace una pausa que considero es muy amplia. Considero conveniente que una vez que aplica una función podría mencionarse el resultado obtenido. Ej.: Para la matriz A dada su rango es 4. Al igual que para La sección de cofactores, sugiero hacerlo uno por uno, con detalle, pues me parece que el video va muy rápido y eso hace que la persona se pierda con facilidad. También mencionar los valores de cofactor para la matriz dada son: Me parece que pasa muy rápido a la resolución de sistema de ecuaciones. Puede hacerlo con más calma. La misma observación para los gráficos. Indicar por separado y con detalle, los gráficos en 2D se obtienen de la siguiente forma y luego lo hace para el 3D. Video 4 En la portada del video 4 quitar la palabra temas En el video 4, se hace muy rápido lo de crear la cuenta de Rcloud. En mi caso no logré seguirlo. Tener cuidado con el convertidor de voz con los acentos o pronunciación de las palabras En el caso de la función symply y la transpuesta se comete un error, mejor editar el video y subirlo con la resolución correcta de lo planteado. Deja una impresión negativa subirlos con este tipo de dudas o errores. Video 5 En el video 5. Se está leyendo el ejemplo 2 y se está trabajando en R a la vez. La persona ni pone atención al problema, ni logra seguir lo que se está escribiendo en R. Primero lea el problema, luego explique lo que se va a hacer y finalmente, resuelva despacio con el software. Misma observación para el ejemplo 3. Explique para que son las matrices A, I, M D que está creando. Debe indicar lo que está haciendo para que la persona pueda seguirlo en la explicación.

Observaciones Evaluador 2

En general están bien. Recomendaría hacer una introducción más detallada que incluya el objetivo del video. También explicar al inicio de cada ejemplo lo que se persigue. En algunos ejemplos se va muy rápido, sería mejor pausar más la explicación. Hay momentos, cuando se digita que hay silencio, sería bueno hablar sobre lo que se digita para no dar la sensación de que hay fallas en el video. También sería bueno dar una despedida al finalizar cada video. Todo esto haría que la duración se incremente, pero valdría la pena.

Observaciones Evaluador 3

1.Los vídeos son muy cortos y rápidos, cuesta mucho entender lo que se está haciendo. 2. Es recomendable explicar un poco más que se va a hacer en cada vídeo. 3. Es importante validar también los resultados obtenidos. 4. Evite los errores de digitación dentro de la grabación. 5. Evite usar otras páginas web o aplicaciones durante la grabación.

Con los comentarios de los evaluadores, se realizó los cambios sugeridos. Entre las correcciones generales de los vídeos se encuentra: la modificación de la organización del vídeo, el contenido de los vídeos se explicó despacio, generando que los vídeos queden con más tiempo. y modificación de algunos ejemplos. También, se corrigieron errores de redacción y se amplió con más detalle en el contenido de los vídeos.

Universidad Nacional

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemática

Proyecto de graduación: Diseño de propuesta didáctica apoyada con videos tutoriales para la utilización del software R para la enseñanza de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales del curso MAC411 Álgebra Lineal de la carrera de Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional

Propuesta Didáctica de Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Versión Final

Francisco José Villalobos Madrigal

2022

Índice

Índice

Introducción

En esta propuesta didáctica se desarrollan los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales del curso MAC 411 Álgebra Lineal de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional.

Se proponen actividades para el desarrollo de las competencias matemáticas propuestas en el plan de estudio de la carrera y se introduce una guía para la utilización del software R para la solución de ejercicios de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

El software R es un entorno y lenguaje de programación estadística de licencia libre y multiplataforma (R Core Team, 2021). Existe un entorno de desarrollo llamado RStudio (RStudio Team, 2020) que facilita la utilización de la programación en R.

Se seleccionó este software, debido a que los software que existen especializados en Álgebra Lineal son de licencia de paga y por lo general requieren un espacio importante en el almacenamiento de la computadora. El software R, además de tener la facilidad de utilizarse en cualquier sistema operativo y tener licencia libre, posee paquetes y funciones especializadas para la resolución de ejercicios y problemas en diversos temas de matemática aplicada y estadística.

También, se encuentra una versión en línea de RStudio conocido como RStudio Cloud, que permite realizar proyectos y compartirlos con colaboradores.

Para la utilización del software R, se utilizará los siguientes paquetes:

- **matlib** : Paquete especializado para la enseñanza de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Con este paquete se puede obtener los procedimientos utilizados en los cálculos de la inversa de matrices, solución de sistemas de ecuaciones lineales, reducción Gaussiana. Además, permite visualizar la solución en forma fraccionaria(Friendly et al., 2021).
- **MASS**: Posee la función fractions que permite visualizar resultados en forma fraccionaria y resulta útil en algunos ejercicios (Venables & Ripley, 2002).
- **rSymPy**: SymPy es una paquetería de Python y permite trabajar calculo simbólico. Con este paquete se puede definir y realizar operaciones con variables(Grothendieck & Bellosta, 2019).

La propuesta se desarrolla en sesiones de clases y en cada sesión se incluyen actividades para desarrollar habilidades en los estudiantes. Las actividades son guiadas por el profesor, pero parte del trabajo sera elaborado por los estudiantes y se proponen links de videos que resuelven ejercicios de aplicación de los temas para la utilización del programa R.

Sesión de clase 1

Sub competencias desarrolladas
Conocer el concepto de matriz y el de igualdad de matrices Operaciones con matrices respetando las dimensiones de las matrices Componente histórico sobre el origen y aplicaciones de las matrices
Nivel de complejidad
Nivel I: Incluye acciones en su mayoría rutinarias, predecibles y elementales que permiten incorporar el conocimiento nuevo a las estructuras mentales previas

Matrices

Una matriz se puede definir de forma matemática como:

- **Definición 1:** Sean m y n dos números enteros positivos y cuyo dominio es $I_{m,n}$ el conjunto de todos los pares de enteros (i, j) tales que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Cualquier función A cuyo dominio $I_{m,n}$ se denomina matriz $m \times n$. El valor de la función $A(i, j)$ se llama elemento ij de la matriz y se designará también por a_{ij}. Ordinariamente se disponen todos los valores de la función en un rectángulo que consta de m filas y n columnas, del modo siguiente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \text{(Definición tomada de Apostol, pp. 733-734, 2001)}$$

Mientras que a nivel práctico, se puede encontrar la siguiente definición y la cuál suele desarrollarse en libros de texto de álgebra lineal:

- **Definición 2:** Una matriz es un arreglo rectangular de valores. Si m representa el número de filas y n el número de columnas, entonces el arreglo se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En algunos libros de referencias de álgebra lineal, se pueden encontrar la denotación de matrices de las siguientes formas: $A = A_{ij}$, $A = (a_{ij})$, $A = [a_{ij}]$, $A = a_{ij}$, $A = \langle A \rangle_{ij}$

Para el desarrollo de la propuesta didáctica se utiliza la notación $A = (a_{ij})$. Además, como se ven en ambas definiciones a nivel práctico se pueden presentar las matrices con paréntesis redondos o cuadrados.

En la práctica se suele definir las matrices por medio de una relación que pueden tomar las entradas.

Ejemplo 1: Considerando la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz A esta compuesta por 2 filas y 3 columnas. Cuando utilizamos la notación $A = (a_{ij})$, i identifica la posición de la fila y j de la columna.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Fila 1} \rightarrow \\ \text{Fila 2} \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por medio del reconocimiento de la posición de fila y columna, se pueden identificar el valor de la entrada, como ejemplo la entrada a_{11} tiene un valor de 7, mientras que la entrada a_{21} es 9.

En forma matemática se puede expresar el conjunto de matrices de m filas y n columnas con entradas reales con la notación $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. De esta forma la Matriz A del ejemplo pertenece al conjunto de la matrices $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ por tener 2 filas y 3 columnas.

Ejemplo 2: Sea $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, Ejemplo: Sea $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, se definen las entradas de la matriz A:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2\cdot i + j & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Se identifican las posibles combinaciones de pares ordenados que podemos formar con la cantidad de filas y columnas de la matriz. Los pares ordenados que podemos formar son:

$$(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3).$$

Los pares ordenados que cumplen las condición $i = j$ son $(1,1)$ y $(2,2)$. De esta manera

$a_{11} = 2\cdot 1 + 1 = 3,$

$a_{22} = 2\cdot 2 + 2 = 6,$

$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = 0.$

Siguiendo la definición por entradas, la matriz A se denota de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz cuadrada

Una matriz es cuadrada cuando tiene la misma cantidad de columnas y filas. El conjunto de matrices cuadradas con entradas reales se denota con $M_n(\mathbb{R})$.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada, el conjunto de los elementos a_{ij} tal que $i = j$, se conoce como la diagonal principal o diagonal de la matriz.

Ejemplo 3: Considerando la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 1 & \boxed{7} & 9 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal enmarcado con $\square$ son 1, 7 , 1.

Operaciones con matrices

Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, donde $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$. Se definen las siguientes operaciones de matrices:

Suma de matrices: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Resta de matrices: $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$

Ejemplo 4: Considerando las matrices A, B, C, D, E y F:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ 5 & 11 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 12 & 1 & -1 \\ 18 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 7 \\ 11 & 10 & -10 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 2 & 6 & -10 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -13 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Una condición necesaria para realizar la suma o resta de matrices, es que tengan el mismo tamaño. Con base a estas matrices podríamos realizar las siguientes operaciones: $A+B$, $A-B$, $C+D$, $C-D$, $D-C$, $E+F$, $F-E$, $E-F$.

Realizaremos como ejemplo de aplicar el procedimiento, las siguientes operaciones: $A+B$, $C-D$, $E+F$,$E-F$

$$A+B = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13+10 & 0+-14 \\ 2+5 & 10+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -14 \\ 7 & 22 \end{pmatrix},$$

$$C-D = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 12 & 1 & -1 \\ 18 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 9 & 7 \\ 11 & 10 & -10 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-10 & 10-9 & 9-7 \\ 12-11 & 1-10 & -1--10 \\ 18-1 & 3-10 & 4-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 1 & -9 & 9 \\ 17 & -7 & -8 \end{pmatrix},$$

$$E+F = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 2 & 6 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & -13 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 10+11 & 9+-13 \\ 2+1 & 6+10 & -10+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 & -4 \\ 3 & 16 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E+F = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 2 & 6 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 11 & -13 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-10 & 10-11 & 9--13 \\ 2-1 & 6-10 & -10-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 22 \\ 1 & -4 & -22 \end{pmatrix}.$$

Observación: No se puede realizar operaciones con diferentes tamaños de matrices, por ejemplo en el caso de la operación $A+F$ no se puede, debido a que la matriz A posee dos filas y dos columnas, es decir una matriz de tamaño 2×2, mientras que la matriz F posee 2 filas y 3 columnas, por lo cuál la matriz F es de tamaño 2×3.

Producto escalar: Sea $k \in \mathbb{R}$, entonces $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$

Ejemplo 5: Considerando las matrices A y B, realizaremos las siguientes operaciones: $5A$ y $-10B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ 5 & 11 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$5A = 5\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 & 5\cdot 10 \\ 5\cdot 6 & 5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 50 \\ 30 & 20 \end{pmatrix},$$

$$-10B = -10\begin{pmatrix} 10 & -14 \\ 5 & 11 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\cdot 10 & -10\cdot -14 \\ -10\cdot 5 & -10\cdot 11 \\ -10\cdot 6 & -10\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 & 140 \\ -50 & -110 \\ -60 & -80 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices: Sea $C \in M_{n\times q}(\mathbb{R})$, $C = (c_{ij})$ entonces

$$A \cdot C = (d_{ij}), \text{ donde } d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \cdot c_{kj}).$$

Detallando el procedimiento del producto de matrices

$$A \cdot C = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{\text{Tamaño } m\times n} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}}^{\text{Tamaño } n\times q}$$

La entrada $d_{11} = \sum_{i=1}^{n}(a_{1i} \cdot c_{i1}) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \cdots + a_{1n}c_{n1}$, lo que nos indica que se está esta sumando el producto de cada entrada de la fila 1 de la matriz A y la columna 1 de C, con respecto a la posición.

Esquema

Entrada d_{11}

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cccc} \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)}^{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow} \cdot \left(\begin{array}{|c|ccc} \downarrow c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ \downarrow c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \downarrow \vdots & \vdots & & \vdots \\ \downarrow c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nq} \end{array}\right)$$

Entrada d_{21}

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)}^{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow} \cdot \left(\begin{array}{|c|ccc} \downarrow c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ \downarrow c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \downarrow \vdots & \vdots & & \vdots \\ \downarrow c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nq} \end{array}\right)$$

Entrada d_{12}

$$\overbrace{\left(\begin{array}{cccc} \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)}^{\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow} \cdot \left(\begin{array}{c|c|cc} c_{11} & \downarrow c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & \downarrow c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \downarrow \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \downarrow c_{n2} & \cdots & c_{nq} \end{array}\right)$$

$d_{12} = \sum_{i=1}^{n}(a_{1i} \cdot c_{i2}) = a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + \cdots + a_{1n}c_{n2}$

Note que la condición importante para realizar el producto de matrices AB, es que el tamaño de la columna de la primera matriz A coincida con el tamaño de la columna de la segunda matriz B y el resultado del producto de una matriz de tamaño $n \times m$ por una de tamaño $m \times q$ da como resultado una matriz de tamaño $n \times q$.

Ejemplo 6: Tomando las matrices A,B y C realizar las siguientes operaciones $A \cdot C$ y $B \cdot C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 6 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + -1 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + -1 \cdot 1 \\ -3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + -1 \cdot 1 & -3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + -1 \cdot 0 & -3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + -1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 27 & 11 \\ -2 & 24 & 9 \\ -4 & 24 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 6 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ -3 \cdot 0 + 6 \cdot 1 - 1 \cdot 6 & -3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + -1 \cdot 0 & -3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + -1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 46 & 20 & 11 \\ 0 & 24 & -4 \end{pmatrix}$$

Potencia de Matrices cuadradas

Sea $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$, se define la potencia de matrices cuadradas como:

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{\text{k veces}}.$$

Matriz transpuesta

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ con $A = (a_{ij})$. La matriz transpuesta de A denotada A^t, se difine como $A^t = (a_{ji})$. Como consecuencia de la definición note que $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 7: Obtener la transpuesta de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Observación: Note que el tamaño de la matriz A es 2×3, mientras que el tamaño de la matriz transpuesta de A es 3×2.

Igualdad de matrices

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices iguales si cumplen dos condiciones:

- A y B son del mismo tamaño
- $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

Actividad 1

1. Escriba las siguientes matrices de acuerdo a su definición.

Sean $A, B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, donde $A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad C = (c_{ij})$ y se definen sus entradas

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j & si \quad i < j \\ i & si \quad i > j \\ i^2 & si \quad i = j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & si \quad i < 3 \\ i & si \quad i = 3 \end{cases}, \quad c_{ij} = \begin{cases} i & si \quad i = j \\ j & si \quad i \neq j \end{cases}$$

2. Con base a las matrices de la parte 1, identifique cuales de las sigiuentes igualdades se cumplen

a. $A + B = B + A$.

b. $A \cdot B = B \cdot A$

c. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Tome en cuenta que se define la potencia de matrices cuadradas como

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{\text{k veces}}.$$

d. $A \cdot B \cdot C = C \cdot A \cdot B$

e. $C \cdot B - B \cdot C = 0$

3. Se puede encontrar una matriz O que cumpla $A + O = A$, $B + O = B$ y $C + O = C$.
4. Se puede encontrar una matriz I que cumpla $A \cdot I = A$, $B \cdot I = B$ y $C \cdot I = C$.
5. Se puede encontrar una matriz S que cumpla $A \cdot S = B$

Actividad de investigación: Historia del álgebra lineal

1. Realice una línea de tiempo sobre el descubrimiento de los temas de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
2. Investigue 3 aplicaciones de la utilización de matrices.

Puede utilizar las siguientes referencias, sin embargo puede utilizar otras

Luzardo & Pena (2006) , Historia del Álgebra Lineal hasta los Alboresdel Siglo XX, link de referencia https://www.emis.de/journals/DM/v14-2/art6.pdf

Semblanza de Carl Friedrich Gauss (p. 21), Nota histórica (p. 52, p. 220),Semblanza de Sir William Rowan Hamilton (p. 54), Semblanza de ArthurCayley y el álgebra de matrices (p. 76), Semblanza de Gottfried WilhelmLeibniz, Augustin-Louis Cauchy y Breve historia de los determinantes(p. 228) presentes en el libro de Álgebra Lineal de (Stanley & Flores Godoy, 2012)

Sesión de clases 2

Sub competencias desarrolladas
Reconocer los diferentes tipos de matrices Demostrar identidades matriciales usando la igualdad de matrices Usar las propiedades relacionadas a los diferentes tipos de matrices en contextos teóricos y prácticos. Demostrar teoremas relacionados
Nivel de complejidad
Nivel I: Incluye acciones en su mayoría rutinarias, predecibles y elementales que permiten incorporar el conocimiento nuevo a las estructuras mentales previas

Matrices especiales

Matriz columna: Matriz de tamaño $n \times 1$, es decir la matriz columna está compuesta por una sola columna.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Ejemplos de matrices columna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz fila: Matriz de tamaño $1 \times m$, es decir la matriz está compuesta por una sola fila.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{pmatrix}$$

Ejemplos de matrices fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada cuyos elementos que no se encuentran en la diagonal son 0. Las entradas se pueden definir como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ \text{cualquier valor} & si \quad i = j \end{cases}$$

Ejemplos de matrices diagonales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Nula: Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$. Si $a_{ij} = 0$, para todo i,j, entonces A se llama matriz nula de tamaño $m \times n$. La matriz nula de tamaño m x n se denota con la letra O.

Ejemplos de matrices nulas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad: Matriz denotada $I_n = (I_{ij})$ y se puede definir como una matriz diagonal donde sus entradas en la diagonal son todas 1. Sus entradas se definen como

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior: Matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0$ si $i > j$, es decir que todos los elementos que se encuentran debajo de la diagonal son 0.

Ejemplos de matrices triangulares superiores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior: Matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0$ si $i < j$, es decir que todos los elementos que se encuentran por encima de la diagonal son 0.

Ejemplos de matrices triangulares inferiores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica: Si A es una matriz cuadrada, se dice que la matriz A es simétrica si cumple la siguiente igualdad $A^t = A$.

Ejemplos de matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se cumple $A = A^t$

Matriz antisimétrica: Si A es una matriz cuadrada, se dice que la matriz A es antisimétrica si cumple la siguiente igualdad $A^t = -A$.

Ejemplo de matriz antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cumple $A = -A^t$

Actividad 2

1. Considere las siguientes matrices de tanaño $n \times n$:

- A es una matriz triangular superior
- B es una matriz triangular inferior
- C es una matriz simétrica
- I es una matriz identidad

Con las matrices propuestas, identifique si se cumplen las siguientes propiedades. Investigue cuales son verdaderas siempre.

$A + B$ es una matriz diagonal

AC es una matriz simétrica

AI es una matriz triangular superior

$B + C$ es simétrica

$I + I$ es una matriz diagonal

2. Discuta si puede existir una matriz antisimétrica con elementos en la diagonal distintos de cero.
3. Una matriz A cuadrada es idempotente si cumple $A^2 = A$.

- Compruebe que la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

- Demuestre que si A es idempotente entonces $A^n = A$ con $n \geq 2$.
- Considera la matriz A, encuentre una fórmula para establecer ejemplos de matrices idempotentes de tamaño 2×2, que tienen la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

Sean A, B, C matrices de tamaño $n \times m$ con entradas reales, α y β escalares. La suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

- **Conmutatividad:** $A + B = B + A$
- **Asociatividad:** $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(*)**
- **Elemento neutro:** Si O es la matriz nula de tamaño $n \times m$ entonces $O + A = A + O = A$ **(*)**
- **Distribución de escalares:** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ **(*)**

Se demuestra como ejemplo, la propiedad de conmutatividad para la suma de matrices:

Sean A, B y $C \in M_{mn}(\mathbb{R})$ $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$.

Por definición $A + B = a_{ij} + b_{ij}$. Como a_{ij} y b_{ij} entradas reales para todo i, j, podemos utilizar la propiedad conmutativa de la suma de números reales, por lo cuál $A + B = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = B + A$.

Propiedades para el producto de matrices

- **Asociatividad:** Sean A matriz de tamaño $n \times m$, B matriz de tamaño $m \times p$ y C matrices de tamaño $p \times q$ entonces $(AB)C = A(BC)$
- **Distribución:** Sean $A \in M_{pn}(\mathbb{R})$, $B, C \in M_{mn}(\mathbb{R})$ entonces: $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$ **(*)**
- **Existencia de elemento neutro para el producto de matrices:** $AI_m = A$ y $I_m A = A$ **(*)**
- **Distribución de escalar:** $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ **(*)**
- **No se cumple la conmutatividad del producto de matrices:** $AB \neq BA$

Demostración asociatividad en el producto de matrices: $(AB)C = A(BC)$

Por definición $AB = \sum_{k=1}^{m}(a_{ik} \cdot b_{kj})$ y lo denotaremos las entradas del producto de A y B como $(ab)_{ij}$.

$$AB = \sum_{k=1}^{m}(a_{ik} \cdot b_{kj}) = (ab)_{ij}$$

Utilizando nuevamente la definición de matrices

$$(AB)C = \sum_{v=1}^{p}((ab)_{iv}c_{vj})$$

Desarrollando la sumatoria se tiene:

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= \sum_{v=1}^{p}((ab)_{iv}c_{vj}) \\
&= \sum_{v=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\cdot b_{kv}\cdot c_{vj} \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{v=1}^{p}(a_{ik}\cdot b_{kv})\cdot c_{vj}, \text{ propiedad sumatoria(**)} \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\sum_{v=1}^{p}\cdot b_{kv}\cdot c_{vj}, \quad a_{ik} \text{ toma el papel de una constante} \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(bc)_{kj} = A\cdot(BC)
\end{aligned}
$$

Para comprobar que $AB \neq BA$ se utiliza un contraejemplo. Además, se debe recodar que el producto de matrices depende del tamaño de las matrices, como ejemplo no podemos realizar el producto de una matriz cuadrada de 4×4 con una de tamaño 3×3.

Propiedades de la transpuesta de matrices

Sea A una matriz de cualquier tamaño y α un escalar

$(\alpha A)^t = \alpha A^t$ **(*)**

$(A+B)^t = A^t + B^t$ **(*)**

$(A^t)^t = A$ **(*)**

$(AB)^t = B^t A^t$ **(*)**

Actividad 3

1. Demostrar las propiedades de matrices enmarcadas con **(*)**.
2. Como ejemplo de la propiedad de sumatoria utilizada en la demostración de producto de matrices: Compruebe que se cumple

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{v=1}^{4} a_{kv} = \sum_{v=1}^{4}\sum_{k=1}^{3} a_{kv}$$

3. Una matriz A cuadrada es ortogonal si $AA^t = I$. Comprobar que la siguiente matriz es ortogonal para cualquier valor de θ (Ejemplo tomado de Apostol, p.755, 2001).

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

4. Para cada una de las proposiciones siguientes acerca de las matrices $n \times n$, dar una demostración o en su lugar un contra ejemplo. (Tomado de Apostol, p.755, 2001)

a) Si A y B son ortogonales, $A+B$ es ortogonal.

b) Si A y B son ortogonales, AB es ortogonal.

c) Si A y AB son ortogonales, B es ortogonal.

5. Determinar en caso de que existan, todas las matrices B que satisfacen cada igualdad (Ejercicio tomado de Costa, Rossignoli, Sorichetti y Vampa, p.44, 2018)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + B = B^t + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + B = 2B^t + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Demostrar que si A es una matriz $n \times n$, entonces $A + A^t$ es una matriz simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica. De un ejemplo con una matriz de $2x2$(Ejercicio tomado de Costa, Rossignoli, Sorichetti y Vampa, p.44, 2018)

7. Considere las siguientes matrices, identifique cuales operaciones se pueden efectuar y calcule en caso que este definido:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 7 & 13 \\ 0 & 15 & 14 & 5 \\ 2 & -3 & 10 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 11 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Operaciones:

- $A + I_3$
- $(AB)^t$
- $B^t A^t$
- $C^t I_3$
- $(AB)^t C^t$

Sesión de clases 3

Sub competencias desarrolladas
Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado
Nivel de complejidad
Nivel I: Incluye acciones en su mayoría rutinarias, predecibles y elementales que permiten incorporar el conocimiento nuevo a las estructuras mentales previas

Ingreso de matrices en el software R

El software R es un entorno de programación estadística, que posee la ventaja de ser multiplataforma y de licencia libre. Se utilizará RStudio un entorno de compilación más amigable, además posee la ventaja de tener una versión libre en línea (RStudio Cloud).

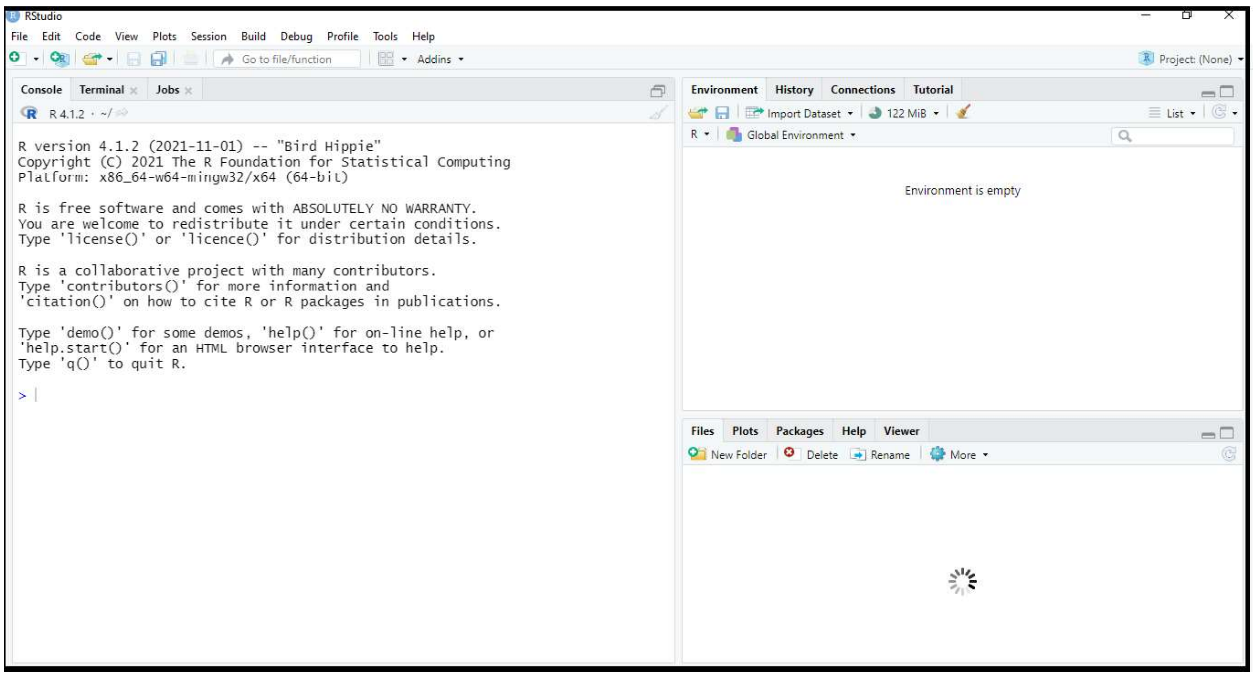


Figura 1: Interfaz del programa RStudio

Cuando se habla de función en programación se entiende que es un comando que realiza un procedimiento y para el software R se reconocen las funciones cuando están encerrados con $()$.

Vectores en el software R

Consideremos el vector (matriz columna) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Para ingresar vectores en R, se utiliza la función $c(dato_1, dato_2, \cdots, dato_{final})$ y se le agrega un nombre al vector para luego ser utilizado, en este caso es v.

```
v<-c(1,3,5,7,7)
v
```

```
## [1] 1 3 5 7 7
```

Nota: Se puede utilizar el símbolo $=$ enlugar de $<-$.

Matrices en el software R

Para ingresar matrices en **R**, se utiliza la función $matrix()$, consideremos la matriz A para ilustrar el ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 12 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Procedimiento:

1. Consideremos un vector ordenado con las entadas de la matriz A. Se tienen dos formas de ordenarlo:

Vector ordenado por filas: $c(1, 3, 5, 0, 7, 2, 12, 8, 9)$

Vector ordenado por columnas: $c(1, 0, 12, 3, 7, 8, 5, 2, 9)$

2. Tener en cuenta el número de filas y columnas de la matriz.
3. Tener en cuenta el orden del vector, el cuál podemos controlar por medio de la opción byrow=TRUE para indicar que el vector esta ordenado por filas y para el orden de columnas se puede agregar byrow=FALSE, se suele omitir, porque por defecto la función se encuentra programado con ese valor.

Para la Matriz donde se ordenó el Vector por filas, se digita:

```
A<-matrix(c(1,3,5,0,7,2,12,8,9),ncol=3,nrow=3, byrow = TRUE)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    0    7    2
## [3,]   12    8    9
```

Para la Matriz donde se ordenó el Vector por columna, se digita:

```
A<-matrix(c(1,0,12,3,7,8,5,2,9),ncol=3,nrow=3)
A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    0    7    2
## [3,]   12    8    9
```

```
matrix(c(1,0,12,3,7,8,5,2,9),ncol=3,nrow=3,byrow = "FALSE")
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    0    7    2
## [3,]   12    8    9
```

Operaciones con matrices en el software R

Consideremos la matriz A y I.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 12 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para realizar operaciones se utilizan los símbolos usuales, excepto para la multiplicación de matrices. Para la multiplicación se utiliza $\% * \%$.

Para sacar la transpuesta de una matriz se utiliza la función $t()$.

Para ingresar la matriz identidad en R, la función que se utiliza es $diag(n)$, donde n indica el tamaño de la matriz $n \times n$. Se indican las operaciones de matrices en el código:

```
I<-diag(3)
A<-matrix(c(1,3,5,0,7,2,12,8,9),ncol=3,nrow=3, byrow = TRUE)
# Suma de matrices
C=A+I
C
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    3    5
## [2,]    0    8    2
## [3,]   12    8   10
```

```
# Resta de matrices
D=I-A
D
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0   -3   -5
## [2,]    0   -6   -2
## [3,]  -12   -8   -8
```

```
# Multiplicación de matrices
E=C%*%D
E
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]  -60  -64  -56
## [2,]  -24  -64  -32
## [3,] -120 -164 -156
```

```
# Producto de matriz por un escalar
P=3*I
P
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    0    0
## [2,]    0    3    0
## [3,]    0    0    3
```

```
# Transpuesta de una matriz
At=t(A)
At
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0   12
## [2,]    3    7    8
## [3,]    5    2    9
```

Obtener entradas de la matriz en el software R

Para obtener la entrada de una matriz con respecto a su posición se utiliza el nombre de la matriz y se encierra con paréntesis cuadrados indicando la posición de la fila y columna que se quiere tener, separando con coma.

Además, se pueden optener los elementos de una fila o columna completa por medio de un espacio en blanco. Para optener los elementos de la diagonal se utiliza la función diag().

```
I<-diag(3)
A<-matrix(c(1,3,5,0,7,2,12,8,9),ncol=3,nrow=3, byrow = TRUE)
# Entrada de la fila 2, columna 1 de A
x=A[2,1]
x
```

```
## [1] 0
```

```
# Entrada de la fila 1, columna 2 de la transpuesta de A
y=At[1,2]
y
```

```
## [1] 0
```

```
#Elementos de la Fila 1 de A
k=A[1,]
k
```

```
## [1] 1 3 5
```

```
#Elementos de la columna 1 de la transpuesta de A
r=At[,1]
r
```

```
## [1] 1 3 5
```

```
#Elemento de la Digonal de la matriz A
c=diag(A)
c
```

```
## [1] 1 7 9
```

Visualizar entradas en forma de fracción

Para este ejemplo se quiere optener la inversa de A, la cuál va ser vista más adelante. Al obtener la inversa de la matriz A con la función $solve$ se muestra que las entradas son números con decimales. En caso de la enseñanza y aprendizaje nos intereza visualizar las entradas de las matrices en forma de fracción, por lo que utilizaremos el paquete MASS que posee una función con el nombre de fractions().

```
library(MASS)
A<-matrix(c(1,3,5,0,7,2,12,8,9),ncol=3,nrow=3, byrow = TRUE)
solve(A)
```

```
##             [,1]        [,2]         [,3]
## [1,] -0.15614618 -0.04318937  0.096345515
## [2,] -0.07973422  0.16943522  0.006644518
## [3,]  0.27906977 -0.09302326 -0.023255814
```

```
fractions(solve(A))
```

```
##      [,1]    [,2]    [,3]
## [1,] -47/301 -13/301  29/301
## [2,] -24/301  51/301   2/301
## [3,]   12/43   -4/43   -1/43
```

Vídeos complementarios: Esta lista de vídeos resumen la instalación, utilización de RStudio complementado con ejemplos de programación:

Video para instalar R y Rstudio: https://www.youtube.com/watch?v=GlR6HQ90SCo&t=4s

Video utilización de RStudio Cloud, la versión en línea se puede seguir en este vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=o--rUNfzxz8

Vídeo opcional resumen de programación en **R**: https://www.youtube.com/watch?v=ZOcWmF9oCWY

Utilización de R para Álgebra Lineal - Introducción: https://www.youtube.com/watch?v=eLLSwycQ8Iw

Actividad 4

1. Investigue como ingresar a RStudio datos de un archivo de Excel. Convierta los datos a formato matriz con la función $as.matrix(A)$, donde A es el nombre del archivo de Excel. Tome como ejemplo la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 50 & 30 & 44 & 50 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ingrese la matriz B con la función **matrix**.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

- Cuál es el tamaño de la matriz resultante de realizar $B \cdot A$

- Realizar la operación $B \cdot A$ en **R**.

3. La esta actividad vamos a reconocer una de las importancias de utilizar software para ejercicios de álgebra de matrices que es el tiempo de resolución de ejercicios, considera el siguiente código:

```
n=2
A=matrix(sample(-10:10,n*n),ncol=n)
B=matrix(sample(-10:10,n*n),ncol=n)
A
```

```
##       [,1] [,2]
## [1,]   -3   -6
## [2,]   10   -5
```

```
B
```

```
##       [,1] [,2]
## [1,]    2   -3
## [2,]    0   -8
```

En el fragmento de código, n representa el tamaño de la matriz cuadrada y la función sample realiza una aleatorización de números enteros entre un rango de -10 a 10. Ahora, aumente el valor de n en 5, 8 y 12 para realizar las siguientes operaciones, tome el tiempo cronometrado que tarda en realizar las operaciones con papel y lápiz, además realice las operaciones en el software:

$A + B$

$A \cdot B$

$B \cdot A$

Verifique si los resultados obtenidos con papel y lápiz son iguales a los que obtuvo en el software.

Sesión de clases 4

Sub competencias desarrolladas
Calcular inversas de matrices invertibles
Nivel de complejidad
Nivel I: Incluye acciones en su mayoría rutinarias, predecibles y elementales que permiten incorporar el conocimiento nuevo a las estructuras mentales previas

Inversa de una matriz cuadrada

Definición: Sean A, B dos matrices cuadradas de tamaño $n \times n$. B es la matriz inversa de A si cumple

$$AB = BA = I_n.$$

Donde I_n representa la matriz identidad y la matriz B se denota como A^{-1}.

Teoremas:

- Si A, B son dos matrices de tamaño $n \times n$ invertibles, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- En caso de existir la matriz inversa de A, su inversa es única.

Actividad 5

1. ¿Se puede encontrar una matriz inversa para A?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Encuentre matriz inversa de B

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Demuestre cada uno de los siguientes puntos. Si A^{-1} es la inversa de A, entonces:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$

Método para encontrar la matriz inversa

Matriz (A|I)

Es la matriz obtenida a partir de la matriz que se quiere encontrar la inversa, la cuál se escribe al lado izquierdo y al lado derecho se agrega la matriz identidad, denotado por $(A|I)$.

Ejemplo: Si queremos encontrar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, su matriz $(A|I)$ es:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Operaciones elementales en filas

El objetivo de las operaciones elementales de fila, es reducir la matriz $(A|I)$ y llegar a una matriz identidad al lado izquierdo. Se representa la posición i de la fila de una matriz con f_i, se resumen las siguientes operacione elementales:

- Para indicar que multiplicamos la fila i por un escalar α, se representa con $\xrightarrow{\alpha f_i}$
- Cuando se cambió la fila i por la j se representa con $f_i \leftrightarrow f_j$
- Se puede aplicar operaciones $\xrightarrow{\alpha f_i + f_j}$, con el objetivo de hace 0 algún valor. El resultado se puede escribir en la fila i o bien en la fila j. Para efectos de la guía el resultado se agrega a la fila f_j.

Matriz equivalente

En forma general, cuando se aplica cualquier operación elemental a la filas de una matriz, se obtiene una nueva matriz que es equivalente a la original. Si B es una matriz equivalente a A, se denota con $A \sim B$

$$A \xrightarrow{\alpha f_i} A_n$$

$$A \xrightarrow{\alpha f_i + f_j} B$$

$$A \xrightarrow{f_i \leftrightarrow f_j} B$$

Ejemplo: Método para obtener la inversa de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_1+f2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1 \cdot f2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-6f_2+f_3]{-3f_2+f1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & | & -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-6}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3+f_2]{-3f_3+f1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{17}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-6}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \left(I|A^{-1}\right)$$

Entonces,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{17}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{-6}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Actividad 6

1. Con la matriz A del ejemplo anterior, verificar que se cumple la siguiente igualdad

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

2. A la matriz $(A|I)$ del ejemplo anterior aplique el cambio de fila $f_1 \leftrightarrow f_3$, luego aplique el procedimiento para encontrar la inversa de A sin volver a utilizar el cambio de fila.

3. Considere las matrices R, S y U

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz inversa de R y determine la matriz W que satisface la siguiente igualdad

$$R(W^t + S) = U, \text{ (Tomado de Mora et al., p.13, 2018)}$$

4. Sea A una matriz de tamaño 3×3. Si S se obtuvo aplicando la operación elemental $3f_1 + f2$ a la matriz A y B se obtuvo aplicando la operación elemental $-2f_2$. Justifique si se concluir que S sea equivalente a B o que B sea equivalente a S.

Rango de matrices

Otra de las aplicaciones de aplicar operaciones elementales sobre las filas es para encontrar el rango de una matriz. Si A es una matriz de cualquier tamaño, el método para encontrar el rango consiste en aplicar operaciones elementales a la matriz hasta llegar a una matriz escalonada.

Una matriz es escalonada cuando cumple las siguiente condiciones:

1. El primer elemento distinto de cero en cada fila es 1.
2. El 1 de la segunda fila se encuentra al lado derecho del primer 1 y sucesivamente en las demas filas
3. Las filas compuestas con solo 0, se ubican en las ultimas posiciones de la fila.

Ejemplos de matrices escalonadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango representa el número de filas no nulas de la matriz al aplicar operaciones elementales.

Ejemplo: Encontrar el rango de la matriz D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 15 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$

Solución

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 15 & 15 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow{-15f_1+f3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-15f2+f3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -90 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{90}f3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz D es 3.

Actividad 7

1. Encontrar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sesión de clases 5

Sub competencias desarrolladas
Usar las propiedades relacionadas a los diferentes tipos de matrices en contextos teóricos y prácticos. Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado
Nivel de complejidad
Nivel I: Incluye acciones en su mayoría rutinarias, predecibles y elementales que permiten incorporar el conocimiento nuevo a las estructuras mentales previas

Aplicaciones de matrices

Modelos de regresión por medio la aproximación de ajuste de mínimos cuadrados

Se aplican a un conjunto de datos numéricos escogidos de forma aleatoria, para modelar el comportamiento del promedio condicional a una respuesta (Y) dado ciertas características (X). La aplicación producto de matrices permite obtener la estimación de los coeficientes de la siguiente recta que modela los promedios condicionales

$$\mu_{Y|X} = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

donde $\beta = (\beta_0 \quad \beta_1)^t$ son los coeficientes que se quieren estimar, X es una matriz compuesta en la primera columna por 1 y en la segunda columna los datos de x y ε es el error asociado a la estimación.

Los coeficientes se pueden estimar por medio de la siguiente ecuación matricial

$$\hat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t Y$$

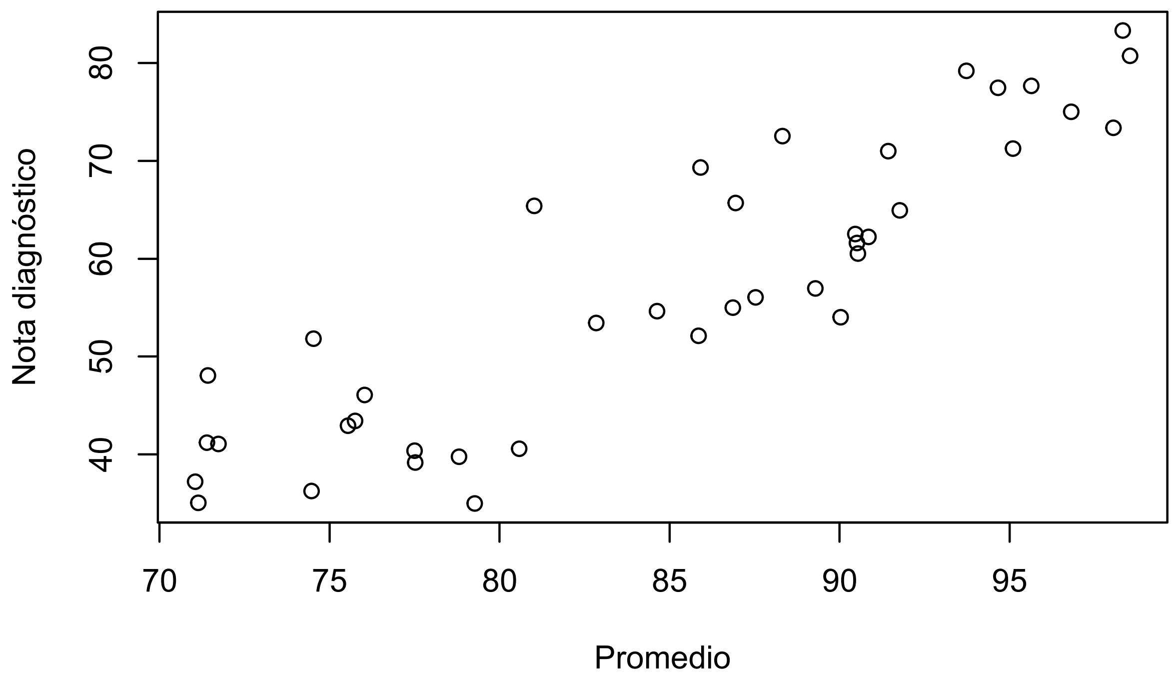
donde Y es un vector columna de la respuesta. La ecuación estimada queda de la siguiente forma

$$\hat{\mu}_{Y|X} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X.$$

Como ejemplo, un investigador comprobar la relación que existe entre el promedio del colegio con respecto a la nota de diagnóstico de matemática, la cuál es requisito para algunas carreras universitarias. Escoge una muestra aleatoria de 25 estudiantes que realizaron la prueba diagnóstica, los datos se muestran en la tabla 30.

$Estudiante$	$X : Promedio$	$Y : Nota$	$Estudiante$	$Promedio$	$Nota$
1	71,14	35,07	2	75,54	42,95
3	76,03	46,09	4	71,73	41,08
5	80,58	40,59	6	79,27	35,00
7	71,05	37,23	8	74,47	36,26
9	74,53	51,83	10	71,39	41,22
11	71,42	48,07	12	78,81	39,78
13	77,50	40,39	14	77,52	39,17
15	75,75	43,44	16	86,86	55,00
17	87,53	56,06	18	90,03	54,02
19	90,51	61,61	20	88,32	72,52
21	89,29	56,97	22	85,85	52,12
23	90,46	62,53	24	86,94	65,70
25	85,91	69,30	26	82,84	53,44
27	84,63	54,64	28	81,02	65,39
29	90,85	62,23	30	90,54	60,52
31	98,33	83,30	32	96,81	75,01
33	91,43	70,99	34	93,73	79,18
35	94,66	77,46	36	95,64	77,66
37	95,10	71,25	38	98,54	80,71
39	91,77	64,93	40	98,05	73,36

```r
load("datos.RData")
X=data$x
Y=data$y
plot(X,Y,xlab="Promedio",ylab="Nota diagnóstico")
```



Al realizar los puntos de cada observación de los promedios contra la nota del diagnóstica (conocido como gráfico de disperción), se observa un comportamientos lineal, lo cuál indica que se puede aplicar una regresión lineal.

Para estimar los coeficientes se tienen:

$$Y = \begin{pmatrix} 35{,}07 \\ 42{,}95 \\ 46{,}09 \\ \vdots \\ 64{,}93 \\ 73{,}36 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 71{,}14 \\ 1 & 75{,}54 \\ 1 & 76{,}03 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 91{,}77 \\ 1 & 98{,}05 \end{pmatrix}$$

Las estimaciones de los coeficientes son

$$\hat{\beta} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 71{,}14 \\ 1 & 75{,}54 \\ 1 & 76{,}03 \\ \vdots & \\ 1 & 91{,}77 \\ 1 & 98{,}05 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 71{,}14 \\ 1 & 75{,}54 \\ 1 & 76{,}03 \\ \vdots & \\ 1 & 91{,}77 \\ 1 & 98{,}05 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 71{,}14 \\ 1 & 75{,}54 \\ 1 & 76{,}03 \\ \vdots & \\ 1 & 91{,}77 \\ 1 & 98{,}05 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 35{,}07 \\ 42{,}95 \\ 46{,}09 \\ \vdots \\ 64{,}93 \\ 73{,}36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70{,}2751 \\ 1{,}4989 \end{pmatrix}$$

El promedio estimado de la nota del diagnóstico dado el promedio obtenido en el colegio, se puede modelar mediante la ecuación:

$$\hat{\mu}_{Nota|Promedio} = -70{,}2751 + 1{,}4989 \cdot Promedio$$

Con este modelo se puede realizar estimaciones, como ejemplo cuál va ser el promedio diagnóstico de estudiantes que tienen una nota de 95 en el promedio de colegio.

$$\hat{\mu}_{Nota|90} = -70{,}2751 + 1{,}4989 \cdot 90 = 64{,}6259$$

Análisis de semántica latente

Es un método para realizar de minería de texto, aplicado al análisis de discursos políticos, presidenciales, revistas científicas, entre otras áreas. Como parte del método se utiliza la aplicación de matrices para encontrar la matriz de términos- términos y la matriz de documentos- documentos que son fundamentales para otros análisis del método de minería de texto. Se brinda un ejemplo para obtener dichas matrices.

Las siguientes son 4 frases escogidas de forma aleatoria en noticias publicadas en Facebook en Abril del 2020.

F1: La OMS declara pandemia al coronavirus Covid-19.

F2: Los síntomas del nuevo coronavirus son similares a la gripe.

F3: Se reporto el primer caso de Covid-19 en China.

F4: La primer cuarentena de la pandemia tuvo lugar en China,ahora Italia está en cuarentena.

Se considera una matriz que representa la frecuencia de las palabras en cada frase:

$$A = \begin{pmatrix} Palabra| & F1 & F2 & F3 & F4 \\ OMS| & 1 & 0 & 0 & 0 \\ Declara & 1 & 0 & 0 & 0 \\ Pandemia| & 1 & 0 & 0 & 1 \\ Coronavirus| & 1 & 1 & 0 & 0 \\ Covid-19| & 1 & 0 & 1 & 0 \\ Sintomas| & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Nuevo| & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Similares| & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Gripe| & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Reporto| & 0 & 0 & 1 & 0 \\ Primer| & 0 & 0 & 1 & 1 \\ Caso| & 0 & 0 & 1 & 0 \\ China| & 0 & 0 & 1 & 1 \\ cuarentena| & 0 & 0 & 0 & 2 \\ lugar| & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Italia| & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz términos - términos se define como $B = AA^t$

```r
ejemplo <- read.delim("/cloud/project/ejemplo.txt")
A=as.matrix(ejemplo)
B=A %* %t(A)
B
```

```
##       [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13]
##  [1,]    1    1    1    1    1    0    0    0    0     0     0     0     0
##  [2,]    1    1    1    1    1    0    0    0    0     0     0     0     0
##  [3,]    1    1    2    1    1    0    0    0    0     0     1     0     1
##  [4,]    1    1    1    2    1    1    1    1    1     0     0     0     0
##  [5,]    1    1    1    1    2    0    0    0    0     1     1     1     1
##  [6,]    0    0    0    1    0    1    1    1    1     0     0     0     0
##  [7,]    0    0    0    1    0    1    1    1    1     0     0     0     0
```

```
##   [8,]    0    0    0    1    0    1    1    1    1     0     0     0     0
##   [9,]    0    0    0    1    0    1    1    1    1     0     0     0     0
##  [10,]    0    0    0    0    1    0    0    0    0     1     1     1     1
##  [11,]    0    0    1    0    1    0    0    0    0     1     2     1     2
##  [12,]    0    0    0    0    1    0    0    0    0     1     1     1     1
##  [13,]    0    0    1    0    1    0    0    0    0     1     2     1     2
##  [14,]    0    0    2    0    0    0    0    0    0     0     2     0     2
##  [15,]    0    0    1    0    0    0    0    0    0     0     1     0     1
##  [16,]    0    0    1    0    0    0    0    0    0     0     1     0     1
##       [,14] [,15] [,16]
##   [1,]     0     0     0
##   [2,]     0     0     0
##   [3,]     2     1     1
##   [4,]     0     0     0
##   [5,]     0     0     0
##   [6,]     0     0     0
##   [7,]     0     0     0
##   [8,]     0     0     0
##   [9,]     0     0     0
##  [10,]     0     0     0
##  [11,]     2     1     1
##  [12,]     0     0     0
##  [13,]     2     1     1
##  [14,]     4     2     2
##  [15,]     2     1     1
##  [16,]     2     1     1
```

Matriz documentos - documentos $C = A^t A$

```
C=t(A)%*%A
C
```

```
##    F1 F2 F3 F4
## F1  5  1  1  1
## F2  1  5  0  0
## F3  1  0  5  2
## F4  1  0  2  9
```

Posteriormente, se realizan otros procedimientos para realizar un análisis del texto. Sin embargo, en dicho procedimiento se utiliza matrices con auto vectores propios, dicho tema no se encuentra contemplado en la propuesta didáctica, pero se desarrolla en el curso. Puedes consultar detalladamente el procedimiento matricial en Valero (2017).

Vídeo que resume procedimiento:

Ejercicios de Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales https://www.youtube.com/watch?v=neKQABJRtHc

Actividad 8

1. Supongamos que un contratista de obra ofrece los siguientes tipos de viviendas residenciales que tienen los requisitos de insumos indicados en la tabla siguiente:

Vivienda e insumos	$Acero$	$Madera$	$Vidrio$	Mano de obra
$Campestre$	5	20	16	17
$California$	7	18	12	21
$Colonial$	6	25	6	13

Supongamos ahora que el contratista mencionado recibe un pedido para construir 5 casas de tipo campestre, 7 del tipo California, y 12 del tipo Colonial.

Determinar el requerimiento de insumos (Cantidad de materiales y mano de obra) por medio de la relación

$$R = xA$$

Donde x corresponde a una matriz columna de los requerimientos y A los datos que se disponen en la tabla.

2. Realizar una analisis de regresión de mínimos cuadrados utilizando los siguientes datos, que corresponden a la exportaciones de moluscos y peces en Costa Rica, para predecir cuantos kilos se exportarán en el 2019, suponiendo que el comportamiento es lineal. Los datos fueron escogudos de forma aleatoria.

Año	$Kilos$
1999	21974981
2001	32033516
2002	32394710
2007	15895804
2010	12813288
2011	14632046
2012	17818512
2015	13630430

Fuente: Datos tomados Estadísticas ambientales producidas por el INEC

3. Calcule la matriz de terminos-terminos y documentos-documentos del siguiente parrafo (Datos tomados de Grarajes, 2018):

De seguir a este ritmo, a nivel mundial, la ONU estima que para el 2050 habrá más plástico que peces en el mar.

El 80 % del plástico desechado es lanzado al mar.

De acuerdo con el Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD), la industria del plástico es la tercera industria más grande de Costa Rica.

El problema es que la cantidad de plástico que desechamos también es sorprendente. Según el PNUD, por día, Costa Rica desecha cerca de 550 toneladas de plástico diariamente.

A pesar de los esfuerzos que hace el país por cuidar el ambiente, los expertos concuerdan en que una de las mayores debilidades es la falta de una ley que regule el uso del plástico.

Sesión de clases 6

Sub competencias desarrolladas
Demostrar teoremas sobre determinantes y calcular determinantes usando la definición y sus propiedades. Demostrar la invertibilidad de una matriz conociendo su determinante. Integrar software apropiado en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado
Nivel de complejidad
Nivel I: Incluye acciones en su mayoría rutinarias, predecibles y elementales que permiten incorporar el conocimiento nuevo a las estructuras mentales previas

Determinantes 2×2

Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Se denota el determinante de A como $|A|$ y para el caso de matrices de tamaño 2×2 se define

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Observación: También se puede utilizar la notación $det(A)$ para indicar el determinante de la matriz A.

Menor principal

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A, eliminando la fila i y la columna j. M_{ij} se llama el menor ij de A.

Cofactor

Sea A una matriz de $n \times n$. El cofactor ij de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Determinante

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, el determinante de A calculado a partir de la fila en la posición i está dado por

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

Esta definición se conoce como el desarrollo por cofactores.

Procedimiento para encontrar el determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución: Desarrollando la definición en la primera fila

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A13 \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|M_{13}| \\
&= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\
&= 5 \cdot 2 - 1 \cdot 6 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Actividad 9

1. Realizar el procedimiento para encontrar el determinate de la matriz A del ejemplo anterior, utilice la definición en la fila 2 y luego en la fila 3.
2. Analice que sucede con el determinante si aplicamos la definición operaciones elementales a las filas. ¿ Qué se puede concluir?

Propiedades del determinante

1. Sean A , $B \in M_n(\mathbb{R})$, los determinantes cumplen las siguientes propiedades:

- $|AB| = |A||B|$
- $|A^t| = |A|$

2. Si A es una matriz cuadrada y posee una fila (o columna) de ceros, entonces el determinante de la matriz es 0.
3. Si A es una matriz cuadrada y B una matriz obtenida a partir de la multiplicación del escalar c a la fila i, Entonces $|B| = c \cdot |A|$

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c \cdot a_{i1} & c \cdot a_{i2} & \cdots & c \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

4. Si A es una matriz con dos filas iguales o columnas, entonces $|A| = 0$.

Relación de la matriz inversa y determinantes

Sea A es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces $|A| \neq 0$ si y solo si A^{-1} existe. Además, si A^{-1} existe entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Actividad 10

1. De ejemplo de una matriz de tamaño 2×2 con determimante distinto de cero. Encuentre una relación del determinante de A cuando se aplica operaciones elementales en la fila. A partir de las concluciones calcule el determinante de B aplicando operaciones elementales de fila

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -10 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Demuestre por medio de contraejemplo que dado A y B matrices cuadradas, $|A+B| \neq |A| + |B|$.
3. Calcule el determinante de B aplicado la definición en cualquier fila, adiccionalmente aplique el mismo método pero aplicado a cualquier columna. ¿ El resultado es el mismo?
4. Una de las aplicaciones de determinantes en matrices de tamaño 2×2 es el cálculo de área de paralelogramos. Considere dos vectores direccionales $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$, el área del paralelogramo determinado por esos vectores se puede calcular

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Grafique los vectores direccionales $u = (1, 1)$ y $v = (1, -2)$. Calcule el área del paralelogramo utilizando el determinante.

5. Determine si las siguientes matrices poseen inversa y cálcule la inversa utilizando el determinante

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -10 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 11 & -9 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & -2 & -9 & 4 \\ 3 & -6 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & -7 & 6 & 0 & 6 \\ 7 & -15 & -7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

6. La fórmula para obtener la estimación de coeficientes por medio de regresión por mínimos cuadrados es:

$$\hat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t Y$$

Suponiendo que existe una relación lineal y los supuestos para aplicar el modelo. ¿Cuál es la condición matemática para aplicar el método?

Paquete matlib para encontrar la inversa y determinantes con R

El paquete matlib de R permite resolver ejercicios relacionados a matrices, determinantes y sistemas de eucaciones lineales.

Inversa de matrices con R

Ejemplo: consideramos la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para Calcular la inversa de una matriz A, se utiliza la función Inverse(A, verbose=TRUE, fractions=TRUE) del paquete matllib. Dentro de la función se agrega la opciones verbose=TRUE para mostrar el procedimiento computacional de como se cálculo la ibversa y fractions=TRUE para mostrar en forma de fracción el resultado.

Ejemplo: Calcular la inversa la matriz A.

```
A=matrix(c(1,-4,-5,-5,3,-1,3,0,5,-2,1,5,5,-2,-3,0), ncol=4,byrow = TRUE)
library(matlib)
Inverse(A, verbose=TRUE, fractions=TRUE)
```

Rango de matrices

Por medio de la función R(A) del paquete matlib se obtiene el rango de la matriz A.

```
A=matrix(c(1,-4,-5,-5,3,-1,3,0,5,-2,1,5,5,-2,-3,0), ncol=4,byrow = TRUE)
library(matlib)
R(A)
```

Determinantes

Función para Cofactor: Se utiliza la función cofactor(A, i, j) con A una matriz cuadrada, donde i indica la posición de filas y j la de columna.

Ejercicio: Calcular el determinante de A, utilizando la función cofactor() en la primera fila.

Recordar el siguiente resultado

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}$$

donde i es la fila desarrollada para sacar los cofactores C_{ki}.Recordemos que en R se puede optener la entrada de la fila i y columna j de la matriz A con $A[i,j]$.

```
A=matrix(c(1,-4,-5,-5,3,-1,3,0,5,-2,1,5,5,-2,-3,0), ncol=4,byrow = TRUE)
library(matlib)
detA=A[1,1]*cofactor(A,1,1)+A[1,2]*cofactor(A,1,2)
+A[1,3]*cofactor(A,1,3)+A[1,4]*cofactor(A,1,4)
det(A) #Para comprobación
```

Menor principal: Se obtiene del determinantes de la matriz a la que se le suprime la fila i y columna j. Se utiliza la función minor(A,i,j) con A matriz cuadrada, i es la posición de la fila y j la posición de la columna.

Ejemplo: Calcular el determinante de la matriz obtenida al suprimir la fila 3 y columna 3 de A, utilizando la función minor().

```
A=matrix(c(1,-4,-5,-5,3,-1,3,0,5,-2,1,5,5,-2,-3,0), ncol=4,byrow = TRUE)
library(matlib)
Minor(A,3,3)
```

Vídeo resumen de utilización

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales con matlib: https://www.youtube.com/watch?v=fmuwadZwowQ

Sesión de clases 7

Sub competencias desarrolladas
Construir e interpretar modelos matemáticos sobre sistemas de ecuaciones lineales a partir de situaciones reales para reconocer la importancia del álgebra lineal en la vida cotidiana. Resolver sistemas de ecuaciones lineales Expresar, en forma apropiada, el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Resolver sistemas de ecuaciones cuadrados usando la Regla de Cramer. Aplicar los métodos de solución: eliminación gausiana y Gauss-Jordan en la solución de sistemas de ecuaciones
Nivel de complejidad
Nivel I: Incluye acciones en su mayoría rutinarias, predecibles y elementales que permiten incorporar el conocimiento nuevo a las estructuras mentales previas

Actividad 10

Resolver el siguiente problema

La compañía Sunrise Porcelain fabrica tazas y platos de cerámica. Para cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que los forma, de donde pasa al vidriado y secado automático. En promedio, un trabajador necesita tres minutos para iniciar el proceso de una taza y dos minutos para el de un plato. El material para una taza cuesta 25 dólares y el material para un plato cuesta 20 dólares. Si se asignan 44 dólares diarios para la producción de tazas y platos, ¿cuántos deben fabricarse de cada uno en un día de trabajo de 8 horas, si un trabajador se encuentra trabajando cada minuto y se gastan exactamente 44 dólares en materiales? (Tomado de Grosman y Flores, p.8,)

Entre los métodos que se pueden utilizar para resolver el problema se encuentran la sustitución de variables. Con la ayuda de la teoría de matrices veremos como resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de n ecuaciones lineales y m incógnitas $x_1, \cdots, x_m$, se escribe en la forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

donde los números a_{ij} y b_i son valores conocidos. Los valores a_{ij} denota el coeficiente en la ecuación i asociado a la variable j.

En forma matricial se puede escribir un sistema de ecuaciones lineales como $AX = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sistema consistente

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es consistente cuando posee solución y cuando el sistema no posee solución es un sistema inconstante.

Ejemplo método de solución de sistemas de ecuaciones lineales

La representación de la matriz aumenta es $(A|b)$, donde A es la matriz con los coeficientes del sistema y b es el vector columna de la respuestas del sistema. Al aplicar operaciones elementales en la filas de la matriz aumentada se obtiene una matriz que representa un sistema de ecuación lineal equivalente, que en terminos prácticos nos intesa ya que los sistemas equivalente poseen la misma solución.

Primer método: Se aplica operaciones elementales en las filas de la matriz aumentada para llegar a una matriz de forma triangular

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 1 \\ x+y & = & 4 \\ x+y+z & = & 6 \end{array}\right.$$

La matriz aumentada del sistema es

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 1 & 1 & 1 & | & 6 \end{array}\right)$$

Tenemos que aplicar operaciones elementales de fila, para llegar a una matriz triángular.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 1 & 1 & 1 & | & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 1 & 1 & 1 & | & 6 \end{array}\right).$$

Luego de aplicar la operación se obtiene el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcll} x & = & -3 & \text{Ecuación 1} \\ x+y & = & 4 & \text{Ecuación 2} \\ x+y+z & = & 6 & \text{Ecuación 3} \end{array}\right.$$

Ahora se sustituye x en la ecuación 2, con el valor de x de la ecuación 1, y se obtiene

$$-3+y=4 \Rightarrow y=7.$$

Luego se sustituye los valores de x, y en la ecuación 3

$$-3+7+z=6 \Rightarrow z=2.$$

De esta manera se tiene que la solución del sistema de ecuación es

$$S = \left(\begin{array}{c} -3 \\ 7 \\ 2 \end{array}\right).$$

A este método se le conoce como el método de reducción o eliminación de Gaussiana.

Método 2: Al reducir la matriz optenida anteriormente a una matriz identidad, se tiene

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2<->f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-f1+f3]{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Este método se conoce como reducción Gauss-Jordan o Jordan-Gauss.

Regla de Cramer

Otro de los métodos, para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales con solución unica es el método de Cramer.

Sea $AX = b$ un sistema de ecuaciones con n incognitas y n ecuaciones, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Un teorema nos dice que el sistema $AX = b$ tiene solución única si y solo si $|A| \neq 0$.

La regla de Cramer nos dice que la solución única del sistema es

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

donde A_i representa la matriz que se optiene cambiando la fila i por b.

Ejemplo: Considerando el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ x + y & = & 4 \\ x + y + z & = & 6 \end{array} \right.$$

Sabemos, por el ejemplo anteior, que posee solución única.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz A_1, se remplaza la columna 1 de la matriz A, por los valores de la matriz columna b. De igual forma se obtiene A_2 cambiando la columna 2 y para la matriz A_3 la columna A_3.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Posteriormente, se calcula el valor que corresponde cada variable.

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{1} = 7$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2$$

Descripción de solución en sistemas de ecuaciones lineales

Solución Única: Si aplicamos la reducción Gauss-Jordan a un sistema de la forma $AX = b$ y se obtiene una matriz equivalente a la matriz a la identidad, el sistema tiene solución única.

Ejemplo: Considerando el sistema de ecuaciones lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & -3 \\ x + 2y & = & 4 \end{array} \right. ,$$

Se puede representar por medio de la matriz aumentada de la siguiente forma:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Se aplica el procedimiento para reducir la matriz

$$\begin{aligned} (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{-f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Al representar la matriz a la cuál llegamos, se tiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -10 \\ y & = & 7 \end{array} \right. ,$$

Soluciones infinitas o dependiendo de un parámetro: Si al aplica el método de Gauss-Jordan a la matriz aumentada $(A|b)$ y se obtiene una o más filas con ceros, el sistema tiene soluciones dependiendo de parámetros. También se puede obtener soluciones dependiendo de parámetros cuando el sistema tiene más parámetros que ecuaciones.

Ejemplo aplicación: Considerando la siguiente matriz aumentada, la cuál representa un sistema de ecuaciones lineales.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{-2f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema que representa es

$$\begin{cases} x - 7z &= -3 \\ y + 5z &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Despejando x y y, se optiene:

$x = -3 + 7z$

$y = 2 - 5z$

De esta manera se escibe la solución del conjunto solución por comprensión

$$S = \left\{ Z \in R \middle| \begin{pmatrix} -3+7z \\ 2-5z \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

Solución inconsistente: Si al aplicar el método de reducción se obtiene alguna contradicción con el sistemas. Por lo general la fila de coeficientes es 0 y el resultado es cualquier valor diferente de 0.

Ejemplo sistema inconsistente

Al aplicar el método de reducción se llega al siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

La contradicción del sistema se da $0 = 2$, lo cuál es falso y por ello el sistema no posee solución.

Actividad

1. Determine el comportamiento de la solución de sistema de ecuaciones lineales cuando el determinante de la matriz de coeficientes es 0. Considere los siguientes sistemas, cálcule y determine si posee o no solución.

$$\begin{cases} x + z &= 2 \\ 2y &= 6 \\ x + y + z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 24 \\ x_1 + x_3 &= 7. \end{cases}$$

2. Determinar el valor de la constante K para que el siguiente sistemas posea:

- Solución única
- Soluciones infinitas

- No posea soluciones

$$\begin{cases} x+y+kz &= 2 \\ 3x+4y+2z &= k \\ 2x+3y-z &= 1. \end{cases}$$

3) Modelo abierto de Leontief : Se quiere calcular la demanda final a partir de una matriz de tecnología. Se tiene la siguiente igualdad

$$(I-A)X = D, \quad \text{donde } A \text{ es una matriz tecnológica y } D \text{ indica la demanda final}$$

Si la matriz de tecnológia es

	Agricultura	*Siderurgía*	*Carbón*
Agricultura	0,1	0,01	0,01
Siderurgía	0,02	0,13	0,20
Carbón	0,05	0,18	0,05

Con un superávits de 2350 toneladas producción agrícola, 4552 acero y 911 de carbón. Represente el sistema y calcular la producción bruta.

4 . Plantee el sistema de ecuaciones lieales del siguiente problema y encuentre la solución:

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 4 del B y 5 del C. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 5 unidades del C. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento A, 20 000 unidades del alimento B y 55 000 del C. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago? (Tomado de Grossman y Flores, p.17, 2012).

Representación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales

Para sistemas conformados por dos variables y dos igualdades, por ejemplo

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y &= b_2. \end{cases}$$

cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano cartesiano, en caso de que dichas rectas se intersequen entonces el sistema tiene solución única. En caso de que las rectas sean paralelas el sistema de ecuaciones lineales no posee solución y cuando coinciden las dos rectas las solución depende de parámetros.

Sistemas de ecuaciones lineales con matlib

Eliminación Gauss-Jordan: La función que permite realizar el método de eliminación Gauss-Jordan en sistemas de ecuaciones lineales es gaussianElimination(A, b, verbose=TRUE, fractions=TRUE) donde A es la matriz de coeficientes, b el vector de resultados, verbose=TRUE es una indicación que permite ver el desarrollo del método y fractions=TRUE es para observar las entradas de la matriz con fracciones.

Ejemplo: Resolver el sistema utilizando el método Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x - 4y - 5z - 5w = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 5x - 2y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

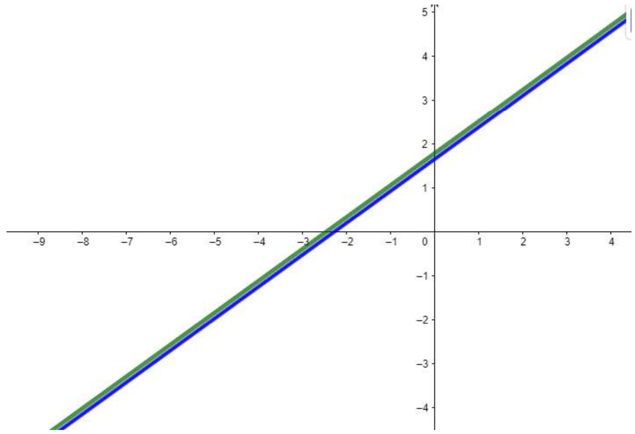


Figura 2: Solución dependiendo de parametros

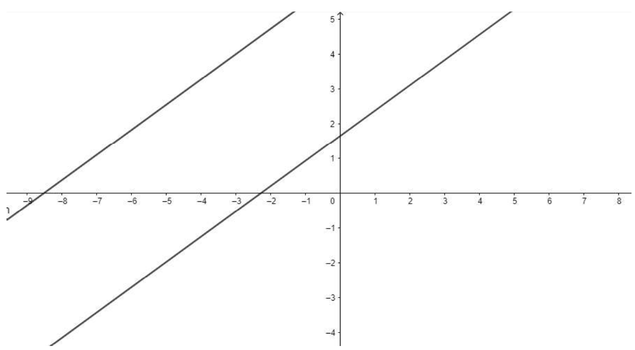


Figura 3: No existe solución

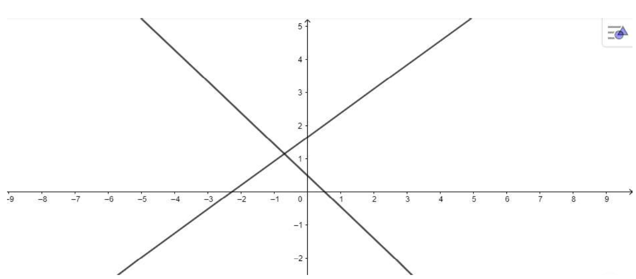


Figura 4: Solución Única

```
A=matrix(c(1,-4,-5,-5,3,-1,3,0,5,-2,1,5,5,-2,-3,0), ncol=4,byrow = TRUE)
library(matlib)
b=rep(0,4)
gaussianElimination(A,b,fractions = TRUE,verbose = TRUE)
```

Nota: Otra función de matlib que permite encontrar la solución de sistemas de ecuaciones es Solve(A,b).

```
A=matrix(c(1,-4,-5,-5,3,-1,3,0,5,-2,1,5,5,-2,-3,0), ncol=4,byrow = TRUE)
library(matlib)
b=rep(0,4)
Solve(A,b,fractions = TRUE,verbose = TRUE)
```

Gráficas de sistemas

El paquete matlib posee dos funciones para la gráficación de sistemas. La función plotEqn(A, b) para graficar rectas y plotEqn3d(A,b) para planos.

Ejemplo: Gráficar el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

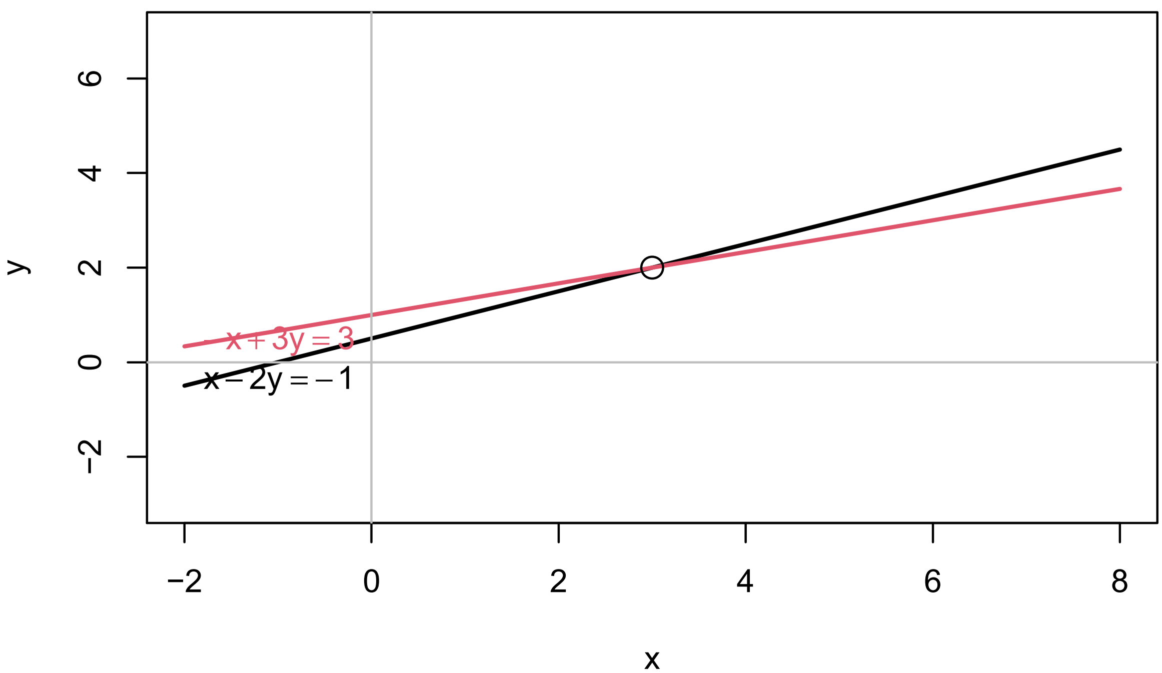
$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3. \end{cases}$$

```
library(matlib)
```

```
## Warning in rgl.init(initValue, onlyNULL): RGL: unable to open X11 display
## Warning: 'rgl.init' failed, running with 'rgl.useNULL = TRUE'.
```

```
A=matrix(c(1,-2,-1,3),ncol = 2,byrow = TRUE)
b=c(-1,3)
plotEqn(A,b,var=c("x","y"),solution = TRUE)
```

```
##   x - 2*y  =  -1
## -x + 3*y  =   3
```



Ejemplo: Gráficar el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 6y & - & 5z & = & 1. \end{cases}$$

```
B<-matrix(c(1,2,3,1,4,6,2,-3,-5),ncol =3,nrow= 3)
c<- c(9,0,1)
library(matlib)
plotEqn3d(B,c)
```

Manejo de símbolos cumputacionales

El lenguaje de programación de R permite el trabajo con datos conocidos. Para efectos de la propuesta llamaremos símbolo a una variable que no tiene valor numérico conocido. Para utilizar simbolos instalamos el paquete rSymPy.

Luego de cargar el paquete, se introduce la función sympyStart(), para que no haya errores en su utilización.

```
library(rSymPy)
sympyStart()
```

El lenguaje de programación con el paquete Rsympy es diferente al de R, por ser un interfaz de un paquete de Python, por lo cual se explica a continuación como utilizarlo

Definir variables

En el lenguaje de programación de R, no podemos realizar operaciones con variables (entendiendo variable desde el punto matemático, una letra a la cuál podemos realizar operaciones o encontrar un valor a una solución de una ecuación). Por ejemplo, veamos que sucede si realizamos la operación $3x + x$.

```
3*x+x
```

```
## Error in eval(expr, envir, enclos): object 'x' not found
```

Observamos, que nos tira un error. Tendríamos que asignar un valor a la variable para poder realizar la operación.

Ahora resolveremos algunos ejemplos de cómo utilizar el paquete RSymPy para resolver problemas que involucren variables matemáticas.

Vamos a definir las variable a y b con la función Var de rSymPy, para realizar las siguientes operaciones

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2}, \quad (a+b)^2.$$

Primero vamos a definir las variables por medio de la función **Var** y el nombre de la variable

```
a=Var("a")
b=Var("b")
a/2+a/2
```

Ahora, para realizar la operación $(a+b)^2$ la indicamos por medio del comando de potencia encerrado con parentesis redondos.

```
a=Var("a")
b=Var("b")
(a+b)^2
```

Para obtener el resultado la función sympy("procedimiento") y la función simplify() de **SymPy**. Se utiliza $**$ para las potencias.

```
a=Var("a")
b=Var("b")
sympy("simplify((a+b)**2)")
```

Matrices Se resumen las siguientes funciones que se utilizan en SymPy, estas se introducen dentro de la función sympy() y entre comillas.

Suma de matrices: $A + B$

Producto de matrices: $A * B$

Producto escalar por matriz: $k * A$

Potencia de matrices: $A * *k$

Inversa de matrices: $A * * -1$

Transpuesta de matrices: $A.T$

Matriz Identidad: $eye(n)$

Matriz Nula: $zeros(m, n)$

Determinantes: $A.det()$

Ejemplo: Ingresar la matriz A y calcular $A^tA - x^2I_3$ con I_3 la matriz identidad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$$

```
library(rSymPy)
sympyStart()
x=Var("x") #Definir variable x
sympy("A = Matrix([[0,1,x], [1,x,0],[1,2,x]])")
cat(sympy("A = Matrix([[0,1,x], [1,x,0],[1,2,x]])"))
```

La función cat() permite visualizar la matriz de mejor manera.

Sistemas de ecuaciones lineales:

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax & + & by & - & cz & = & k \\ ex & - & fy & + & gz & = & u \\ hx & - & iy & + & jz & = & v. \end{cases}$$

Se utiliza la función Eq() en SymPy para indicar ecuaciones. Como ejemplo Eq(ax+ by - cz,k) nos indica la ecuación $ax + by - cz = k$. La función que permite resolver sistemas de ecuaciones es solve([ecuaciones separadas por comas],(variables separadas por coma))

```
x=Var("x")
y=Var("y")
z=Var("z")
sympy("solve([Eq(x + y + z ,- 1),Eq( x + y + 2*z ,- 3) ], (x, y, z))")
```

Vídeo que resumen el procedimiento:

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales con RSymPy https://www.youtube.com/watch?v=3ag0wvsgkKs

Sesión de clases 8

Relación rango de matrices con sistemas de ecuaciones lineales

Considerando un sistema de ecuaciones lineales de la forma $AX = b$, se puede obtener el rango de la matriz de coeficientes A y también el rango de la matriz ampliada $(A|b)$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 3 \\ x + y + z & = & 1 \\ 2x + 4y + 6z & = & 3 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Aplicando operaciones elementales de filas se llega:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

El Rango de la matriz ampliada es de 3, mientras que el rango de la matriz de coeficiente A es 2 y sabemos que el sistema de ecuaciones lineales no posee solución debido a que se llega a una contracción.

Actividad

1. De ejemplos de un sistemas de tamaño 3×3 que posee solución única, un sistema con solución que depende de parametros y un sistema que no posee solución. Calcule el rango de la matriz de coficientes y matriz aumentada. Cuál es la relación que existe entre los rangos y la solución del sistema.
2. Un sistema es homogéneo cuando tiene la forma $AX = 0$. Encuentre la relación de la solución comparandolo con el rango.

Las relaciones del rango con la solución del sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ que posee m ecuaciones son:

- $Rango(A) < Rango(A|b) \Leftrightarrow Ax = b$, No posee solución
- $Rango(A) = Rango(A|b) < m \Leftrightarrow Ax = b$ posee solución dependiendo de parametros
- $Rango(A) = Rango(A|b) = m \Leftrightarrow Ax = b$ posee solución único

Referencias

Grajales,I. (2018). Costa Rica tira al mar 15 camiones de plástico por día[Noticia en Linea]. Recuperado de https://www.tec.ac.cr/hoyeneltec/2018/06/05/costa-rica-tira-mar-15-camiones-plastico-dia

Friendly, M., Fox, J., & Chalmers, P. (2021). Matlib: Matrix functions for teaching and learning linear algebra and multivariate statistics. https://github.com/friendly/matlib

Grothendieck, G., & Bellosta, C. C. J. G. (2019). rSymPy: R interface to SymPy computer algebra system. https://CRAN.R-project.org/package=rSymPy

Luzardo, D., & Pena, A. J. (2006). Historia delAlgebra lineal hasta los albores del siglo XX. Divulgaciones Matemáticas, 14(2), 153–170.

R Core Team. (2021). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. https://www.R-project.org/

RStudio Team. (2020). RStudio: Integrated development environment for r. RStudio, PBC. http://www.rstudio.com/

Stanley, G. S., & Flores Godoy, J. J. (2012). Algebra lineal. McGrawHill.

Venables, W. N., & Ripley, B. D. (2002). Modern applied statistics with s (Fourth). Springer. https://www.stats.ox.ac.uk/pub/MASS4/