

## La modelación matemática en los procesos de formación docente

### Mathematical modeling in teacher training processes

### Modelagem matemática em processos de formação de professores

Jesennia Chavarría-Vásquez  
Universidad Nacional  
Escuela de Matemática  
Heredia, Costa Rica

[jesennia.chavarria.vasquez@una.ac.cr](mailto:jesennia.chavarria.vasquez@una.ac.cr)  
<http://orcid.org/0000-0002-6112-1231>

Ronny Gamboa-Araya  
Universidad Nacional  
Heredia, Costa Rica

[ronny.gamboa.araya@una.ac.cr](mailto:ronny.gamboa.araya@una.ac.cr)  
<http://orcid.org/0000-0002-9531-0372>

**Nota aclaratoria:** Este documento representa una versión preliminar para ser sometido a una revisión para publicación en una revista científica.

**Resumen:** En este artículo se plantean aspectos relacionados con la modelización y modelación matemática como actividades que deben incluirse en los procesos de formación docente; lo anterior, para generar habilidades en el futuro profesorado tendientes a su abordaje en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El propósito es brindar argumentos que sustenten la necesidad de que las instituciones encargadas de la formación de docentes incorporen estos procesos en sus estructuras curriculares; además, brindar ideas sobre algunos tipos de actividades que la persona docente puede aplicar en la clase. Las ideas aquí desarrolladas se han construido a partir de una revisión de literatura relacionada con el tema, así como de un proceso de investigación por parte de las personas autoras en aspectos como: concepto de modelo, modelización y modelación; modelización y modelación matemática en la formación docente; modelización matemática como actividad docente; modelación matemática como estrategia didáctica; y tipos de tareas de modelación matemática. Se evidencia que la modelación matemática, como estrategia didáctica, es una actividad a la cual debe brindársele una mayor importancia en la enseñanza de la disciplina. La incorporación de los procesos de modelización matemática en la formación profesional del profesorado y de formación académica en el estudiantado resulta relevante para el desarrollo de habilidades específicas. Surge la necesidad de ejecutar acciones orientadas a la formación del profesorado para implementar este tipo de tareas. El objetivo es que el estudiantado aprecie la aplicabilidad de la materia y que sus conocimientos le permitan la comprensión del contexto en el cual se desarrolla.

**Palabras claves:** modelación, modelización, tareas, profesorado, estudiantado.

**Abstract:** This article develops aspects related to modeling as an activity that should be included in teacher training processes; this to generate skills in future teachers tending to their approach in the teaching and learning process. The purpose is to provide arguments that support the need for institutions in charge of teacher training to incorporate these processes into their curricular structures; In addition, provide ideas about some types of activities that the teacher can apply in the class. The ideas developed here have been built from a literature review related to the subject, as well as

from a research process by the authors in aspects such as: concept of model and modeling; mathematical modeling in teacher training; mathematical modeling as a teaching activity; mathematical modeling as a didactic strategy; and types of mathematical modeling tasks. It is evident that mathematical modeling, as a didactic strategy, is an activity that has a greater importance in the teaching of the discipline. The incorporation of mathematical modeling processes in the professional training of teachers and academic training in students is relevant for the development of specific skills. Therefore, there is a need to execute actions aimed at teacher training to implement this type of tasks. The objective is for students to appreciate the applicability of the subject and that knowledge of it allows them to understand the context in which it is developed.

**Keywords:** mathematical modeling, tasks, teachers, students.

**Resumo:** Este artigo levanta aspectos relacionados à modelagem e modelagem matemática como atividades que devem ser incluídas nos processos de formação de professores; o anterior, para gerar competências nos futuros professores tendentes à sua abordagem no processo de ensino e aprendizagem. O objetivo é fornecer argumentos que sustentem a necessidade de as instituições responsáveis pela formação de professores incorporarem esses processos em suas estruturas curriculares; Além disso, forneça ideias sobre alguns tipos de atividades que o professor pode aplicar na aula. As ideias aqui desenvolvidas foram construídas a partir de uma revisão de literatura relacionada ao assunto, bem como de um processo de pesquisa dos autores em aspectos como: conceito de modelo, modelagem e modelagem; modelagem e modelagem matemática na formação de professores; modelagem matemática como atividade de ensino; modelagem matemática como estratégia didática; e tipos de tarefas de modelagem matemática. Fica evidente que a modelagem matemática, como estratégia didática, é uma atividade que deve receber maior importância no ensino da disciplina. A incorporação de processos de modelagem matemática na formação profissional dos professores e na formação acadêmica dos alunos é relevante para o desenvolvimento de habilidades específicas. Surge a necessidade de executar ações voltadas à formação de professores para implementar este tipo de tarefas. O objetivo é que os alunos apreciem a aplicabilidade da disciplina e que o seu conhecimento lhes permita compreender o contexto em que se desenvolve.

**Palavras-chave:** modelagem, tarefas, professores, alunos.

## Introducción

El contexto social actual se ha caracterizado por un creciente y expansivo uso de la tecnología en todas las áreas del conocimiento, por la diversificación de quehaceres y por el requerimiento de nuevas habilidades y conocimientos en los individuos para su desarrollo social, laboral y personal. Aunado a ello, se ha reconocido la importancia de la interdisciplinariedad como un medio para la comprensión de los fenómenos sociales, naturales y científicos.

Lo anterior, implica, específicamente para la Educación Matemática, desarrollar espacios de formación que propicien en el estudiantado la ejecución y aplicación de procesos matemáticos de mayor complejidad, y estructuras de pensamiento orientadas a la resolución de problemas, acorde con las necesidades de la sociedad.

Por lo tanto, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática deben orientarse hacia el desarrollo de capacidades, por parte del estudiantado, relacionadas con la resolución de problemas, en distintos niveles de complejidad, y la aplicación de conceptos y procedimientos matemáticos acompañados de un alto nivel de justificación y argumentación, donde la modelización se constituye en una parte central para el logro de lo antes descrito (Ministerio de Educación Pública (MEP), 2012).

En este sentido, la matemática deber ser concebida como una herramienta para describir, explicar y transformar la realidad, vinculada con la creación de modelos y la resolución de problemas, que permitan la abstracción de los conceptos, números, medidas, formas, entre otros (Álvarez, 2007). Esto conlleva que, ante una situación problema, el estudiantado pueda

involucrarse en la resolución de esta, indagar sus condiciones particulares y generales, que le permitan a la persona estudiante generar conjeturas, identificar modelos para abordar el problema y reconocer la validez de un procedimiento o afirmación producida en este proceso (Bronzina et al., 2009).

El objetivo de la matemática es, por lo tanto, la formación de un ser humano crítico, pensante y transformador de su realidad (Rodríguez, 2010) con capacidad de aplicar los conocimientos matemáticos para la comprensión de su contexto y generar solución a los distintos problemas. Lo que, a su vez, se convierte en un reto para la enseñanza de la matemática, pues se deben ejecutar situaciones de aprendizaje con visión de futuro, donde se desarrolle capacidades de autoaprendizaje, de investigación, de creación y resolución de problemas, de conjetura y demostración, de uso de tecnología para la resolución de problemas y de construcción de modelos matemáticos (Malaspina, 2012).

Desde esta perspectiva, la construcción de modelos matemáticos, como estrategia pedagógica para la enseñanza de la matemática, adquiere una especial relevancia debido a factores asociados con la motivación del estudiantado, a la creación de ambientes educativos que propician el aprendizaje, a la preparación del estudiantado para usar las matemáticas en diferentes áreas y el desarrollo, en este, de habilidades de exploración y comprensión del papel sociocultural que posee la matemática (Barbosa, 2004). Según Barbosa (2004), modelar, en un sentido más amplio, constituye un ambiente de aprendizaje que incentiva al estudiantado a problematizar e investigar, por medio de la matemática, situaciones vinculadas a su realidad.

El objetivo de este documento es brindar argumentos en favor de la inclusión de la modelación matemática en los procesos de formación docente como un medio para crear en el profesorado habilidades y estrategias matemáticas y pedagógicas, que favorezcan su formación matemática, didáctico-matemática y la incorporación de este tipo de tareas en la clase, con el fin de propiciar el desarrollo de habilidades específicas en el estudiantado asociadas a la investigación, exploración, creación de conjeturas, argumentación, explicación, aplicación de la matemática, entre otras.

### ***Modelo, modelización y modelación***

Para el propósito del presente documento se expondrá, brevemente, la definición de modelo, modelización y modelación que se asume. Es importante aclarar que la discusión relacionada con dichos conceptos en un tema no acabado en la Educación Matemática y es objeto de estudio en diversas investigaciones.

Se define modelo matemático “a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación” (Villa-Ochoa, 2007, p. 67). Un modelo matemático es una imagen simplificada y formalizada de una parte del mundo real; formalmente se podría representar por medio de una tripleta  $(D, M, f)$  que consta de un dominio  $D$  del mundo real, un subconjunto  $M$  del mundo matemático y una aplicación de  $D$  a  $M$  (Niss et al. 2007, citado por Blum, 2015).

La construcción de un modelo matemático requiere, por parte de la persona que lo realiza, de conocimientos matemáticos, de análisis del contexto de la situación que se está modelando, del manejo habilidades como describir, establecer y representar relaciones entre variables y cantidades, entre otras (Villa-Ochoa, 2007).

El proceso mediante el cual se construyen modelos matemáticos se ha denominado modelización matemática. Algunos investigadores como Ríos (1995), Swets y Hartzler (1991) y Villa-Ochoa (2007) concuerdan en definirlo de esa manera, agregando a esta definición el hecho de que la modelización matemática permite una aproximación a problemas del mundo real mediante la matemática (Ríos, 1995) y de esta forma se constituye en parte de la resolución de problemas (Swets y Hartzler, 1991).

Por otra parte, se entiende como modelación matemática “la actividad que se realiza en la clase de matemáticas cuya naturaleza se deriva de la actividad científica de la modelización” (Villa-Ochoa, 2007, p. 70). Según Méndez et al. (2020) y Villa-Ochoa (2007) la modelación matemática, como enfoque de trabajo, se basa en el desarrollo de conceptos y nociones matemáticas que permiten la comprensión de esta, además, de realizar reflexiones sobre construcción de modelos, su concepción como una competencia para resolver problemas reales y su conceptualización como un proceso cíclico.

En este sentido, Villa-Ochoa (2007) realiza la diferenciación entre la modelización matemática (como actividad científica) y la modelación matemática (como herramienta para la enseñanza) con base en los siguientes criterios (Tabla 1).

**Tabla 1**

*Comparación entre la modelización matemática y la modelación matemática*

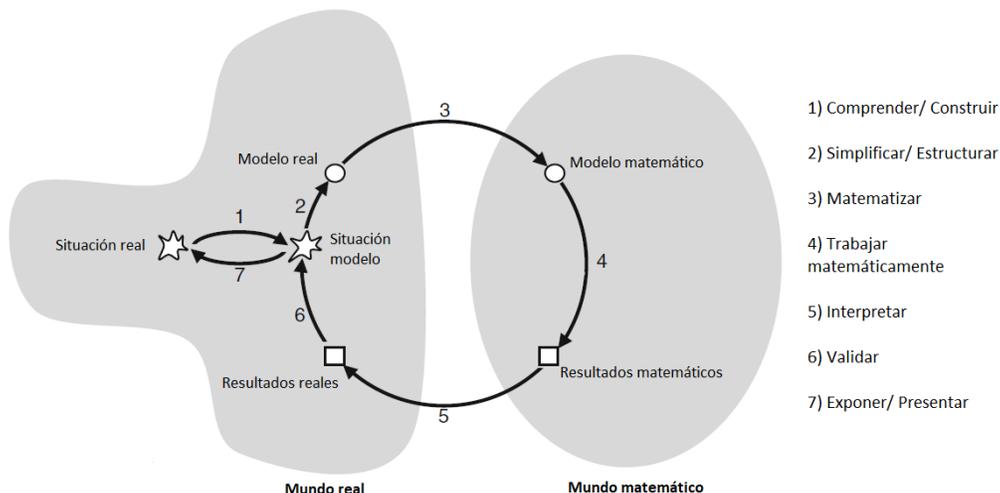
<b>Criterio</b>	<b>Modelización matemática</b>	<b>Modelación matemática</b>
Propósito del modelo	Dar solución a un problema o fenómenos de otras disciplinas o generar conocimientos científicos.	Construir conocimiento matemático con significado para propiciar la motivación e interés del estudiantado por la matemática y su aplicabilidad.
Los conceptos matemáticos	Surgen del proceso de solución por medio de la abstracción y simplificación del problema.	Se deben considerar previo a la elaboración y escogencia del contexto por parte del profesorado y según los propósitos de la clase.
Contextos	Problemas que no han sido estudiados o que se están analizando de forma diferente según el área disciplinar.	Los problemas deben estar relacionados con situaciones que han sido abordadas previamente por el profesorado en la clase para evaluar la pertinencia con los objetivos educativos propuestos.
Otros factores	Se aplica, generalmente, en contextos propios de un área disciplinar o científica sin relacionarse, necesariamente, a propósitos educativos.	Se emplea, generalmente, relacionado con contextos cotidianos o de otras ciencias.

Fuente: Villa-Ochoa (2007).

Finalmente, Méndez et al. (2020) indican que el proceso de modelar una situación o fenómeno a partir de una situación real o problema se realiza en dos contextos: el real y el matemático. Esto implica un ciclo de modelización que Blum (2015) resume en siete pasos en la siguiente figura (Figura 1).

**Figura 1**

*Siete pasos del ciclo de modelización según Blum (2015)*



Fuente: Blum (2015).

Como se puede observar, la construcción de un modelo implica un proceso de comprensión o construcción del problema o fenómeno, su simplificación o estructuración para su análisis, matematizar las relaciones entre las variables y cantidades, el trabajo matemático a partir de herramientas y conocimientos disciplinares, interpretación de los resultados, la validación de estos según el problema o fenómeno real, la exposición, presentación o comunicación de ellos y posibles conexiones con otras situaciones o modelos.

### ***¿Por qué la modelización y la modelación matemática deben incorporarse en los procesos de formación docente?***

De acuerdo con el MEP (2012) la estrategia principal de los Programas de Estudio de Matemáticas es el abordaje de la materia desde lo concreto hacia lo abstracto, donde la mediación pedagógica es fundamental para el desarrollo de procesos como razonar, argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, establecer relaciones, representar de diversas formas (gráficas, numéricas, simbólicas, tabulares) y comunicar y expresar ideas matemáticas, formal y verbalmente. Lo anterior, con el propósito de desarrollar la capacidad matemática para, entre otros procesos, resolver problemas y modelar diversas situaciones.

En este sentido, el MEP (2012) sugiere que en las lecciones de matemática se incorporen problemas relacionados con contextos reales (físicos, sociales o culturales) que impliquen su planteo, replanteo y resolución por medio del uso y construcción de modelos matemáticos. Así, “La contextualización que se propone busca fortalecer un papel estudiantil activo y comprometido con su aprendizaje, recalcando la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos adecuados para cada nivel educativo” (MEP, 2012, p. 17).

De acuerdo con el MEP (2012) este proceso de modelización se desarrolla en forma natural y se ve favorecido cuando la actividad educativa se centra en la organización de clases por medio

de problemas. Es en este contexto donde adquiere especial importancia el papel de la persona docente como generadora de actividades pedagógicas que incentiven la contextualización, resolución de problemas y modelización matemática.

Lo anterior requiere que la persona docente posea una sólida formación matemática y competencias tanto pedagógicas como de contenido para potenciar estas habilidades en el estudiantado. En este sentido,

una correcta aplicación de la modelación matemática en el aula de clases demanda un docente preparado y convencido para tal acción. A pesar de ello, la modelación matemática sigue ausente en la mayoría de los currículos de la formación inicial de docentes. Esto implica que sin la debida formación y desarrollo continuo, el docente sería incapaz de desarrollar planeaciones didácticas basadas en la modelación matemática y por consiguiente ser exitoso en su aplicación. (Zaldívar et al, 2018, p. 89)

Con el propósito de extraer evidencias de la propuesta para el abordaje de la modelización matemática en los planes de estudio de las universidades públicas que forman docentes de matemática, se procedió a realizar una lectura de los programas de los cursos de los planes de formación de la Universidad de Costa Rica (UCR), Tecnológico de Costa Rica (TEC), Universidad Estatal a Distancia (UNED) y Universidad Nacional (UNA). Es importante señalar que, en el caso de la UCR, TEC y UNA se pudo tener acceso a todos los programas de los cursos.

Sin embargo, en la UNED no fue posible tener acceso al programa de estudios completo. Las personas investigadoras, según su criterio y basados en la estructura curricular, identificaron aquellos cursos en los cuales se consideró que se podrían abordar aspectos de modelización. Una vez realizada la lista se procedió a solicitar los descriptores de dichos cursos.

La cantidad de programas de cursos analizados por universidad fue la siguiente: UCR 19; TEC 42; UNED 9; UNA 39. En cada curso se analizó si en la descripción de este, los objetivos, los contenidos, las indicaciones puntuales, entre otros, se hacía referencia a la modelización matemática.

Al analizar los programas de los cursos de los planes de formación docente en matemática de las universidades públicas, con las consideraciones realizadas, fue posible observar que, aunque se hace referencia a la modelización matemática, específicamente al proceso de modelización en la resolución de problemas, no se visualiza un análisis teórico del concepto, los procesos de modelización y las habilidades requeridas para ello.

Se hace mención a la modelización matemática como una habilidad en el estudiantado enfocada en su aplicación y en la realización de modelos, pero no se analizan los aspectos previos del modelado. Pareciera que se asume que la persona estudiante logra las habilidades requeridas en forma “natural” con el desarrollo de los contenidos matemáticos.

Aunque hay un esfuerzo por incorporar estos procesos en forma explícita, la ausencia de una reflexión teórica y su abordaje en forma integral en los planes de estudios puede provocar que el personal docente que imparte los cursos realice acciones aisladas, desde su propia perspectiva, para el desarrollo de la modelización matemática y que no relacionan con las acciones que se utilizan en otros cursos de formación docente.

Tampoco que observa un abordaje de la modelización matemática como una estrategia didáctica para la enseñanza de la disciplina. Se aborda como parte del proceso de formación, pero no para su práctica docente. Este aspecto es relevante si consideramos el hecho que la modelización

matemática es uno de los aspectos que el futuro personal docente debe abordar en el desarrollo del plan de estudios del MEP, por lo que es vital el desarrollo de estas habilidades en ellos.

La modelización y la modelación matemática se consideran factores indispensables en el proceso de formación docente como un medio para construir y aplicar el conocimiento matemático, para el desarrollo de estas habilidades en el profesorado y para diseñar ambientes de aprendizaje contextualizados, donde estos procesos se puedan desarrollar en función del estudiantado (Méndez et al., 2020).

Con base en lo anterior se evidencia la necesidad de que los planes de formación de docente de matemática incluyan conocimientos relacionados con la modelización matemática desde sus fundamentos teóricos y didácticos. Tanto las futuras personas docentes como las que imparten los cursos en estas carreras, deben tener claro cuáles son los abordajes existentes, las formas de hacerlo, tipo de actividades que se pueden utilizar y relacionar esto con las actividades de aula del futuro profesorado.

Desde esta perspectiva, es necesario que las instituciones formadoras de docentes de matemática inicien un proceso de reflexión sobre este tema y realicen las incorporaciones y modificaciones respectivas para garantizar que, como parte de las habilidades de las personas graduadas, estén aquellas relacionadas con la modelización matemática y su uso como una estrategia didáctica para la enseñanza de la materia.

### ***La modelización matemática como habilidad docente***

A lo largo de la historia existió, y aún hoy, una estrecha interrelación entre la matemática y otras ciencias. Esta aplicabilidad de la disciplina en otros campos del conocimiento no debe abordarse únicamente a nivel universitario, en las carreras que hacen un uso de ella en forma instrumental, sino que debe ser un eje transversal en la Educación Matemática en todos los niveles educativos.

La poderosa relación entre la matemática y la ‘realidad’ es el fundamento de la enseñanza matemática a nivel escolar; en particular, la matemática (álgebra, geometría, estadística) es el lenguaje de las ciencias y nos ayuda a abordar y entender problemas que enfrentamos como ciudadanos. (Borromeo et al., 2021, p. 17)

Dentro de este contexto, la modelización matemática surge como una estrategia pedagógica que permite abordar la aplicabilidad de la disciplina en otras áreas. Ciencias como la biología, fisiología, medicina, agronomía, economía, entre otras, constituyen campos del saber que pueden brindar numerosas aplicaciones y que, a la vez, demandan nuevas herramientas matemáticas que permitan un manejo más ágil de los datos, donde se tiene que evitar el desarrollo de acciones aisladas, dispersas o segmentadas por un abordaje de fenómenos o problemas de una forma integral y desde distintas disciplinas (Pochulu, 2018).

Cómo y por qué incluir modelos matemáticos en la Educación Matemática ha sido el foco de muchos estudios de investigación (Passarella, 2021). En mayo de 2018, el Consejo de la Unión Europea recomendó, entre las competencias claves para el aprendizaje, la competencia matemática relacionada con la capacidad de desarrollar y aplicar el pensamiento y la percepción matemática para resolver una variedad de problemas en situaciones cotidianas (Passarella, 2021). Lo anterior, con énfasis en el proceso y la actividad, así como en el conocimiento, lo que implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático y distintas representaciones como fórmulas, modelos, etc.

No obstante, en la enseñanza de la matemática son escasas las actividades donde el estudiantado tiene la oportunidad de aplicar sus conocimientos en situaciones reales; lo que genera una visión de la disciplina no muy favorable y la valoración de esta como poco aplicable (Hein y Salett, 2006). Este abordaje de la enseñanza de la matemática imposibilita que el estudiantado posea una visión amplia de la disciplina y se limite, en muchos casos, solo al manejo de algoritmos.

En este sentido, se señala que

Aprender matemáticas no consiste en disponer de un recetario de fórmulas que funcionan de una manera un tanto misteriosa o mágica, y, por similares razones a las que fundamentan la frase anterior, aprender esa disciplina tampoco es reunir una colección de aparatos que proveen de una colección de apps. Obviamente si bastara con disponer de unas cuantas fórmulas, el aprendizaje de la matemática se habría conseguido hace tiempo. (Borromeo et al., 2021, p. 13)

Por ello, autores como González (2021) indican que la matemática no puede asumirse como una colección de “técnicas y algoritmos, que facilitan el uso mecánico de simbologías, términos y cantidades, ya que éstos también requieren de una apropiación, para su representación, interpretación, comprensión y empleo apropiado, en contextos determinados” (p. 104). La comprensión conceptual de la matemática requiere de la aplicación de estrategias matemáticas que se vinculen al contexto inmediato (sociedad, familia, etc.), por lo que la formación académica del estudiantado debe relacionarse con la realidad y promover el entendimiento a través del juego, la simulación y la modelación (González, 2021).

Lo anterior implica realizar cambios en la forma en que concebimos el aprender y el enseñar matemática, por lo que el trabajo colaborativo, la tecnología, la integración de las disciplinas científicas y la matemática, el abordar problemas reales y el modelar para entender fenómenos, se convierten en aspectos que deben ser considerados en este proceso (Borromeo et al., 2021). En este contexto, “la modelización matemática ofrece una oportunidad de aprender la matemática del mismo modo en que, en términos generales, se la elabora –y, además, aquel en que con frecuencia surgieron grandes ideas de la matemática–” (Borromeo et al., 2021, p. 17).

Por ello, el estudio de los conceptos matemáticos debe estimularse por medio del desarrollo de habilidades y destrezas matemáticas en actividades de aprendizaje que incentiven la modelación de situaciones del contexto; lo anterior, favorece la apropiación del conocimiento al comprender y vivenciar el cómo, el para qué y el porqué de lo que se aprende (González, 2021).

Esta situación debe ser retomada y evidenciada en la formación de profesionales de distintas áreas, a través de la interdisciplinariedad, y debe ser uno de los pilares de la enseñanza de la matemática. La construcción de modelos matemáticos constituye una competencia matemática que todo individuo debe adquirir, en particular, los docentes de matemática (Henning y Keune, 2007). En este sentido, la inclusión y el desarrollo de prácticas matemáticas en la formación de docentes de la disciplina que promuevan la resolución de problemas, el uso de distintos contenidos matemáticos, la relación entre ellos y la estructuración de distintas formas de razonamiento, propician la comprensión de los diferentes aspectos que definen las matemáticas escolares y, a la vez, incentivan el desarrollo de habilidades asociadas con la modelación matemática (Forero, 2020).

Por esto, en el proceso de formación docente “se espera que el profesor de matemáticas tenga espacios donde pueda participar como resolutor, evaluador, investigador en actividades

asociadas a procesos de modelación matemática, en las cuales pueda constituir experiencias de formación que contribuyan en su desarrollo profesional” (Forero, 2020, p. 78).

Se ha reconocido que “La práctica efectiva de la modelación en el aula es desafiante para los docentes, por lo que la calidad de las experiencias de aprendizaje de los alumnos dependerá de la calidad de la formación que los profesores puedan ofrecer” (Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-Gallegos, 2021, p. 17). Por lo tanto, no se puede negar el hecho que el uso de la modelización matemática en la enseñanza de la disciplina depende, en gran parte, de la habilidad y conocimiento que sobre esta posea el personal docente. Es con base en lo anterior que adquiere relevancia la incorporación de procesos de modelización matemática en la formación del profesorado.

El desarrollo de actividades y proyectos de modelización matemática en la formación de futuros profesores resulta de vital importancia debido a que, tanto en documentos curriculares para la formación inicial de profesores de matemática, como en documentos curriculares para la educación secundaria, se recomienda la introducción de aplicaciones y modelización para la enseñanza de la matemática. Diversos investigadores indican que, si se pretende que los futuros profesores diseñen actividades de modelización para sus clases en la escuela secundaria, es necesario que tengan experiencias de modelización durante su formación inicial. (Villarreal, 2019, p. 219)

Rosa et al. (2014) plantean la relevancia de analizar la modelización matemática en la formación universitaria de las futuras personas docentes de la materia matemática desde dos argumentos principales.

Uno de ellos es la relación de la modelización matemática con los currículos de los niveles de educación primaria y secundaria. En Costa Rica, por ejemplo, el programa de estudio de primaria y secundaria tiene como eje transversal la contextualización activa, y en los niveles del ciclo diversificado de la educación secundaria, la modelización matemática constituye un contenido matemático a desarrollar. De esta forma, tal y como lo plantean Rosa et al. (2014), el currículo de formación del profesorado de matemática debe responder a esta necesidad y desarrollar en el futuro personal docente las habilidades relacionadas con este proceso y su aplicación como estrategia didáctica.

El segundo argumento planteado por Rosa et al. (2014) radica en torno a las competencias que se esperan del estudiantado por parte organismos internacionales, como PISA u otros, con respecto a la matemática y a las habilidades y niveles de competencia en modelización matemática. Estas personas autoras hacen explícitas algunas necesidades, dimensiones, tipos de contextos, situaciones o fenómenos que pueden generar procesos de modelización matemática acordes con los requerimientos que emergen de los programas de formación de algunas personas profesionales. Aspectos como la dimensión crítica de la modelización matemática, el papel mediador de la tecnología, la modelación en el aprendizaje de la matemática, la aplicación de los contenidos en contextos reales y de futuro desempeño profesional, deben ser abordados en la enseñanza de la matemática en distintos niveles.

A la futura persona docente de matemática la modelización matemática le facilita el desarrollo de capacidades para comprender y reflexionar sobre el aprendizaje de la asignatura y las posibles estrategias didácticas para su enseñanza (Mora y Ortiz, 2012). Además, favorece la reflexión sobre la vinculación e integración de la matemática en el contexto educativo y social; el establecer relaciones entre los contenidos matemáticos específicos y los contenidos matemáticos escolares; el abordar situaciones problema por medio de estrategias de enseñanza que incentiven

el manejo y uso de conceptos y procedimientos matemáticos; el realizar experiencias de simulación de este proceso, como estrategia de enseñanza; y contribuye a desarrollar su propia competencia de modelización.

Así, Rosa et al. (2014) señalan cuatro aspectos fundamentales de la modelización matemática que deben abordarse en la formación universitaria y que no son ajenos a la formación docente

- a) el rol de la modelización, la tecnología y la experimentación en la comprensión de las nociones matemáticas;
- b) aspectos que pueden tenerse en cuenta en el diseño de contextos didácticos con modelización matemática;
- c) la dimensión crítica y reflexiva de la modelización matemática;
- d) la necesidad de "transponer" cierto tipo de prácticas de modelización a la formación de profesores de matemáticas.

En este sentido, incorporar la modelización matemática en la formación docente es esencial para promover en este el desarrollo de las habilidades y destrezas asociadas a ella, y que requiere el futuro profesorado para enfrentarse a diferentes situaciones problema, lo cual es de vital importancia en sus competencias profesionales (Mora y Ortiz, 2012; Sánchez et al., 2020). Además, propicia la valoración de la modelización matemática como una estrategia de enseñanza y la incorporación de la tecnología en este proceso.

La incorporación de la modelización matemática en los procesos de formación docente le permite al futuro profesorado dar sentido a la matemática más allá de una concepción limitada a un conjunto de reglas, procedimientos y técnicas; favorece su creatividad, el análisis e interpretación datos y el desarrollo de estrategias y recursos que le otorgan herramientas para la selección actividades de aprendizaje aplicables en contextos de aula, lo que posee consecuencia directa en su quehacer didáctico y pedagógico.

Este proceso se debe de complementar con las voces del profesorado, con el fin de comprender qué tipo de apoyo necesitan para desarrollar e implementar actividades en el aula que puedan incentivar en el estudiantado el desarrollo de competencias matemáticas, el razonamiento y el pensamiento crítico, donde el modelado y el planteamiento de problemas sean estrategias educativas valiosas para lograr tales resultados (Passarella, 2021).

La futura persona docente debe ser consciente de que la modelización matemática, como recurso didáctico, propicia en el estudiantado espacios para el debate y la toma de conciencia sobre la aplicación de la matemática en diferentes aspectos de la sociedad y el papel sociocultural de la disciplina; además de ser una actividad que requiere el empleo y desarrollo de competencias y conocimientos, tanto matemáticos como de otras áreas, para la comprensión, explicación y traducción, al lenguaje matemático, de los fenómenos que se analizan (Barbosa, 2004; Blum, 2015).

### ***La modelación matemática como una estrategia didáctica***

La inclusión de la matemática como una asignatura obligatoria en los currículums escolares responde a diversas razones, entre ellas, a que esta se constituye en una herramienta para la comprensión de situaciones del mundo real, incentiva el desarrollo de competencias matemáticas generales, constituye una parte de la cultura y de la sociedad y proporciona una formación base

para que la persona participe en la dinámica social como persona ciudadana crítica, responsable e independiente (Blum, 2015).

La modelización, como método de enseñanza de la matemática, permite en el estudiantado un mejor aprendizaje de los contenidos relacionados con la disciplina y el reforzamiento del pensamiento crítico y reflexivo y su habilidad en la lectura, interpretación, formulación y resolución de situaciones problemas. “Al respecto, seguramente conviene distinguir desde ya la modelización y la resolución de problemas en general: un problema podría tratar una cuestión puramente matemática, y el modelo ha de tener una conexión necesaria con la ‘realidad’” (Borromeo et al., 2021, p. 15). El modelado y la formulación de problemas representan formas típicas de trabajo y pensamiento de los matemáticos en todos los niveles (Passarella, 2021).

Sin embargo, aun cuando la modelación matemática ha sido considerada como esencial en los programas escolares de muchos países, esta no se aplica a profundidad (Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-Gallegos, 2021). Incluso, Villarreal (2020) destaca que el desarrollo de actividades de modelización, con base en datos obtenidos a partir de distintos experimentos, es de poco uso en las aulas escolares.

Modelar el contexto por medio del uso creativo de los distintos elementos relacionados con este y con la interacción y retroalimentación constante de la persona docente, contribuye a la creación de ambientes de enseñanza y aprendizaje dinámicos y motivantes para el estudiantado; además, permite el mejoramiento de deficiencias en este y potencia el desarrollo de habilidades matemáticas y útiles para la vida (González, 2021).

En este contexto, la inclusión de la modelación matemática en el aula, según Blum (2015), Molina-Mora, 2017, Moreno et al. (2021), Passarella (2021) y Villarreal (2020), permite al estudiantado

- a) despertar su interés por el aprendizaje de la matemática, comprenderla mejor y dar sentido a su aprendizaje y a los conocimientos matemáticos que se estudian;
- b) percibir la aplicabilidad de la matemática y la relación de esta con el mundo exterior;
- c) adquirir los conocimientos matemáticos como una herramienta para su uso fuera del aula y en el contexto en el que se desenvuelve;
- d) abordar, comprender, simular, analizar, describir y explicar problemas de la realidad, del contexto, bajo distintas condiciones, para relacionarlos con la matemática y optimizar ciertos aspectos vinculados con estos;
- e) traducir problemas reales al mundo matemático;
- f) participar en procesos de modelización matemática y mejorar, en forma paulatina, las habilidades relacionadas con estos;
- g) interpretar resultados y hacer modificaciones al modelo creado si este no es adecuado para la situación;
- h) ampliar su visión de la matemática, como ciencia, en un sentido más integral.

Al aplicar la modelización en el aula, el profesorado tiene que proponer a las personas estudiantes situaciones de la vida diaria o que le sean familiares, donde se pongan en juego conocimientos matemáticos; esto requiere de un enorme compromiso de su parte, ya que debe asumir el reto de innovarse constantemente y enfrentarse a las dificultades del tiempo, un desempeño estudiantil variado, concentrarse en buscar un equilibrio entre los aspectos de la modelización que son importantes rescatar y los conceptos que se quieren enseñar (Cuenca et al., 2019).

Desde esta perspectiva, Blum (2015), con base en hallazgos de otras investigaciones, señala una serie de aspectos importante a considerar para la modelación matemática

- a) Una gestión de la clase efectiva y centrada en la persona estudiante, donde se identifique claramente el proceso de aprendizaje y el proceso de evaluación, donde el error se utilice como un medio para el aprendizaje y donde se haga uso de distintos recursos y estrategias didácticas.
- b) Incentivar al estudiantado a participar activamente en las actividades de modelación matemática, ya sea en forma grupal o individual, con independencia de criterio y pensamiento y con la guía de la persona docente.
- c) Incluir el desarrollo de habilidades metacognitivas que propicien la reflexión y visión retrospectiva con el propósito de retroalimentar el trabajo estudiantil y del profesorado, que permita mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- d) Diseñar tareas adecuadas, en cantidad y forma, según el contexto del estudiantado, que combine situaciones reales y la aplicación de contenidos matemáticos.
- e) El profesorado debe incentivar en el estudiantado la formulación de soluciones a las tareas planteadas según su criterio individual. La persona docente debe limitar su participación en este proceso para no imponer una estrategia de solución; en este sentido, su rol debe ser el de guía.
- f) Las habilidades relacionadas a los procesos de modelización matemática se construyen de forma paulatina y deben favorecerse en todos los niveles educativos. Se requiere, a nivel educativo, del planteamiento de un modelo (o pueden presentarse varios) para el desarrollo de habilidades para la modelización.
- g) La modelación matemática debe vincularse también en los procesos de evaluación. No tiene sentido plantear tareas de modelación para el aprendizaje si la evaluación no posee vinculación con ellas. La evaluación debe servir para identificar las fortalezas y debilidades que presenta el estudiantado con el propósito de idear estrategias para atenderlas.
- h) Paralelamente al proceso de habilidades en modelización matemática, el profesorado debe estar atento al adecuado desarrollo de creencias y actitudes del estudiantado, constructos cuya modificación y desarrollo se da en procesos a largo plazo.
- i) Incorporar el uso de la tecnología en el proceso de modelación matemática y garantizar el uso adecuado por parte del estudiantado.
- j) Existe evidencia que el estudiantado puede desarrollar habilidades en modelización matemática y mejorar su actitudes y creencias hacia la disciplina cuando las tareas de aprendizaje han logrado el objetivo para el que fueron diseñadas. Por eso es importante que el profesorado posea habilidades en la modelización y modelación matemática.

El modelado y el planteamiento de problemas son poderosas estrategias educativas para mejorar la enseñanza de la matemática en un enfoque de reinención guiada. Además, una introducción al modelado y al planteamiento de problemas puede verse como un medio para reconocer el potencial de la matemática como una herramienta crítica para interpretar y comprender la realidad de la comunidad en la que viven las personas estudiantes o la sociedad en general (Passarella, 2021). Así, el proceso de aprendizaje debe ser un espacio de equilibrio entre la libertad de invención de estudiantado y la orientación del profesorado, donde el uso de situaciones problemas significativas, tanto para el aprendizaje de la matemática como para el personal docente, favorezcan el dar significado a los constructos matemáticos que se desarrollan mientras se resuelven problemas.

## Tipo de tareas de modelación matemática que se pueden emplear en el aula

De acuerdo con Blum (2015) y Villa-Ochoa et al. (2017), el desarrollo de la modelación matemática en un ambiente de aprendizaje requiere de la inclusión de ejemplos y tareas adecuadas, tomadas del contexto (periódicos, noticieros, actividades culturales, familiares o productivas), que se constituyan en problemas para el estudiantado (no ejercicios), tratar temas o situaciones conocidas para ellos (juegos, compras, impuestos, cálculo de tarifas, tráfico aéreo o vehicular, entre otros) y que impliquen el desarrollo de habilidades metacognitivas. En este sentido, no se puede determinar si una tarea es adecuada o no de forma a priori, pues dependerá de los objetivos que se pretenden lograr y el contexto en el cual se plantee.

En este proceso interactúa la problematización y la investigación, a partir de las cuales tanto docentes como estudiantes plantean preguntas o problemas, y a partir de la búsqueda de información y su selección, organización, manipulación, análisis y reflexión, se trazan respuestas o soluciones (Barbosa, 2004).

En la resolución de las tareas de modelación matemática, tanto el estudiantado como el profesorado pueden tener distintos roles. Con respecto a lo anterior, Barbosa (2004) señala tres posibilidades

Proceso	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Formulación del problema	La persona docente presenta el problema	La persona docente formula el problema inicial con algunas orientaciones	La persona docente o el estudiantado formulan el problema a resolver (puede ser en forma conjunta) con algunas especificaciones
Simplificación del problema	La persona docente delimita el problema en su formulación	La persona docente y el estudiantado discuten la delimitación del problema	La persona docente o el estudiantado delimitan el problema a resolver (puede ser en forma conjunta)
Recolección de datos	La persona docente presenta los datos cuantitativos o cualitativos en la formulación del problema	La persona docente discute con el estudiantado los datos cuantitativos y cualitativos recolectados y aportados por este	El estudiantado recolecta datos cuantitativos y cualitativos y los discuten con la persona docente
Solución del problema	La persona docente guía el proceso mientras el estudiantado resuelve el problema	La persona docente discute con el estudiantado sobre el proceso de resolución del problema mientras este lo ejecuta	El estudiantado resuelve el problema y discute con la persona docente para guía u orientaciones generales

Específicamente sobre el tipo de problemas a utilizar, Blum (2015) menciona distintas perspectivas sobre el tipo de ejemplos y tareas a desarrollar según los objetivos que se plantean

- pragmática, donde se hace uso de actividades tomadas del contexto, las cuales se orientan a la comprensión, por parte del estudiantado, de fenómenos y situaciones del mundo real (modelado aplicado);
- formativa, donde las actividades implican el uso de estrategias metacognitivas cuyo propósito es el desarrollo de competencias en el estudiantado relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje (modelado educativo);

- c) cultural con intención emancipatoria, donde a través de actividades tomadas del contexto se pretende que el estudiantado adquiriera conciencia del papel de la matemática (modelado sociocrítico);
- d) cultural concerniente a la matemática, donde las actividades se orientan al entendimiento de la matemática como una ciencia (modelado epistemológico);
- e) psicológica con intención de marketing, que implica el desarrollo de actividades que resulten interesantes al estudiantado y presenten la matemática como una materia amena, cuyo fin es motivar la resolución y el disfrute en el aprendizaje (modelado pedagógico);
- f) psicológica, donde las actividades son de naturaleza mayormente matemática y se orientan a facilitar la comprensión de los contenidos (modelado conceptual).

En este sentido, Villa-Ochoa et al. (2017) presentan una clasificación alternativa de las tareas o situaciones de modelización matemática que se reportan en la literatura. Los autores indican que esta clasificación no está acabada y no pretende generalizar pero que podría servir de insumo para la toma de decisiones sobre el tema tanto para docentes como para personas investigadoras en Educación Matemática. La clasificación propuesta por Villa-Ochoa et al. (2017) se compone de cuatro categorías y algunas subcategorías

- a) Enunciados verbales, representados por textos o párrafos que presentan una situación problema relacionada, en distinto grado, a la realidad de la persona estudiante, con una interrogante del tipo cuantitativo cuya respuesta requiere del uso de la matemática.

Se subdivide en dos

- i) Realistas, enunciados de situaciones problemas que hacen referencia a aspectos realistas o imaginarios pero que no poseen una vinculación directa con la cotidianidad de la persona estudiante.

<b>Ejemplo</b>	<b>Visión de modelación</b>	<b>Alcances y limitaciones en el aula</b>
Una familia de cuatro personas ha invitado a tres amigos a comer a su casa. ¿Cuántos puestos se pondrán en la mesa?	El principal propósito es el descubrir la estructura matemática relacionada al enunciado para su solución. Involucra dos sistemas: el matemático y el imaginado. La noción de realidad se reduce a una construcción imaginaria.	Este tipo de tareas le permite al estudiantado: la comprensión de los elementos del problema; la construcción de un modelo matemático a partir las relaciones que se identifican en el enunciado; obtener, interpretar, evaluar y comunicar los resultados matemáticos y su interpretación en el mundo real. El objetivo de estas tareas se asocia a la enseñanza o evaluación de un contenido matemático, por lo que el diseño de estas involucra dichos contenidos y sus propiedades.

- ii) Auténticos, enunciados de situaciones problema que presentan una mayor relación entre la matemática y el conocimiento extraescolar del estudiantado, por lo que incentiva la interacción con el mundo real, el contexto de la persona, su actividad diaria, realidad personal, entre otros, lo que aporta un mayor sentido de la tarea para el estudiantado. Estas tareas pueden tener su origen en la experiencia de la persona o puede ser externa a esta.

<b>Ejemplo</b>	<b>Visión de modelación</b>	<b>Alcances y limitaciones en el aula</b>
Comparación entre los planes de telefonía celular que tienen los usuarios para analizar la mejor opción en el mercado	Estas tarea implican la construcción de un modelo matemático basados en dominio extramatemático, influenciado por el tipo de problema que se enuncia y los alcances de este.	Permite al estudiantado involucrarse en la resolución de la tarea por medio de representaciones matemáticas de su contexto para profundizar en la relación de la matemática con su vida cotidiana.

según sus características.	Implica identificar situaciones en el contexto de la persona estudiante que podrían ser modeladas.	La idea de “realidad” se vincula con situaciones con un contexto posible.
----------------------------	--	---

b) Construcción de representaciones, actividad que se vincula a las distintas visiones sobre la modelización y cuyo uso posee relación directa con las actividades que el profesorado desarrolle en la clase. Estas representaciones pueden ser

- i) Gráficas, basadas en tareas donde se requiere analizar variaciones, cambios o patrones; podría considerarse como una manera de realizar modelización matemática que promueven el aprendizaje de un contenido matemático por medio del uso de distintas herramientas, cognitivas y tecnológicas, como el software dinámico, y que permitan una mejor comprensión de este.

Ejemplo	Visión de modelación	Alcances y limitaciones en el aula
Estudiar la variación del área de un rectángulo inscrito en un cuadrado.	Este tipo de tareas permite la reinterpretación de un problema en diferentes ámbitos de la matemática, pues, dependiendo del planteamiento, permite analizar situaciones de un dominio extramatemático a través de un dominio matemático. El estudiantado puede identificar cantidades variables, constantes, centrar su atención en las que se consideran relevantes y realizar otras representaciones que modelen las relaciones identificadas entre las cantidades.	Estas tareas permiten al estudiantado comprender un determinado fenómeno o problema para su abordaje desde el dominio matemático, lo que implica el desarrollo de habilidades para la construcción y manipulación de representaciones, así como de la capacidad de razonamiento, planteamiento de conjeturas e interpretación de resultados.

- ii) Modelado de las formas (simulación), este tipo de tareas se enfocan en la reproducción de formas o comportamientos mediante el uso de la tecnología.

Ejemplo	Visión de modelación	Alcances y limitaciones en el aula
Representación de objetos como ventanas, sillas, representaciones tridimensionales, etc. Aplicación de modelos geométricos para analizar otros con características similares; por ejemplo, simular el movimiento de un objeto en geometría dinámica para su estudio.	Tareas asociadas a modelación, modelación geométrica o modelación computacional. Este tipo de tarea conlleva una relación entre dos entes o sistemas, en los cuales en uno de ellos se representa o simula (no implica comprensión de las variables) y en el otro, basado en la simulación y desde un punto de vista matemático, se lleva a cabo el estudio y explicación del fenómeno.	Este tipo de tarea promueve en el estudiantado el razonamiento matemático, análisis de relaciones, planteamiento de conjeturas, construcción de representaciones, entre otros.

c) Modelación a través de proyectos, estas tareas, con enunciados abiertos y diferentes formas de solución, propician procesos de indagación, profundización y de resolución de problemas; se emplean para que el estudiantado desarrolle habilidades para establecer relaciones entre los contenidos matemáticos y otras disciplinas, así como para propiciar procesos de reflexión crítica de la aplicación de la matemática en la vida cotidiana. Por esta razón, la modelización matemática, en este tipo de tareas, surge como una respuesta a los problemas del estudiantado desde su realidad.

Ejemplo	Visión de modelación	Alcances y limitaciones en el aula
Analizar cómo optimizar el consumo de energía en un grupo familiar	Estas tareas pretenden simular la actividad matemática, y el ciclo de modelización de profesionales en el área de la matemática aplicada, quienes trabajan con profesionales	Estas tareas se basan en situaciones concretas, con distintas soluciones, por medio de las cuales el estudiantado puede organizar e interpretar información,

	de otras áreas para resolver problemas y analizar distintos fenómenos. Propicia el análisis de un problema desde las condiciones del contexto en el que este se presenta, haciendo uso de conocimientos matemáticos y de otras disciplinas para dar una solución a este.	establecer relaciones matemáticas y aplicar conocimientos y procesos matemáticos. Las tareas se seleccionan con base en los intereses del estudiantado, por lo que el contenido matemático se manifiesta a partir del fenómeno que se analiza y la delimitación que se haga de este.
--	---	---

d) Uso y análisis de modelos, implica el uso de modelos realizados en distintas disciplinas para la comprensión de ciertos fenómenos, con el propósito de comprender su proceso de construcción, su estructura, su representación y, en general, el comportamiento de estos.

Ejemplo	Visión de modelación	Alcances y limitaciones en el aula
Análisis de modelos como - Índice de masa corporal. - Crecimiento fetal. - Deshidratación de alimentos. - Reproducción de la malaria.	Estas tareas propician el trabajo matemático y la comparación de modelos con otros ya construidos, con datos obtenidos por el estudiantado, para realizar proyecciones y analizar limitaciones, conjeturas, ampliaciones, entre otros.	Este tipo de tareas permiten el planteamiento de entornos de aprendizaje para que el estudiantado conozca sobre diferentes fenómenos, sociales y profesionales, de distintas disciplinas, y la reinterpretación de los modelos analizados. Contribuye con la formación matemática, social y personal del estudiantado.

Desde nuestra perspectiva, las tareas de modelación que se presenten al estudiantado debe ser actividades que impliquen investigación por parte de este, la delimitación del problema, la búsqueda de información y el análisis de esta. Así, la solución podría no ser única, pues depende de las condiciones que la persona estudiante asuma; además, se debe propiciar una espacio donde el estudiantado tenga la oportunidad de comunicar sus resultados y el proceso realizado.

Por ejemplo, a partir del planteamiento del problema de Guerrero (2016), se podría trabajar en clase la siguiente tarea.

*Los cambios climáticos traen consigo problemas a los países en los que la energía eléctrica se deriva de la energía hidráulica, tal es el caso de Costa Rica, que se ha visto afecta en los últimos tiempos por estos cambios. Podría usted calcular*

- ¿Cuánta energía eléctrica se consume diariamente en su hogar por artefacto eléctrico?*
- ¿Qué artefactos eléctricos tienen un impacto mayor en la factura eléctrica de su hogar? (Podría elaborar una tabla donde, por artefacto eléctrico, se indique la cantidad de estos en su hogar, capacidad en watts por hora, horas de uso diario, consumo total de watts por día, costo por día, entre otros).*
- ¿De qué manera puede generar un plan de ahorro de energía para reducir el consumo de energía eléctrica? Determine el impacto de ese plan de ahorro (utilice la información generada en la pregunta anterior)*
- ¿Se podrá utilizar este plan en otros hogares?*

Para resolver este problema, la persona estudiante debe analizar el entorno familiar e investigar datos relacionados con el pago mensual de electricidad, cantidad de watts de consumo, precio aproximado por watt, entre otros. Además, con el propósito de analizar el proceso empleado por el estudiantado, la persona docente puede plantear preguntas como: ¿Qué pasos se siguieron para la resolución del problema? ¿Qué supuestos o qué condiciones fueron consideradas para la resolución del problema? ¿Qué otras preguntas se podrían plantear a partir de los datos obtenidos?

¿Qué consideraciones adicionales se le podrían hacer el problema? ¿Qué otras situaciones problema se podrían diseñar a partir del problema dado?

La persona docente, además, podría, a partir del procedimiento empleado por el estudiantado y la comunicación de la solución obtenida, determinar si este es capaz de

- a) Aplicar conocimientos matemáticos en la resolución de diversas situaciones.
- b) Manejar y dar sentido a datos naturales y experimentales.
- c) Determinar las variables y parámetros involucrados en el problema.
- d) Reconocer patrones en los datos del problema.
- e) Diferenciar la información relevante para dar solución al problema.
- f) Configurar un modelo que representa el sistema y relacionar sus variables significativas.
- g) Interpretar el modelo matemático a partir de situaciones reales para validar los resultados obtenidos y generalizarlos a otro tipo de situaciones
- h) Construir modelos matemáticos a partir de situaciones reales para reconocer la importancia de la matemática en la vida cotidiana.

En cualquiera de los escenarios y contextos en el que se lleve a cabo el proceso educativo, el profesorado debe ser consciente que la modelación matemática requiere de un proceso gradual y de una planificación cuidadosa. El éxito o no de este dependerá no solo del profesorado sino del involucramiento de la parte estudiantil, implicando un proceso de aprendizaje para ambas partes.

### ***Reflexiones finales***

La modelización matemática permite a las personas construir modelos sobre distintos fenómenos sociales, científicos y tecnológicos, con el propósito de comprenderlos, analizarlos, establecer relaciones, realizar predicciones, entre otros, para la toma de decisiones y la generación de conocimiento. Este proceso requiere de una gama de habilidades como comprender, describir, visualizar, argumentar, relacionar, entre muchas otras, que no se relacionan únicamente con la matemática, sino que se consideran habilidades que la persona puede aplicar en otras ciencias, campos y en su vida cotidiana.

Por la importancia que posee la modelización matemática como herramienta para para la formación integral de la persona, su uso debe ser implementado tanto en los procesos de enseñanza y aprendizaje del estudiantado como en la formación del profesorado.

El uso de la modelización matemática en la clase, orientada al desarrollo de habilidades y conceptos matemáticos en el ámbito educativo, por medio de la modelación matemática, permite al estudiantado el desarrollo de un pensamiento crítico, reflexivo y autónomo, que no solo impacta a nivel educativo sino en ámbito personal y social; le permite, además, ampliar su visión de la matemática y le otorga herramientas para ampliar su conocimiento mientras comprende y soluciona problemas relacionados con su contexto.

Los procesos de modelación matemática deben ocupar una parte importante en la enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Lamentablemente en muchas de las lecciones de esta materia, estos procesos han estado ausentes o su aplicación se reduce o confunde con el planteamiento de ejercicios algorítmicos que no implican una mayor demanda cognitiva para el estudiantado.

La modelación matemática constituye una herramienta para que el estudiantado comprenda su realidad y contexto a través de su representación y análisis, donde los conocimientos, habilidades y estrategias matemáticas son los recursos que facilitan el proceso de aprendizaje. A la vez, favorece en el estudiantado la capacidad para la toma de decisiones y transformación de su contexto.

Pero para poder incentivar en el estudiantado estas habilidades es necesario primero que el profesorado las posea y que conozca cómo implementar la modelización matemática como una estrategia didáctica. Por ello, la incorporación de procesos de modelización matemática en la formación docente constituye una actividad fundamental no solo para la construcción del conocimiento matemático, sino para la identificación de ambientes de aprendizaje donde se pueda implementar.

Este tipo de tareas le exigen al profesorado una planificación adecuada de estas, pues debe combinarse conocimientos matemáticos y situaciones del contexto del estudiantado. Además, podría requerir del trabajo interdisciplinario con docentes de otras asignaturas y otros profesionales.

La planificación de estas tareas implica, además, contemplar aspectos de interés para el estudiantado con el fin de desarrollar determinados contenidos y habilidades. Por ello, el profesorado debe estar consciente de las posibles limitaciones, alcances, formas de solución y conexiones con otros temas o disciplinas.

Las habilidades requeridas en las personas docentes abarcan desde poder realizar modelos matemáticos, como parte de su formación matemática, hasta la identificación de fenómenos o situaciones para modelar en el aula, según el contexto del estudiantado, y el diseño de tareas apropiadas para los objetivos que se desean alcanzar.

En este sentido, la persona docente debe conocer el contexto en el cual se realiza el proceso educativo para identificar situaciones que resulten familiares para el estudiantado, que se puedan problematizar como una tarea de modelación, y plantear los objetivos, conocimientos y recursos que se pueden utilizar en este proceso.

El diseño de tareas contextualizadas resulta un aspecto esencial para la modelación matemática, pues uno de los propósitos es captar el interés del estudiantado, que este valore la aplicabilidad de la disciplina y su potencial para resolver problemas cotidianos; entre otros objetivos, se trata de darle sentido a la matemática.

El currículum costarricense en el área de la matemática contempla la modelación matemática como uno de sus ejes. Aún falta mucha investigación para determinar cómo se están implementando esta en el salón de clases. Basados en los planes de estudios de formación profesional analizados, pareciera que, aunque hay un esfuerzo por su implementación en ellos y que es una actividad propia de la disciplina que se realiza en diferentes niveles de los cursos de las distintas carreras, no se nota una base teórica para su abordaje ni como actividad científica ni como pedagógica. Esto podría derivar en una ausencia, quizás no intencional, en la formación del futuro profesorado que limitaría la modelación matemática.

Por ello se deben realizar esfuerzos orientados en dos direcciones principales. La primera, implementar de manera explícita en los procesos de formación docente la modelación matemática desde una perspectiva teórica y práctica, que le permita al profesorado en formación conocer los fundamentos teóricos, procesos y habilidades relacionadas, como también su aplicación en el aula.

La segunda, ejecutar procesos de formación continua para el personal docente que actualmente está en las aulas de la educación secundaria, con un propósito similar al indicado anteriormente, pero enriquecerlos con las voces del profesorado con respecto a su experiencia en el desarrollo de este tipo de tareas en la clase de matemática.

No se puede asumir que en la formación de docentes las personas pasan de ser estudiantes a docentes en un proceso casi automático. Aun cuando los programas de formación incorporen la modelación matemática en sus estructuras curriculares, las instituciones que forman profesionales para la docencia deben continuar realizando proceso de actualización.

La formación matemática y pedagógica de la persona docente no finaliza cuando obtiene el título universitario, por lo que las instituciones en las que se graduaron tienen la obligación de plantear procesos de formación continua como una forma de seguimiento, actualización y mejoramiento del ejercicio profesional.

### **Reconocimiento**

Artículo elaborado en el marco del proyecto de investigación: *La modelización matemática en la formación del docente de matemática: su abordaje y aplicación*, código SIA 0052-20, Universidad Nacional, Costa Rica.

### **Referencias bibliográficas**

- Acebo-Gutiérrez, C.J. y Rodríguez-Gallegos, R. (2021). Diseño y validación de rúbrica para la evaluación de modelación matemática en alumnos de secundaria. *Revista Científica*, 40(1), 13-29. <https://doi.org/10.14483/23448350.16068>
- Álvarez, Y. (2007). *Actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes de ingeniería de las universidades venezolanas* (Tesis doctoral). Departamento de Psicología y Metodología de las ciencias del comportamiento. Facultad de Psicología. Universidad de Málaga, España.
- Barbosa, J. (2004). Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? *Veritati*, 4, 73-80. [http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos\\_teses/2010/Matemat\\_ica/artigo\\_veritati\\_jonei.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matemat_ica/artigo_veritati_jonei.pdf)
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). Springer.
- Borromeo, R., Mena, J. y Mena, A. (2021). *Fomento de la Educación STEM y la Modelización Matemática para profesores Fundamentos, ejemplos y experiencias*. Kassel University Press.
- Bronzina, L., Chemello, G., y Agrasar, M. (2009). *Aportes para la enseñanza de la Matemática. Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo*. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.
- Cuenca, M., Palauro, L., Astiz, M. y Vivera, C. (2019). La modelización matemática. Análisis de entrevistas a docentes y su material de clase. *Revista de Educación*, (16), 161-172.
- Forero, A. (2020). Procesos de modelación matemática en formación de profesores de matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia*, 9 (2), 66–79. <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v9n2.86884>

- González, D. (2021). La modelación, un recurso pedagógico para el pensamiento numérico y el aprendizaje significativo. *Revista Scientific*, 6(19), 102-121. <https://doi.org/10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2021.6.19.5.102-121>
- Guerrero, F. (2016). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelización matemática. Caso: Estudiantes del primer año de educación media. *Revista Ciencias de la Educación*, 26, 47, 93-1136. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/47/art06.pdf>
- Hein, N. y Salett, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. *Memorias del V Festival Internacional de Matemática*, 1-25. <http://www.cientec.or.cr/archivo/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf>
- Henning, H., & Keune, M. (2007). Levels of modelling competencies. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 225-232). Springer.
- Malaspina, U. (2012). Enseñanza de las matemáticas: retos en un contexto global y aportes en una retrospectiva histórica. *Revista Iberoamericana De Educación Matemática*. ISSN: 1815-0640
- Malaspina, U. (2012). Enseñanza de las matemáticas: retos en un contexto global y aportes en una retrospectiva histórica. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 32, 9-27. <http://funes.uniandes.edu.co/15908/>
- Méndez, M., Céspedes, N. y Flórez, I. (2020). *Caracterización de ambientes y tareas de modelación matemática en la formación de docentes de matemáticas*. Repositorio institucional Universidad de Santo Tomás, Colombia. <https://repository.usta.edu.co/handle/11634/28141>
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio Matemáticas*. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>
- Molina-Mora, J. A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia*, 31(2), 19-36. <https://doi.org/10.15359/ru.31-2.2>
- Mora, Á. y Ortiz, J. (2012). Formación de profesores de matemáticas y la modelización en ambientes tecnológicos. *Revista Ciencias de la Educación*, 22(39), 183-206. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n39/art09.pdf>
- Moreno, A., Marín, M. y Ramírez-Uclés, R. (2021). Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA* 15(2), 109-136. <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/pna.v15i2.20746/20305>
- Passarella, S. (2021). Mathematics Teachers' Inclusion of Modelling and Problem Posing in Their Mathematics Lessons: An Exploratory Questionnaire. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 43-56. <https://doi.org/10.30935/scimath/10773>
- Pochulu, M. (2018). *La modelización en Matemática: marco de referencia y aplicaciones*. Universidad Nacional Villa María-GIDED.
- Ríos, S. (1995). *Modelización*. Alianza Editorial.
- Rodríguez, M. (2010). El perfil del docente de matemática: visión desde la triada matemática-cotidianidad y pedagogía integral. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 10, 1-19. <http://www.latindex.ucr.ac.cr/aie-2010-03/actuainv-10-3-2000-17.pdf>
- Rosa, M., Rodríguez, R., Mendible, A., Arrieta, J. y Villa-Ochoa, J. (2014). Algunas reflexiones acerca de la modelación y la formación matemática en el nivel superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1133-1141).

- Sánchez, R., Lantigua, Z., Rodríguez, M., Bannasar, M. y García, A. (2020). Modelización matemática y GeoGebra en la formación de profesionales de la educación. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 9(3), 89-105. <http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i3p089-105>
- Swetz, F. & Hartzler, J. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum. A resource guide of classroom exercises*. NCTM.
- Villa-Ochoa, J. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *TecnoLógicas*, (19),63-85. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=344234312004>
- Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espaço Plural*, XVIII (36),219-251. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=445955647011>
- Villarreal, M. (2019). Experiencias de modelización en la formación de futuros profesores de matemática1. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Año 14, 18, 219-234. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/2860>
- Villarreal, M. (2020). Actividades Experimentales con Tecnologías en Escenarios de Modelización Matemática. *Bolema*, 34 (67), 786-824. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/HYpsyDtHbLxpHGmKp8x53fw/?lang=es>
- Zaldívar, J., Quiroz, S. y Medina, G. (2018). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 8(15), 87-110. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2448-85502017000200087&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-85502017000200087&lng=es&tlng=es)