Resolución de sucesiones definidas por una Relación de Recurrencia Homogénea Lineal con Valores Propios de Multiplicidad Algebraica Mayor Estricta que Uno

Enrique Vílchez Quesada
Escuela de Matemática
Universidad Nacional

Resumen:

El presente trabajo consiste en la segunda parte de una aplicación de los valores y vectores propios de una matriz, para resolver una relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes. La aplicación abordada utiliza la teoría de matrices de Jordan, para generalizar el método de trabajo que se expuso en la primera parte de este artículo.

Palabras Claves: Sucesiones, relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes.

Introducción:

En la primera parte de este trabajo se desarrolló un método para resolver relaciones de recurrencia homogéneas lineales con coeficientes constantes, utilizando valores y vectores propios bajo ciertas condiciones particulares.

Una relación de recurrencia de este tipo es aquella de la forma:

$$S_{n+k} = \beta_{k-1}S_{n+(k-1)} + \beta_{k-2}S_{n+(k-2)} + \cdots + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n$$

siendo los β_j números reales fijos $\forall j,\ j \in I\!N \cup \{0\}$, $0 \leq j \leq k-1$, que junto con las k condiciones iniciales:

$$S_j = c_j, c_j \in I\!R, \forall j, j \in I\!N \cup \{0\}, 0 \leq j \leq k-1$$

determinan de manera única los elementos de una sucesión $(S_n)_{n \in I\!N}$.

Esta relación de recurrencia se puede expresar mediante un sistema de ecuaciones lineales como sigue a continuación:

$$\begin{cases} S_{n+k} = \beta_{k-1}S_{n+(k-1)} + \beta_{k-2}S_{n+(k-2)} + \cdots + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n \\ S_{n+(k-1)} = S_{n+(k-1)} \\ S_{n+(k-2)} = S_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

que matricialmente corresponde a:

$$X_{n+1} = \mathbf{A}X_n \qquad 1$$

siendo,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \cdots & \beta_1 & \beta_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ una matriz } k\times k \text{ con entradas reales y}$$

$$X_n=\begin{pmatrix}S_{n+(k-1)}\\ S_{n+(k-2)}\\ \vdots\\ S_n\end{pmatrix} \text{ un vector en } \mathbb{R}^k.$$

A partir de la ecuación (1) es posible inferir[2] que:

$$X_n=A^nX_0\ \forall n,n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \qquad 2$$

de donde si se determina la potencia $n-$ésima de A, la relación de recurrencia queda resuelta al igualar la fila $k-$ésima de ambas matrices $k\times 1$ en la expresión anterior.

En la primera parte del artículo, se abordó un método de trabajo basado en suponer que la matriz A era diagonalizable, esto con la finalidad de poder calcular $A^n\ \forall n,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ de forma directa. Efectivamente se logró demostrar que A es diagonalizable sí y solo sí todos sus valores propios son de multiplicidad algebraica igual a uno y bajo este supuesto se ideó un algoritmo que condujo a una relación general para resolver una relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes de orden k.

Aunque los resultados que se obtuvieron fueron bastante generales, me pareció necesario completar este trabajo, tratando el caso en el que la matriz A tuviera valores propios con multiplicidad algebraica mayor estricta que uno, desde este punto de vista, concentré mis esfuerzos para dejar el problema completamente resuelto y encontré en la teoría de matrices de Jordan el fundamento teórico necesario con la finalidad de lograr dicho objetivo.

Fundamento Teórico

La diagonalización de matrices, proporciona un recurso muy eficiente para expresar a una matriz de una forma relativamente sencilla mediante una transformación de semejanza, sin embargo, como usted ya lo ha podido comprobar, constantemente en la práctica surgen matrices no diagonalizables, en donde, se hace indispensable utilizar otros medios para determinar una semejanza que permita reducirla.

Es en este sentido, donde la teoría de matrices de Jordan[3] proporciona el fundamento teórico necesario para encontrar una nueva matriz J no diagonal, pero especialmente sencilla, semejante a la matriz original.

En esta sección se estudiarán las principales definiciones y teoremas de esta teoría, además de algunos resultados propios, que servirán como soporte teórico para introducir el método generalizado que deseo exponerle.

Definición 1 *Sea $k\in\mathbb{N}$, la matriz denotada por $N_k=(n_{ij})\in M_k(\mathbb{R})$ se define por:*

$$n_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } j=i+1\\ 0 \text{ si } j\neq i+1\end{cases}$$

es decir:

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Para un escalar dado λ se def ine la matriz de bloques de Jordan denotada $B(\lambda)$ por:

$$B(\lambda) = \lambda I_k + N_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

de tal manera que $B(\lambda)$ es una matriz $k \times k$ con el escalar λ en la diagonal principal, unos en la primera diagonal por encima de ella y ceros en las demás entradas.

Por ejemplo las siguientes matrices son bloques de Jordan:

$$\underset{\lambda=2}{(2)_{1\times1}} \qquad \underset{\lambda=3}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times2}} \qquad \underset{\lambda=-1}{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times3}} \qquad \underset{\lambda=\sqrt{2}}{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}_{4\times4}}$$

Definición 2 *Una matriz de Jordan J es aquella de la forma:*

$$J = \begin{pmatrix} B_1(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_m(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

donde cada $B_j(\lambda_j)$ es una matriz de bloques de Jordan.

Por ejemplo las siguientes matrices son matrices de Jordan:

$$\underset{\text{Formada por dos bloques}}{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{Formada por tres bloques}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{Formada por cuatro bloques}}{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

Teorema 1 *Toda matriz cuadrada A es semejante a una matriz triangular superior T de la forma:*

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_k \end{pmatrix}$$

donde cada matriz T_j $\forall j \in I\!N, 1 \leq j \leq k$ es una matriz triangular superior con elementos λ_j en la diagonal principal, el orden de T_j es la multiplicidad algebraica de λ_j como valor propio de A y k es el número de valores propios diferentes.

Teorema 2 *Toda matriz triangular superior T con los elementos de su diagonal principal iguales a λ es semejante a una matriz de Jordan de la forma:*

$$\begin{pmatrix} B_1(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3(\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_m(\lambda) \end{pmatrix}$$

Para efectos de este trabajo, los teoremas 1 y 2 se enuncian sin una demostración formal, sin embargo, si el lector está interesado le recomiendo consultar el libro "Applied Linear Algebra" por B. Noble, de la editorial Prentice-Hall.

Teorema 3 (Forma Canónica de Jordan) *Toda matriz cuadrada A es semejante a una matriz de Jordan J de la forma:*

$$J = \begin{pmatrix} B_1(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_m(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

donde cada λ_j $\forall j \in I\!N, 1 \leq j \leq m$ es un valor propio de A.

En el teorema 3 un valor propio λ_j $\forall j \in I\!N, 1 \leq j \leq m$ puede aparecer en más de un bloque de Jordan, pero el número de bloques de Jordan que contienen a λ_j es igual a la dimensión del subespacio propio asociado a λ_j.

proof

Por el teorema 1 la matriz A es semejante a una matriz triangular superior T de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_k \end{pmatrix}$$

donde cada T_j es una matriz triangular superior con elementos λ_j en la diagonal principal, siendo λ_j un valor propio de A, es decir, existe una matriz invertible Q tal que:

$$T = Q \cdot A \cdot Q^{-1} \qquad *$$

A su vez por el teorema 2 T_j $\forall j \in I\!N, 1 \leq j \leq k$ es semejante a una matriz de Jordan de la forma:

$$J_j = \begin{pmatrix} B_1(\lambda_j) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3(\lambda_j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{m_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}$$

en cuyo caso, por definición de semejanza, existe una matriz R_j invertible tal que:

$$J_j = R_j \cdot T_j \cdot R_j^{-1} \qquad **$$

Definamos una matriz R de la siguiente manera:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_k \end{pmatrix}$$

es notable que:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_k^{-1} \end{pmatrix}$$

y en consecuencia:

$$\begin{aligned}
& R \cdot \left(Q \cdot A \cdot Q^{-1}\right) \cdot R^{-1} \\
& = R \cdot T \cdot R^{-1} \text{ por } (*) \\
& = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_k^{-1} \end{pmatrix} \\
& = \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 \cdot T_1 \cdot R_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 \cdot T_2 \cdot R_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_k \cdot T_k \cdot R_k^{-1} \end{pmatrix}}_{\text{Por una propiedad de la multiplicación de matrices por bloques}} \\
& = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix} = J \text{ por } (**)
\end{aligned}$$

La cual constituye una matriz de Jordan, donde si se considera a $P = R \cdot Q$ se tiene que:

$$\begin{aligned} & P \cdot A \cdot P^{-1} = J \\ & \Rightarrow A \sim J \end{aligned}$$

Definición 3 *A la matriz J del teorema 3, se le llama forma canónica de Jordan de la matriz A.*

El teorema 3 nos garantiza con certeza que para cualquier matriz cuadrada A es posible encontrar su forma canónica de Jordan, sin embargo, ¿cuál es el procedimiento que se aplica para ello?, a continuación se utilizará un ejemplo particular para explicar la forma en como se obtiene la matriz de transformación de semejanza P.

example

Encuentre una matriz en la forma canónica de Jordan que sea semejante a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y determine la matriz de transformación de semejanza P.

Solución:

En primera instancia la ecuación característica de A corresponde a:

$$\begin{array}{l}\lambda(\lambda-2)^3=0\\ \Rightarrow \lambda=2 \vee \lambda=0\end{array}$$

en cuyo caso los valores propios de A, son $\lambda_1=2$ de multiplicidad algebraica tres y $\lambda_2=0$ de multiplicidad algebraica uno. Los subespacios propios asociados a estos eigenvalores vienen dados por:

$$E_{\lambda_1}=Gen\left(\{(1,0,1,0)\}\right) \text{ y } E_{\lambda_2}=Gen\left(\{(0,1,0,-1)\}\right)$$

De acuerdo a las multiplicidades algebraicas de los valores propios, se puede intuir la forma canónica de Jordan de A, como la matriz:

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz P, supongamos que $P^{-1}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ con X_j un vector columna de orden cuatro $\forall j,\ j=1,2,3,4$, luego por def inición de la forma canónica de Jordan tenemos que:

$$P\cdot A\cdot P^{-1}=J$$

$$\Rightarrow A\cdot P^{-1}=P^{-1}\cdot J$$

$$\Rightarrow A\cdot(X_1,X_2,X_3,X_4)=(X_1,X_2,X_3,X_4)\cdot J$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A\cdot X_1, A\cdot X_2, A\cdot X_3, A\cdot X_4)}_{\text{Por propiedad del producto de matrices}}=(X_1,X_2,X_3,X_4)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A\cdot X_1, A\cdot X_2, A\cdot X_3, A\cdot X_4)=(\lambda_1X_1, X_1+\lambda_1X_2, X_2+\lambda_1X_3, \lambda_2X_4)$$

$$\Rightarrow (A\cdot X_1-\lambda_1X_1, A\cdot X_2-X_1-\lambda_1X_2, A\cdot X_3-X_2-\lambda_1X_3, A\cdot X_4-\lambda_2X_4)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(A-\lambda_1I_4)\,X_1=0\\ (A-\lambda_1I_4)\,X_2=X_1\\ (A-\lambda_1I_4)\,X_3=X_2\\ (A-\lambda_2I_4)\,X_4=0\end{cases}$$

Los sistemas de ecuaciones lineales primero y último ya fueron resueltos y una solución de dichos sistemas corresponden a los vectores propios $X_1=(1,0,1,0)$ y $X_4=(0,1,0,-1)$ respectivamente. El segundo sistema de ecuaciones es de la forma:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

y una solución viene dada por $X_2=\left(0,\frac{3}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$. F inalmente el tercer sistema de ecuaciones lineales es de la forma:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{2}\\ 0\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

donde $X_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es una solución. En conclusión:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

En términos generales dada una matriz $A \in M_k(\mathbb{R})$ con valores propios distintos dos a dos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de multiplicidad algebraica $r_1, r_2, \ldots, r_m$ respectivamente, si suponemos que los subespacios propios E_{λ_j} $\forall j, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m$ son de dimensión uno, y siendo X_1^j un vector propio asociado a λ_j $\forall j, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m$, el método expuesto en el ejemplo anterior se basa en formar y resolver los si-guientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (A - \lambda_j I_k) X_2^j = X_1^j \\ (A - \lambda_j I_k) X_3^j = X_2^j \\ \vdots \\ (A - \lambda_j I_k) X_{r_j}^j = X_{r_j - 1}^j \end{cases} \quad \text{con } r_j \neq 1 \qquad 3$$

A cada uno de los vectores $X_2^j, X_3^j, \ldots, X_{r_j}^j$ se les llama vectores propios gene-ralizados o generalísimos de A, asociados al valor propio λ_j.

Hallando estos vectores propios generalísimos $\forall j, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m$, finalmente la matriz P^{-1} viene dada por:

$$\begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & \cdots & X_{r_1}^1 & X_1^2 & X_2^2 & \cdots & X_{r_2}^2 & \cdots & X_1^m & X_2^m & \cdots & X_{r_m}^m \end{pmatrix}$$

Observe que por cada vector propio X_1^j se forman r_j columnas en P^{-1}, si $r_j = 1$ entonces el único vector que se requiere para completar las r_j columnas correspondientes en esta matriz, es el vector propio X_1^j y en este caso por tanto, no se debe hallar ningún vector propio generalizado. Además, si algún subespacio propio E_{λ_j} es de dimensión $t_j \in \mathbb{N}$, $t_j \neq 1$ existen t_j vectores propios asociados a λ_j linealmente independientes y en consecuencia se requerirían $r_j - t_j$ vectores propios generalizados, para formar las r_j columnas correspondientes en P^{-1}.

Centremos ahora nuestra atención, en cómo hallar la potencia $n-$ésima de una matriz de Jordan. Dada una matriz de Jordan de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} B_1(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_m(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

es notable su estructura diagonal, en consecuencia por un resultado demostrado en la primera parte de este artículo, se puede inferir que:

$$J^n = \begin{pmatrix} (B_1(\lambda_1))^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (B_2(\lambda_2))^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (B_3(\lambda_3))^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (B_m(\lambda_m))^n \end{pmatrix} \forall n, n \in \mathbb{N} \qquad 4$$

es decir, la potencia $n-$ésima de una matriz de Jordan se puede calcular al obtener las potencias $n-$ésimas de los bloques que la constituyen, sin embargo, ¿cómo se calculan dichas potencias?, para dar respuesta a esta pregunta se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 4 (Potencia $n-$ésima de un bloque de Jordan) *Sea $B = (b_{ij}) \in M_r(\mathbb{R})$ un bloque de Jordan de la forma:*

$$b_{ij} = \begin{cases} \lambda \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } j = i + 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

es decir:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces $B^n = (c_{ij}) \in M_r(I\!R)\ \forall n, n \in I\!N$ *es tal que:*

$$c'_{ij} = \begin{cases} \lambda^n \text{ si } i = j \\ \frac{n!}{(n-l)!l!}\lambda^{n-l} \text{ si } j = i + l \text{ con } l = 1, 2, \ldots, r-1 \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases}$$

es decir:

$$B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda^{n-1} & \frac{n!}{(n-2)!2!}\lambda^{n-2} & \cdots & \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}\lambda^{n-r+1} \\ 0 & \lambda^n & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda^{n-1} & \cdots & \frac{n!}{(n-r+2)!(r-2)!}\lambda^{n-r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Prueba:
Procedamos por el primer principio de inducción.

Para $n = 1$, $B = (\lambda) \Rightarrow B^n = (\lambda^n)$ con lo cual queda probado el teorema en este caso.

Supongamos por hipótesis de inducción que para algún $k, k \in I\!N$, $B^k = (c'_{ij})$ es tal que:

$$c'_{ij} = \begin{cases} \lambda^k \text{ si } i = j \\ \frac{k!}{(k-l)!l!}\lambda^{k-l} \text{ si } j = i + l \text{ con } l = 1, 2, \ldots, r-1 \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases}$$

Probemos el teorema para $k+1$. Sea $B^{k+1} = (c_{ij}) \in M_r(I\!R)$:

$B^{k+1} = B^k \cdot B$ por definición de potencia de matrices

$\Rightarrow c_{ij} = \sum_{h=1}^{r} c'_{ih} b_{hj}$ por definición del producto de matrices

Consideremos los siguientes casos:

$a)\ i = j$

$c_{ii} = \sum_{h=1}^{r} c'_{ih} b_{hi} = c'_{i1} b_{1i} + c'_{i2} b_{2i} + \ldots + c'_{ii-1} b_{i-1i} + c'_{ii} b_{ii} + c'_{ii+1} b_{i+1i} + \ldots + c'_{ir} b_{ri}$

$= 0 + 0 + \ldots + 0 + \lambda \cdot \lambda^k + 0 + \ldots + 0 = \lambda^{k+1}$ por definición de B y la hipótesis inductiva

$b)\ j = i + l$ con $l = 1, 2, \ldots, r-1$

$c_{ii+l} = \sum_{h=1}^{r} c'_{ih} b_{hi+l} = c'_{i1} b_{1i+l} + c'_{i2} b_{2i+l} + \ldots + c'_{ii+l-1} b_{i+l-1i+l} + c'_{ii+l} b_{i+li+l} + c'_{ii+l+1} b_{i+l+1i+l} + \ldots + c'_{ir} b_{ri+l}$

$= 0 + 0 + \ldots + \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!}\lambda^{k+1-l} \cdot 1 + \lambda \cdot \frac{k!}{(k-l)!l!}\lambda^{k-l} + 0 + \ldots + 0$ por definición de B y la hipótesis inductiva

$= \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!}\lambda^{k+1-l}\left[1+\frac{k+1-l}{l}\right] = \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!}\lambda^{k+1-l}\left[\frac{l+k+1-l}{l}\right]$

$= \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!}\lambda^{k+1-l}\left[\frac{k+1}{l}\right] = \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!l!}\lambda^{k+1-l}$

$c)\ i > j$

$c_{ij} = \sum_{h=1}^{r} c'_{ih}b_{hj} = c'_{i1}b_{1j} + c'_{i2}b_{2j} + \ldots + c'_{ij-1}b_{j-1j} + c'_{ij}b_{jj} + c'_{ij+1}b_{j+1j} + \ldots + c'_{ir}b_{rj}$

$= 0+0+\ldots+0\cdot 1+0\cdot\lambda+0+\ldots+0 = 0$ por definición de B y la hipótesis inductiva

$\therefore c_{ij} = \begin{cases} \lambda^{k+1} \text{ si } i=j \\ \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!l!}\lambda^{k+1-l} \text{ si } j=i+l \text{ con } l=1,2,\ldots,r-1 \\ 0 \text{ si } i>j \end{cases}$

Todos los resultados expuestos con anterioridad, nos permiten crear un modelo general, a partir del cual es posible resolver relaciones de recurrencia homogéneas lineales de cualquier orden, cuando los valores propios tienen multiplicidad algebraica mayor estricta que uno. En la siguiente sección se abordará este problema para relaciones de recurrencia de orden dos y tres y finalmente se expone el método generalizado para relaciones de orden k.

Tratamiento del Problema:

Subsecciones

Sucesiones definidas por una relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes de orden dos:

Subsecciones:

Resolución de la Relación de Recurrencia

Dada la sucesión:

$$S_{n+2} = \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = c_0$ y $S_1 = c_1$, el polinomio característico definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ corresponde a:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \beta_1 \lambda - \beta_0$$

Supongamos que de la ecuación característica se obtienen dos raíces iguales a λ_1. Bajo este supuesto la matriz A no es diagonalizable y en consecuencia debemos encontrar la matriz de transformación de semejanza P, correspondiente en la forma canónica de Jordan, con la finalidad de calcular la potencia $n-$ésima de A.

Por un resultado de la primera parte de este artículo [8] sabemos que:

$$E_{\lambda_1} = Gen(\{(\lambda_1, 1)\})$$

por ende la primera columna de la matriz P^{-1}, está formada por el vector $(\lambda_1, 1)$. La segunda columna de P^{-1} se obtiene al hallar un vector propio generalísimo asociado a λ_1, para ello resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{l} (A - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta_1 - \lambda_1 & \beta_0 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} (\beta_1 - \lambda_1)x + \beta_0 y = \lambda_1 \\ x - \lambda_1 y = 1 \end{cases} \end{array}$$

dado que el determinante principal $\triangle = \begin{vmatrix} (\beta_1 - \lambda_1) & \beta_0 \\ 1 & -\lambda_1 \end{vmatrix} = 0$ por ser λ_1 raíz del polinomio característico, el sistema tiene infinidad de soluciones, que quedan determinadas al resolver cualquiera de ambas ecuaciones, al tomar la segunda de ellas se obtiene que:

$$x = 1 + \lambda_1 y$$

Si $y = 0$ se concluye que el vector $(1, 0)$ es un vector generalísimo asociado a λ_1 y en consecuencia:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{array}{l} A = P^{-1} \cdot J \cdot P \text{ con } J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A^n = P^{-1} \cdot J^n \cdot P \\ \Rightarrow A^n = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} \\ 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} \cdot P \text{ por el teorema 4 con } r = 2 \\ \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n (n+1) & -n\lambda_1^{n+1} \\ n\lambda_1^{n-1} & -(n-1)\lambda_1^n \end{pmatrix} \end{array}$$

y finalmente:

$$\begin{pmatrix} S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \text{ por } (2)$$

$$\Rightarrow S_n = c_0\lambda_1^n + (c_1 - c_0\lambda_1)\, n\lambda_1^{n-1} \ \forall n, n \in I\!N \cup \{0\} \qquad 5$$

Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1

Definamos la sucesión recursiva $S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n$ sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = 1, S_1 = 3$, formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y las condiciones iniciales están dadas por $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

cuya única raíz es $\lambda_1 = 1$. Por (5) tenemos que S_n corresponde a:

$$S_n = (1)^n + (3-1)\, n\, (1)^{n-1} = 1 + 2n \ \forall n, n \in I\!N \cup \{0\}$$

Ejemplo 2

Definamos la sucesión recursiva $S_{n+2} = -4S_{n+1} - 4S_n$ sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = -1, S_1 = -3$, formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+2} = -4S_{n+1} - 4S_n \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y las condiciones iniciales están dadas por $X_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

cuya única raíz es $\lambda_1 = -2$. Por (5) tenemos que S_n corresponde a:

$$S_n = -1 \cdot (-2)^n + (-3 + (-2))\, n\, (-2)^{n-1} = (-2)^n \left(\frac{5n}{2} - 1 \right) \ \forall n, n \in I\!N \cup \{0\}$$

Sucesiones Definidas por una Relación de Recurrencia Homogénea Lineal con Coef icientes Constantes de Orden Tres:

Subsecciones

- Resolución de la Relación de Recurrencia
- Ejemplos de Aplicación

Resolución de la Relación de Recurrencia

Dada la sucesión:

$$S_{n+3} = \beta_2 S_{n+2} + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = c_0$, $S_1 = c_1$ y $S_2 = c_2$, el polinomio característico def inido por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

corresponde a:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \beta_2 \lambda^2 - \beta_1 \lambda - \beta_0$$

La ecuación característica tiene dos posibilidades, en un primer caso que posea dos raíces distintas; una de mulplicidad algebraica dos y otra de multiplicidad uno, en un segundo caso que posea una única raíz de multiplicidad algebraica tres, abordemos a continuación el estudio de ambos.

caso

λ_1 de multiplicidad algebraica dos y λ_2 de multiplicidad algebraica uno

Sabemos que los subespacios propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente, vienen dados por:

$$E_{\lambda_1} = Gen\left(\left\{\left(\lambda_1^2, \lambda_1, 1\right)\right\}\right) \text{ y } E_{\lambda_1} = Gen\left(\left\{\left(\lambda_2^2, \lambda_2, 1\right)\right\}\right)$$

por ende la primera columna de P^{-1} está formada por el vector $(\lambda_1^2, \lambda_1, 1)$, la segunda por un vector generalísimo asociado a λ_1 y la tercera por el vector $(\lambda_2^2, \lambda_2, 1)$. Calculemos el vector generalísimo, para ello resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{l}
(A-\lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_2-\lambda_1 & \beta_1 & \beta_0 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\beta_2-\lambda_1)x+\beta_1 y+\beta_0 z=\lambda_1^2 \\ x-\lambda_1 y=\lambda_1 \\ y-\lambda_1 z=1 \end{array} \right.
\end{array}$$

dado que el determinante principal $\triangle = \begin{vmatrix} \beta_2-\lambda_1 & \beta_1 & \beta_0 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \end{vmatrix} = 0$ por ser λ_1 raíz del polinomio característico, el sistema tiene infinidad de soluciones donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} x=\lambda_1+\lambda_1 y \\ y=1+\lambda_1 z \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2\lambda_1+\lambda_1^2 z \\ y=1+\lambda_1 z \end{array} \right.$$

Si $z=0$ se concluye que el vector $(2\lambda_1,1,0)$ es un vector generalísimo asociado a λ_1 y en consecuencia:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{2\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{\lambda_2(\lambda_2-2\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\ \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & -\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \\ \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{-2\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{array}{l}
A=P^{-1}\cdot J\cdot P \text{ con } J=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow A^n=P^{-1}\cdot J^n\cdot P \\
\Rightarrow A^n=P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\cdot P \text{ por (4) y el teorema 4 con } r=2
\end{array}$$

Consideremos unicamente la última fila de este producto, entonces:

$$A^n=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{n\lambda_1^{n-1}\lambda_2-\lambda_1^n n+\lambda_1^n-\lambda_2^n}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{n\lambda_1^{n-1}\lambda_2^2-2\lambda_2^n\lambda_1+2\lambda_1^{n+1}-n\lambda_1^{n+1}}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & -\frac{n\lambda_1^n\lambda_2^2-\lambda_2^2\lambda_1^n+2\lambda_1^{n+1}\lambda_2-n\lambda_2\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^n\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \end{pmatrix}$$

y finalmente:

$$\begin{pmatrix} S_{n+2} \\ S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix} = A^n\cdot\begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \text{ por (2)}$$

$$\Rightarrow S_n = -\lambda_1^n \frac{c_2 - 2c_1\lambda_1 + c_0\lambda_2(2\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} + n\lambda_1^{n-1}\frac{c_2 - c_1(\lambda_1 + \lambda_2) + c_0\lambda_2\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_2^n \frac{c_2 - 2c_1\lambda_1 + c_0\lambda_1^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \qquad 6a$$

caso

λ_1 de multiplicidad algebraica tres

Para este caso es necesario encontrar dos vectores propios generalísimos asociados a λ_1 a partir del vector propio $X_1 = (\lambda_1^2, \lambda_1, 1)$, uno de estos vectores ya fue encontrado al abordar el caso 1, éste corresponde a $X_2 = (2\lambda_1, 1, 0)$, hallemos un segundo vector propio generalísimo $X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, luego:

$$(A - \lambda_1 I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (\beta_2 - \lambda_1)x + \beta_1 y + \beta_0 z = 2\lambda_1 \\ x - \lambda_1 y = 1 \\ y - \lambda_1 z = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 z \\ x = 1 + \lambda_1 y = 1 + \lambda_1^2 z \end{cases}$$

Si $z = 0$ se concluye que el vector $X_3 = (1, 0, 0)$ y en consecuencia:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & -2\lambda_1 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A = P^{-1} \cdot J \cdot P \text{ con } J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A^n = P^{-1} \cdot J^n \cdot P$$
$$\Rightarrow A^n = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda_1^{n-2} \\ 0 & \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} \cdot P \text{ por el teorema 4 con } r = 3$$

Consideremos unicamente la última fila de este producto, entonces:

$$A^n = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n-1)}{2}\lambda_1^{n-2} & 2n\lambda_1^{n-1} - n^2\lambda_1^{n-1} & \lambda_1^n - \frac{3}{2}\lambda_1^n n + \frac{1}{2}\lambda_1^n n^2 \end{pmatrix}$$

donde finalmente:

$$\begin{pmatrix} S_{n+2} \\ S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \text{ por (2)}$$

$$\Rightarrow S_n = c_0\lambda_1^n - \frac{n\lambda_1^{n-2}}{2}(c_2 - 4c_1\lambda_1 + 3c_0\lambda_1^2) + \frac{n^2\lambda_1^{n-2}}{2}(c_2 - 2c_1\lambda_1 + c_0\lambda_1^2) \qquad 6b$$

Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1

Def inamos la sucesión recursiva $S_{n+3} = 5S_{n+2} - 3S_{n+1} - 9S_n$ sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = -1$, formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+3} = 5S_{n+2} - 3S_{n+1} - 9S_n \\ S_{n+2} = S_{n+2} \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y las condiciones iniciales están dadas por $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$ de multiplicidad algebraica dos y $\lambda_2 = -1$ de multiplicidad algebraica uno. Por $(6a)$ tenemos que S_n corresponde a:

$$S_n = \frac{3^n}{2} - n3^{n-1} + \frac{1}{2}(-1)^n \ \forall n, n \in I\!N \cup \{0\}$$

Ejemplo 2

Def inamos la sucesión recursiva $S_{n+3} = 9S_{n+2} - 27S_{n+1} + 27S_n$ sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = 1, S_1 = -1, S_2 = 2$, formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+3} = 9S_{n+2} - 27S_{n+1} + 27S_n \\ S_{n+2} = S_{n+2} \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 9 & -27 & 27 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y las condiciones iniciales están dadas por $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27$$

cuya única raíz es $\lambda_1 = 3$. Por $(6b)$ tenemos que S_n corresponde a:

$$S_n = 3^n - \frac{41}{2}n3^{n-2} + \frac{17}{2}n^2 3^{n-2} \ \forall n, n \in I\!N \cup \{0\}$$

Sucesiones Definidas por una Relación de Recurrencia Homogénea Lineal con Coeficientes Constantes de

Orden k

Subsecciones

Resolución de la Relación de Recurrencia

Dada la sucesión:

$$S_{n+k} = \beta_{k-1}S_{n+(k-1)} + \beta_{k-2}S_{n+(k-2)} + \cdots + \beta_1 S_{n+1} + \beta_0 S_n$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = c_0$, $S_1 = c_1, \ldots, S_{k-1} = c_{k-1}$, el polinomio definido por la matriz de orden $k \times k$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \cdots & \beta_1 & \beta_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

está dado por[4]:

$$P(\lambda) = \lambda^k - \beta_{k-1}\lambda^{k-1} - \beta_{k-2}\lambda^{k-2} - \ldots - \beta_1\lambda - \beta_0$$

Supongamos que la ecuación característica tiene m soluciones distintas dos a dos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ con multiplicidades algebraicas $r_1, r_2, \ldots, r_m$ respectivamente. Bajo estas condiciones sabemos que:

$$A^n = P^{-1} \cdot J^n \cdot P \quad \forall n, n \in I\!N \cup \{0\}$$

con:

$$J^n = \begin{pmatrix} (B_1(\lambda_1))^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (B_2(\lambda_2))^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (B_3(\lambda_3))^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (B_m(\lambda_m))^n \end{pmatrix} \text{ por } (4)$$

donde cada $B_j(\lambda_j)$ es un bloque de Jordan de orden r_j y P es la matriz de transformación de semejanza de la forma canónica de Jordan de A. Además por el teorema 4 tenemos que:

$$B_j^n(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j^n & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda_j^{n-1} & \frac{n!}{(n-2)!2!}\lambda_j^{n-2} & \cdots & \frac{n!}{(n-r_j+1)!(r_j-1)!}\lambda_j^{n-r_j+1} \\ 0 & \lambda_j^n & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda_j^{n-1} & \cdots & \frac{n!}{(n-r_j+2)!(r_j-2)!}\lambda_j^{n-r_j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda_j^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j^n \end{pmatrix}$$

Por otra parte, para determinar las columnas de la matriz P^{-1}, hemos observado en los casos particulares dos por dos y tres por tres, que por cada valor propio λ_j de multiplicidad algebraica r_j se forman r_j columnas de P^{-1}, la primera de ellas corresponde al vector propio $(\lambda_j^{k-1}, \lambda_j^{k-2}, \ldots, \lambda_j, 1)$ asociado a λ_j y las otras $r_j - 1$ columnas están constituidas por $r_j - 1$ vectores propios generalísimos asociados a λ_j.

El número máximo de vectores propios generalísimos que es necesario encontrar en este método, es igual a $k-1$ y lo anterior ocurre cuando de la ecuación característica se obtiene una única solución. Si a lo sumo se requieren $k-1$ vectores propios generalísimos, a continuación se explicará cómo es posible encontrar estos vectores.

En la sección 3.1 se probó, que para el caso dos por dos el vector propio generalísimo requerido es $(1,0)$. En la sección 3.2 se concluyó que los vectores propios generalísimos asociados a λ_j para el caso tres por tres son $(2\lambda_j, 1, 0)$ y $(1,0,0)$. Utilizando un método análogo al de las secciones 3.1 y 3.2 se puede inferir que para el caso cuatro por cuatro los vectores propios generalísimos asociados a λ_j son $(3\lambda_j^2, 2\lambda_j, 1, 0)$, $(3\lambda_j, 1, 0, 0)$ y $(1,0,0,0)$, para el caso cinco por cinco son $(4\lambda_j^3, 3\lambda_j^2, 2\lambda_j, 1, 0)$, $(6\lambda_j^2, 3\lambda_j, 1, 0, 0)$, $(4\lambda_j, 1, 0, 0, 0)$ y $(1,0,0,0,0)$ y para el caso seis por seis corresponden a $(5\lambda_j^4, 4\lambda_j^3, 3\lambda_j^2, 2\lambda_j, 1, 0)$, $(10\lambda_j^3, 6\lambda_j^2, 3\lambda_j, 1, 0, 0)$, $(10\lambda_j^2, 4\lambda_j, 1, 0, 0, 0)$, $(5\lambda_j, 1, 0, 0, 0, 0)$ y $(1,0,0,0,0,0)$.

Si formamos por cada grupo de vectores añadiendo el vector propio original, una matriz de coef icientes por f ila para cada potencia de λ_j, se obtiene lo siguiente:

$$H_2^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^1 1 & \lambda_j^0 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_3^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^2 1 & \lambda_j^1 1 & \lambda_j^0 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_4^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^3 1 & \lambda_j^2 1 & \lambda_j^1 1 & \lambda_j^0 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_5^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^4 1 & \lambda_j^3 1 & \lambda_j^2 1 & \lambda_j^1 1 & \lambda_j^0 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_6^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^5 1 & \lambda_j^4 1 & \lambda_j^3 1 & \lambda_j^2 1 & \lambda_j^1 1 & \lambda_j^0 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $H_i^j \in M_i(\mathbb{R})$ $\forall i, i \in \mathbb{N}, i \geq 2$, representa la matriz de coef icientes del vector propio original y los vectores propios generalísimos asociados a λ_j, para el caso i por i.

Lo interesante de cada una de estas matrices triangulares superiores, radica en sus i diagonales no nulas. Observe por ejemplo las diagonales no nulas de la matriz H_6^j, el triángulo numérico que estas forman viene dado por:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

que corresponde al triángulo de Pascal con $n=5$. Lo anterior signif ica que las diagonales de la matriz H_6^j están constituidas por coef icientes binomiales.

En términos más generales, es posible concluir por inducción f inita que:

$$H_i^j = \begin{pmatrix} \lambda_j^{k-1}\binom{k-1}{0} & \lambda_j^{k-2}\binom{k-2}{0} & \lambda_j^{k-3}\binom{k-3}{0} & \cdots & \lambda_j^{1}\binom{1}{0} & \lambda_j^{0}\binom{0}{0} \\ 0 & \binom{k-1}{1} & \binom{k-2}{1} & \cdots & \binom{2}{1} & \binom{1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{k-1}{2} & \cdots & \binom{3}{2} & \binom{2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{k-1}{k-2} & \binom{k-2}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{k-1}{k-1} \end{pmatrix} \qquad 7$$

La matriz H_i^j del vector propio original y los vectores propios generalísimos asociados a λ_j, nos permite completar las r_j columnas de P^{-1} por cada λ_j con $j=1,2,\ldots,m$. Finalmente al hallar todas las columnas de P^{-1}, por (2) tenemos que:

$$\begin{pmatrix} S_{n+k-1} \\ S_{n+k-2} \\ \vdots \\ S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix} = P^{-1}\cdot J^n \cdot P \cdot \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

y S_n correspondería a la última fila que se obtiene por el producto de las matrices del lado derecho en la igualdad anterior.

Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1

Definamos la sucesión recursiva $S_{n+4}=4S_{n+3}-6S_{n+2}+4S_{n+1}-S_n$ sujeta a las condiciones iniciales $S_0=-3, S_1=1, S_2=-1,\ S_3=4$, formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+4}=4S_{n+3}-6S_{n+2}+4S_{n+1}-S_n \\ S_{n+3}=S_{n+3} \\ S_{n+2}=S_{n+2} \\ S_{n+1}=S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y las condiciones iniciales están dadas por $X_0=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-4\lambda+1$$

cuya única raíz es $\lambda_1 = 1$. Para este problema la forma canónica de Jordan J de A corresponde a la matriz:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^n = \begin{pmatrix} 1^n & n1^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}1^{n-2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6}1^{n-3} \\ 0 & 1^n & n1^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}1^{n-2} \\ 0 & 0 & 1^n & n1^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \text{ por el teorema 4 con } r = 4$$

Por otra parte:

$$H_4^1 = \begin{pmatrix} 1^3 1 & 1^2 1 & 1^1 1 & 1^0 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ por (7) con } i = 4$$

y en consecuencia:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} S_{n+3} \\ S_{n+2} \\ S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot J^n \cdot P \cdot X_0$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{13}{6}n^3 - \frac{19}{2}n^2 + \frac{34}{3}n - 3 \ \forall n, n \in I\!N \cup \{0\}$$

Ejemplo 2

Def inamos la sucesión recursiva $S_{n+4} = -2S_{n+3} + 11S_{n+2} + 12S_{n+1} - 36S_n$ sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = 1, S_1 = -1, S_2 = -2,\ S_3 = 3$, formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+4} = -2S_{n+3} + 11S_{n+2} + 12S_{n+1} - 36S_n \\ S_{n+3} = S_{n+3} \\ S_{n+2} = S_{n+2} \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 12 & -36 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y las condiciones iniciales están dadas por

$X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 11\lambda^2 - 12\lambda + 36$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ de multiplicidad algebraica dos y $\lambda_2 = -3$ de multiplicidad algebraica también igual a dos. Para este problema la forma canónica de Jordan J de A corresponde a la matriz:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n & n(-3)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{por (4) y el teorema 4} \\ \text{con } r = 2 \end{matrix}$$

Por otra parte:

$$H_4^1 = \begin{pmatrix} 2^3 1 & 2^2 1 & 2^1 1 & 2^0 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } H_4^2 = \begin{pmatrix} (-3)^3 1 & (-3)^2 1 & (-3)^1 1 & (-3)^0 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ por (7)}$$

Como las multiplicidades algebraicas de ambos valores propios son iguales a dos, se requieren unicamente las dos primeras filas de las matrices H_4^1 y H_4^2 para formar las columnas de P^{-1}, luego:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^3 & 3 \cdot 2^2 & (-3)^3 & 3 \cdot (-3)^2 \\ 2^2 & 2 \cdot 2 & (-3)^2 & 2 \cdot -3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -27 & 27 \\ 4 & 4 & 9 & -6 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{125} & -\frac{3}{125} & \frac{36}{125} & \frac{81}{125} \\ \frac{1}{25} & \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{18}{25} \\ \frac{2}{125} & \frac{3}{125} & -\frac{36}{125} & \frac{44}{125} \\ \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & -\frac{8}{25} & \frac{12}{25} \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} S_{n+3} \\ S_{n+2} \\ S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot J^n \cdot P \cdot X_0$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{9}{25}2^n - \frac{4}{5}n2^{n-1} + \frac{16}{25}(-3)^n + n(-3)^{n-1} \ \forall n, n \in I\!N \cup \{0\}$$

Ejemplo 3

Definamos la sucesión recursiva $S_{n+5} = -S_{n+4} + 38S_{n+3} - 18S_{n+2} - 405S_{n+1} + 675S_n$ sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = 1, S_1 = -4, S_2 = S_3 = 2,\ S_4 = 0$, formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+5} = -S_{n+4} + 38S_{n+3} - 18S_{n+2} - 405S_{n+1} + 675S_n \\ S_{n+4} = S_{n+4} \\ S_{n+3} = S_{n+3} \\ S_{n+2} = S_{n+2} \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -18 & -405 & 675 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y las condiciones iniciales están dadas por $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 38\lambda^3 + 18\lambda^2 + 405\lambda - 675$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$ de multiplicidad algebraica tres y $\lambda_2 = -5$ de multiplicidad algebraica dos. Para este problema la forma canónica de Jordan J de A corresponde a la matriz:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-5)^n & n(-5)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-5)^n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{por (4) y el teorema 4} \\ \text{con } r = 3 \text{ y } r = 2 \end{array}$$

Por otra parte:

$$H_5^1 = \begin{pmatrix} 3^4 1 & 3^3 1 & 3^2 1 & 3^1 1 & 3^0 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } H_5^2 = \begin{pmatrix} (-5)^4 1 & (-5)^3 1 & (-5)^2 1 & (-5)^1 1 & (-5)^0 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ por (7)}$$

Como la multiplicidad algebraica de $\lambda_1 = 3$ es tres se requieren las tres primeras filas de H_5^1 para completar las tres primeras columnas de P^{-1}, las dos restantes se obtienen al considerar las dos primeras filas de la matriz H_5^2, luego:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3^4 & 3^3 \cdot 4 & 6 \cdot 3^2 & (-5)^4 & 4 \cdot (-5)^3 \\ 3^3 & 3^2 \cdot 3 & 3 \cdot 3 & (-5)^3 & 3 \cdot (-5)^2 \\ 3^2 & 3 \cdot 2 & 1 & (-5)^2 & 2 \cdot (-5) \\ 3 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 108 & 54 & 625 & -500 \\ 27 & 27 & 9 & -125 & 75 \\ 9 & 6 & 1 & 25 & -10 \\ 3 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4096} & \frac{-1}{1024} & \frac{-63}{2048} & \frac{135}{1024} & \frac{3475}{4096} \\ \frac{-1}{256} & 0 & \frac{27}{128} & \frac{5}{32} & \frac{-525}{256} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{-13}{32} & \frac{-15}{16} & \frac{225}{64} \\ \frac{-3}{4096} & \frac{1}{1024} & \frac{63}{2048} & \frac{-135}{1024} & \frac{621}{4096} \\ \frac{-1}{512} & \frac{1}{128} & \frac{9}{256} & \frac{-27}{128} & \frac{135}{512} \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} S_{n+4} \\ S_{n+3} \\ S_{n+2} \\ S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot J^n \cdot P \cdot X_0$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1055}{4096}3^n - \frac{577}{256}n3^{n-1} + \frac{421}{128}n(n-1)3^{n-2} + \frac{3041}{4096}(-5)^n + \frac{611}{512}n(-5)^{n-1} \ \forall n, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Ejemplo 4

Def inamos la sucesión recursiva $S_{n+6} = -2S_{n+5} + S_{n+4} - 2S_{n+3} - 6S_{n+2} - 8S_n$ sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = 2, S_1 = -2, S_2 = S_3 = 1,\ S_4 = S_5 = 0$, formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+6} = -2S_{n+5} + S_{n+4} - 2S_{n+3} - 6S_{n+2} - 8S_n \\ S_{n+5} = S_{n+5} \\ S_{n+4} = S_{n+4} \\ S_{n+3} = S_{n+3} \\ S_{n+2} = S_{n+2} \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & -6 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y las condiciones iniciales están dadas por $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 8$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = -2$ de multiplicidad algebraica dos, $\lambda_2 = i, \lambda_3 = -i, \lambda_4 = 1+i$ y $\lambda_5 = 1-i$. Para este problema la forma canónica de Jordan J de A corresponde a la matriz:

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-i)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{por (4) y el teorema 4} \\ \text{con } r = 2 \end{array}$$

Por otra parte:

$$H_6^1 = \begin{pmatrix} (-2)^5 1 & (-2)^4 1 & (-2)^3 1 & (-2)^2 1 & (-2)^1 1 & (-2)^0 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{por } (7)$$

Como la multiplicidad algebraica de $\lambda_1 = -2$ es dos se requieren las dos primeras f ilas de H_6^1 para completar las dos primeras columnas de P^{-1}, las restantes se obtienen al considerar vectores propios asociados a los restantes valores propios, luego:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} (-2)^5 & 5\cdot(-2)^4 & i^5 & (-i)^5 & (1+i)^5 & (1-i)^5 \\ (-2)^4 & 4\cdot(-2)^3 & i^4 & (-i)^4 & (1+i)^4 & (1-i)^4 \\ (-2)^3 & 3\cdot(-2)^2 & i^3 & (-i)^3 & (1+i)^3 & (1-i)^3 \\ (-2)^2 & 2\cdot -2 & i^2 & (-i)^2 & (1+i)^2 & (1-i)^2 \\ -2 & 1 & i & -i & 1+i & 1-i \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -32 & 80 & i & -i & -4-4i & -4+4i \\ 16 & -32 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -8 & 12 & -i & i & -2+2i & -2-2i \\ 4 & -4 & -1 & -1 & 2i & -2i \\ -2 & 1 & i & -i & 1+i & 1-i \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{7}{250} & \frac{1}{50} & -\frac{17}{250} & \frac{43}{250} & -\frac{12}{125} & \frac{19}{125} \\ \frac{1}{50} & 0 & -\frac{1}{50} & \frac{2}{25} & -\frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{1}{125}-\frac{11}{250}i & \frac{3}{50}-\frac{2}{25}i & \frac{9}{125}+\frac{13}{125}i & -\frac{11}{125}-\frac{2}{125}i & \frac{8}{125}-\frac{44}{125}i & \frac{44}{125}+\frac{8}{125}i \\ \frac{1}{125}+\frac{11}{250}i & \frac{3}{50}+\frac{2}{25}i & \frac{9}{125}-\frac{13}{125}i & -\frac{11}{125}+\frac{2}{125}i & \frac{8}{125}+\frac{44}{125}i & \frac{44}{125}-\frac{8}{125}i \\ -\frac{11}{500}+\frac{1}{250}i & -\frac{7}{100}-\frac{1}{100}i & -\frac{19}{500}-\frac{21}{250}i & \frac{1}{500}-\frac{57}{500}i & -\frac{2}{125}-\frac{11}{125}i & \frac{9}{125}-\frac{13}{125}i \\ -\frac{11}{500}-\frac{1}{250}i & -\frac{7}{100}+\frac{1}{100}i & -\frac{19}{500}+\frac{21}{250}i & \frac{1}{500}+\frac{57}{500}i & -\frac{2}{125}+\frac{11}{125}i & \frac{9}{125}+\frac{13}{125}i \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} S_{n+4} \\ S_{n+3} \\ S_{n+2} \\ S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix} = P^{-1}\cdot J^n \cdot P \cdot X_0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} S_n = \frac{3}{5}2^n e^{in\pi} + \frac{7}{50}(1-i)^n + \frac{7}{50}(1+i)^n + \frac{14}{25}e^{\frac{1}{2}in\pi} + \frac{14}{25}e^{-\frac{1}{2}in\pi} - \frac{3}{20}n2^n e^{in\pi} + \\ \frac{23}{25}ie^{\frac{1}{2}in\pi} - \frac{23}{25}ie^{-\frac{1}{2}in\pi} - \frac{23}{100}i(1+i)^n + \frac{23}{100}i(1-i)^n \;\; \forall n, n \in I\!N \cup \{0\} \end{array}$$

Ejemplo 5

Def inamos la sucesión recursiva $S_{n+7} = -14S_{n+6} - 84S_{n+5} - 280S_{n+4} - 560S_{n+3} - 672S_{n+2} - 448S_{n+1} - 128S_n$ sujeta a las condiciones iniciales $S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = 1$, formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+7} = -14S_{n+6} - 84S_{n+5} - 280S_{n+4} - 560S_{n+3} - 672S_{n+2} - 448S_{n+1} - 128S_n \\ S_{n+6} = S_{n+6} \\ S_{n+5} = S_{n+5} \\ S_{n+4} = S_{n+4} \\ S_{n+3} = S_{n+3} \\ S_{n+2} = S_{n+2} \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es:

$$A=\begin{pmatrix} -14 & -84 & -280 & -560 & -672 & -448 & -128 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y las condiciones iniciales están dadas por:

$$X_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz A es:

$$P(\lambda)=\lambda^7+14\lambda^6+84\lambda^5+280\lambda^4+560\lambda^3+672\lambda^2+448\lambda+128$$

cuya única raíz es $\lambda_1=-2$. Para este problema la forma canónica de Jordan J de A corresponde a la matriz:

$$J=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^n=\begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & \frac{n(n-1)(-2)^{n-2}}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)(-2)^{n-3}}{6} & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(-2)^{n-4}}{24} & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(-2)^{n-5}}{120} & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(-2)^{n-6}}{720} \\ 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} & \frac{n(n-1)(-2)^{n-2}}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)(-2)^{n-3}}{6} & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(-2)^{n-4}}{24} & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(-2)^{n-5}}{120} \\ 0 & 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} & \frac{n(n-1)(-2)^{n-2}}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)(-2)^{n-3}}{6} & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(-2)^{n-4}}{24} \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} & \frac{n(n-1)(-2)^{n-2}}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)(-2)^{n-3}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} & \frac{n(n-1)(-2)^{n-2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$H_7^1 = \begin{pmatrix} (-2)^6 1 & (-2)^5 1 & (-2)^4 1 & (-2)^3 1 & (-2)^2 1 & (-2)^1 1 & (-2)^0 1 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 10 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ por } (7)$$

y en consecuencia:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 64 & -192 & 240 & -160 & 60 & -12 & 1 \\ -32 & 80 & -80 & 40 & -10 & 1 & 0 \\ 16 & -32 & 24 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 24 & 32 & 16 \\ 0 & 1 & 10 & 40 & 80 & 80 & 32 \\ 1 & 12 & 60 & 160 & 240 & 192 & 64 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} S_{n+6} \\ S_{n+5} \\ S_{n+4} \\ S_{n+3} \\ S_{n+2} \\ S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot J^n \cdot P \cdot X_0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} S_n = (-2)^n + \frac{9}{2} n (n-1)(n-2)(-2)^{n-3} + \frac{27}{8} n (n-1)(n-2)(n-3)(-2)^{n-4} + \\ \frac{81}{40} n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(-2)^{n-5} + \frac{81}{80} n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\ (n-5)(-2)^{n-6} + \frac{9}{2} n (n-1)(-2)^{n-2} + 3n(-2)^{n-1} \;\; \forall n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array}$$

Conclusiones

La aplicación matemática abordada en este artículo, ref leja el importante papel que desempeña el álgebra lineal en muchas áreas disciplinarias. En particular la teoría de valores y vectores propios, tiene aplicaciones fundamentales en ingeniería, física y matemática.

Con este trabajo me complace entregarle una aplicación más de este tipo, al haber generalizado un método para resolver relaciones de recurrencia homogéneas lineales con coef icientes constantes de orden k.

Los distintos resultados que obtuve en el desarrollo del artículo, inclusive permiten inferir un método de interpolación, que decidí reservar para una futura entrega.

Bibliografía:

1. Acher, J. (1967) *Álgebra Lineal y Programación Lineal.* Barcelona: Montaner y Simon S.A.

2. Apostol, T. (1985) *Calculus*. México: Reverté.

3. Beauregard, R. & Fraleigh, J. (1987) *Álgebra Lineal*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.

4. Calderón, S. & Morales, M. (2000) *Relaciones de Recurrencia*. Costa Rica: I.T.C.R.

5. Detlman, J. (1975) *Introducción al Álgebra Lineal y las Ecuaciones Diferenciales*. México: McGraw-Hill.

6. Golovina, L. (1974) *Álgebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones*. URSS: Mir.

7. Grossman, S. (1996) *Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill.

8. Hill, R. (1997) *Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones*. México: Prentice-Hall.

9. Hoffman, K. & Kunze, R. (1971) *Álgebra Lineal*. México: Prentice-Hall.

10. Johnsonbaugh, R. (1988) *Matemáticas Discretas*. México: Iberoamérica.

11. Noble, B. (1970) *Applied Linear Algebra*. USA: Prentice-Hall.

12. Lang, S. (1976) *Álgebra Lineal*. México: Fondo Educativo Interamericano.

13. León, S. (1993) *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. México: CECSA.

14. Tucker, A. (1993) *La Importancia Creciente del Álgebra Lineal en el Estudiante de Matemática.* *The College Mathematics Journal*.

15. Vílchez, E. & Monge, J. (2001) *Tesis: Aplicación e Interpretación de los Valores Propios en Matemática e Ingeniería*. Universidad Nacional.