Economía & SOCIEDAD

ISSN 1409-1070
Economía y Sociedad, N^{os} 39-40
Enero – Diciembre del 2011, pp.63-72
URL http://www.revistas.una.ac.cr/economia

PAGOS PARCIALES A INTERÉS SIMPLE: UNA NOTA FINANCIERA

Daniel Villalobos Céspedes[1]

Resumen

Este escrito pretende ser un aporte a las matemáticas financieras. En especial, plantea formular el concepto de *pagos parciales* simplificado mediante el uso del criterio de *suma de dígitos*. La fórmula propuesta permite estimar las distintas *variables incógnitas* entre las que componen el modelo aquí propuesto. La utilidad del modelo es tanto académica como práctica. Podría ser parte de un *software* que permita además, el cálculo de cancelación adelantada de un crédito de pago parcial a interés simple.

Palabras claves: pagos parciales; interés simple; suma de dígitos; matemática financiera; *software*.

Abstract

This paper aims to be a contribution to financial mathematics. In particular, it raises the concept of making *partial payments* simplified by using the criterion of *sum of digits*. The formula proposed allows estimating the *unknown variables* of the model. The usefulness of the model is both academic and practical. It could be part of a *software* which also enables the calculation of early cancellation of a partial payment credit given in simple interest.

Keywords: partial payments; simple interest; sum of digits; financial mathematics; software.

Recibido el 23 de marzo de 2011 – Aceptado el 20 de octubre de 2011
[1] Economista, académico de la Escuela de Administración de la Universidad Nacional. Correo electrónico: danielvillalobosc@gmail.com

1. Introducción

Los créditos comerciales pueden ser ofrecidos por empresas de distinto tipo, entre las que se encuentran los entes bancarios. La figura que asume el objeto del crédito no introduce ninguna diferencia, por lo que no ha de inducir a confusión. Por tratarse de un crédito bancario, el objeto dado a crédito es el dinero mismo, el representante general de todas las demás mercancías. En empresas comerciales, cuyo negocio es la venta de mercancías, estas son entregadas a espaldas del representante general del mundo de las mercancías; algunas veces haciéndose presente sólo de manera parcial, mediante la forma de *pago por adelantado*, *abono* o *apartado*, entre otras figuras financieras de este tipo.

El *precio de contado* de una mercancía cualquiera es el equivalente al monto de dinero que el acreedor entrega al deudor en la forma de crédito. Con el tiempo, en un plazo definido -normalmente por el acreedor o por el empresario vendedor-, el dinero retornará a su dueño, pero incrementado en valor. Ese incremento corresponde al monto que finalmente el deudor pagará a su acreedor, o sea, el precio que efectivamente ha de pagar el cliente al comerciante. En ambos casos, se trata del cargo financiero, este es el monto de dinero pagado por encima de la cantidad dada a crédito, o bien, por encima del precio de contado.

2. El modelo propuesto

El crédito comercial dado a pagos parciales con interés simple, incluyendo o no *pagos por adelantado* o simplemente *adelantos*, puede ser calculado de manera muy sencilla empleando técnicas matemáticas. Existen diversas fórmulas que ofrecen resolver, dadas ciertas condiciones, el cálculo del valor del dinero al terminar un plazo establecido o durante su cumplimiento. Entre esas técnicas se destacan las fórmulas residual o comercial, razón constante y razón directa; todas ellas tienen como objetivo encontrar la tasa aproximada de interés. Esas fórmulas implican una serie de cálculos previos antes de llegar al resultado esperado.

En el supuesto de que el valor insoluto o saldo correspondiente al valor en el momento de la deuda -que para estos efectos podría ser el precio de contado, si no media un adelanto-, la fórmula propuesta es:

$$P_e = P + [\, p_p * t * i`_e * \sum d_j] \qquad (1)$$

Donde:

P_e = Precio efectivo que pagará el deudor o cliente

P = Precio de contado de la mercancía

p_p = Monto dinerario del pago parcial

t = Fracción del año según pago parcial sea por semana, mes, trimestre, cuatrimestre, etc.

$i`_e$ = Tasa de interés efectiva -anual-

d_j = Serie de valores del número de *pagos insolutos de la deuda* -pagos por hacer durante el plazo-

$\sum d_j$ = Sumatoria de la serie de *valores del número de pagos insolutos*

La $\sum d_j$ es una suma de *dígitos insolutos* d_j hasta el d-*ésimo* valor de la serie del número de pagos insolutos.

$$\sum_{j=1}^{d} d_j = \sum [n_e(n_e + 1)]/2 - \sum_{j=1}^{d} [d_j(d_j + 1)]/2 \qquad (2)$$

En la expresión derecha de (2) el primer componente expresa la suma del e-*ésimo dígito del plazo o período de la deuda* y el segundo es la suma de los *dígitos insolutos* d_j.

Ejemplo:

"Un piano con valor de $600 es vendido mediante un pago inicial de $100 y 10 abonos mensuales de $50 más intereses del 6% sobre el saldo insoluto" (Aires, 1985:56).

Solución:

P_e = $600 + [$50 * 1/12 * 0,06 * 55]
P_e = $613,75

En el ejemplo presentado, el cargo por intereses es de $613,75 - $600 = $13,75, no obstante, no está claro que la tasa efectiva de interés sea del 6%. Lo único que se conoce es que esa tasa se aplica sobre los saldos insolutos a lo largo del plazo de la deuda. En el ejemplo t = 1/12, por cuanto los pagos parciales se harán mensualmente.

Al comparar el resultado, es evidente que con la fórmula propuesta no es necesario el uso del pago inicial -abono, pago adelantado, prima, y otros conceptos-. En este ejemplo, el precio pagado por el deudor o cliente correspondería al valor del *n*-ésimo o último término de la progresión definida por el número de pagos parciales y su monto. El primer término de esa progresión representa el precio al contado de la mercancía en cuestión. Aires (1985) resuelve su ejemplo aplicando la suma de los términos de una progresión aritmética, para lo cual primero requiere calcular el primer y el último pago. En el caso de la fórmula propuesta, este proceder no es un requisito.

En ciertos casos existe la posibilidad de que el deudor o cliente decida cancelar la deuda pagando el saldo insoluto. A este mecanismo se le conoce como *pago anticipado*. Cuando eso sucede, el deudor o cliente tiene derecho a pagar un monto menor por concepto de intereses. El cargo financiero o interés en este tipo de deudas tiende a disminuir conforme se avanza en el plazo debido a que el saldo insoluto se reduce. La tasa de interés efectiva no se modifica, pero la reducción del saldo insoluto sobre la que es aplicada genera un menor cargo financiero.

A diferencia del mecanismo brindado por Highland y Rosenbaum (1987:324-326), la fórmula aquí propuesta requiere solamente que se registre el nuevo valor de $\sum d_j$. En el caso del ejemplo de Aires (1985), se supone que el cliente o deudor *anticipa* o paga el saldo de la deuda, en el quinto pago. Entonces:

P_e = \$600 + [\$50 * 1/12 * 0,06 * 40]
P_e = \$610,00

El cliente o deudor pagaría \$610 de los cuales \$10 representan el cargo financiero. En este caso, el deudor se ahorra la diferencia del total del cargo financiero -\$3,75-.

Los detalles de tales cálculos referidos por los autores mencionados, pueden ser observados en el Cuadro 1 siempre con base en el ejemplo de Aires

Cuadro 1
Pagos parciales: Ejemplo de serie de pagos *mensuales* durante 10 meses

Datos		x_i	d_i	$\sum d_i$	I_{di}	$i`_{ni}$	i_i	$\sum i_{ia}$	P_e
P	**600,00**	0	10	10	41,67	0,0042	2,50	2,50	**602,50**
p_a	**100,00**	1	9	19	37,50	0,0038	2,25	4,75	**602,25**
S_i	**500,00**	2	8	27	33,33	0,0033	2,00	6,75	**602,00**
p_p	**50,00**	3	7	34	29,17	0,0029	1,75	8,50	**601,75**
Cf	**13,75**	4	6	40	25,00	0,0025	1,50	10,00	**601,50**
m_i	**10**	5	5	45	20,83	0,0021	1,25	11,25	**601,25**
$i`$	**0,005**	6	4	49	16,67	0,0017	1,00	12,25	**601,00**
n	**12**	7	3	52	12,50	0,0013	0,75	13,00	**600,75**
t	**0,0833**	8	2	54	8,33	0,0008	0,50	13,50	**600,50**
$i`_e$	**0,0600**	9	1	55	4,17	0,0004	0,25	13,75	**600,25**
Fórmula simplificada		10	0	**55**	0,00	0,0000	0,00	**13,75**	**600,00**
613,75			**55**		**229,17**	**0,0229**	**13,75**		**613,75**

Fuente: Aires, 1985, 56.

El Cuadro 1 registra el desarrollo completo del ejemplo tal como fue planteado por Aires (1985). Sin embargo, el procedimiento para el desarrollo detallado de la fórmula de pagos parciales propuesta aquí permite conocer con relativa facilidad la tasa de interés nominal. Nótese que siendo esa tasa $i`_{edi}$ = 0,0229, al multiplicarla por el precio de contado de la mercancía, se obtiene el cargo por intereses: \$600 * 0,0229 = \$13,75. Se desprende que la tasa de interés efectiva global $i`_e$ = 6% es aproximadamente 2,62 veces mayor que la tasa nominal $i`_{edi}$. Este es el resultado de que el cliente no pueda o no desee comprar la mercancía al precio de contado. Ese costo es considerado por Aires (1985) un *privilegio* del deudor o cliente: "el cargo adicional por el privilegio de no pagar el importe total el día de la compra".

Por lo tanto, de acuerdo con Aires el cargo por interés es una *gracia* o *prerrogativa* que concede el comerciante que vende a crédito -o el acreedor- al cliente o deudor, dada su incapacidad para hacer la compra al contado. De esta manera, el acreedor libera al deudor este de esa incapacidad concediéndole la oportunidad de pagar un precio mayor en una fecha posterior a la de compra. El deudor o cliente es liberado por el acreedor de la pena de no poseer la mercancía al no tener en su poder la totalidad o buena parte del equivalente general en el momento oportuno. El único requisito exigido por el comerciante al deudor o cliente, es tener la capacidad de pago parcial, aun cuando en ciertos casos esta recaiga en la figura del fiador.

Al introducir el supuesto de Highland y Rosenbaum (1987), ya mencionado, se observa en el Cuadro 2 el resultado con base en el ejemplo de Aires. Obsérvese que al decidir el cliente o deudor anticipar su deuda inmediatamente después del quinto pago -tal como se denota con el área sombreada en el Cuadro 2, el monto que pagaría por concepto de interés sería $10 evitándose pagar $3,75 si espera a cumplir el plazo definido. En el momento del anticipo, el deudor o cliente ha pagado más del 70% del cargo financiero. El monto por pagar será de $510, puesto que había adelantado $100 en la fecha de compra de la mercancía. Así, el total de la deuda se compone en $100 de adelanto o prima, $500 del saldo insoluto y $10 por concepto de interés. El monto de $610 se registra en el extremo inferior izquierdo de ese cuadro, manteniendo intacto los cálculos sobre a deuda original.

Cuadro 2
Pagos parciales: Ejemplo de serie de pagos *mensuales* durante 10 meses

Datos		x_i	d_i	$\sum d_i$	I_{di}	$i`_{ni}$	i_i	$\sum i_{ia}$	P_e
P	**600,00**	0	10	10	41,67	0,0042	2,50	2,50	**602,50**
p_a	**100,00**	1	9	19	37,50	0,0038	2,25	4,75	**602,25**
S_i	**500,00**	2	8	27	33,33	0,0033	2,00	6,75	**602,00**
p_p	**50,00**	3	7	34	29,17	0,0029	1,75	8,50	**601,75**
Cf	**13,75**	**4**	**6**	**40**	**25,00**	**0,0025**	**1,50**	**10,00**	**601,50**
m_i	**10**	5	5	45	20,83	0,0021	1,25	11,25	**601,25**
$i`$	**0,005**	6	4	49	16,67	0,0017	1,00	12,25	**601,00**
n	**12**	7	3	52	12,50	0,0013	0,75	13,00	**600,75**
t	**0,0833**	8	2	54	8,33	0,0008	0,50	13,50	**600,50**
$i`_e$	**0,0600**	9	1	55	4,17	0,0004	0,25	13,75	**600,25**
Fórmula simplificada		10	0	55	0,00	0,0000	0,00	13,75	**600,00**
610,00			**55**		**229,17**	**0,0229**	**13.75**		**613,75**

Fuente: Aires, 1985:56

3. El problema de la determinación de $i`_e$

La determinación de $i`_e$ es otro tema resuelto por la fórmula propuesta en este estudio, por lo que se puede anunciar que ese problema no existe. Con esta fórmula no es necesario el uso de tablas para la aproximación de la tasa efectiva en cuestión. No obstante, la situación diverge con respecto del modelo anterior por cuanto se requiere la sumatoria -suma de los dígitos- de I_{di} al momento m_i; esto es, $\sum I_{dia}$. Es probable que este sea el caso que con mayor frecuencia enfrentará el deudor o cliente de una empresa comercial. Aún cuando es una exigencia legal en casi todos los países que los comercios brinden al cliente todos los pormenores de la operación de compra a plazo, no es fácil para el común de los clientes o deudores determinar con precisión la tasa efectiva de interés; así no tendrán el conocimiento correcto para establecer el cálculo de dicha tasa, menos aún el de la tasa nominal cargada. Sin embargo, el modelo que aquí se presenta permite que el cliente o deudor interesado en protegerse -*ceteris paribus*-, tenga conocimiento de la transacción.

Para demostrar este caso, se toma el ejemplo 5 de Aires (1985:57):

"El precio de un televisor es de \$349,95 de contado. Puede ser pagado con \$49,95 iniciales y 10 mensualidades de \$35 cada una…hallar la tasa de interés cargada".
Solución:
A partir de la fórmula (1) se deriva fácilmente la tasa efectiva de interés si esta es desconocida. Por supuesto, es necesario desprender del ejemplo algunos elementos ahí contemplados:

$S_i = \$300$

$\sum P_p = P_p * m_i = \$35 * 10 = \$350$

$P_e = \sum P_p + P_p = \$350 + 49{,}95 = \$399{,}95$

Al despejar $i`_e$ de (3), el resultado es:

$P_e - P = + [\, p_p * t * i`_e * \sum d_j]$
$(P_e - P) / (p_p * t * \sum d_j) = i`_e$

Luego se deduce que:
$P_e - P = i_{ia}$

Además:
$p_p * t * \sum d_j = \sum I_{dia}$

Por tanto:
$i_{ia} = \$50$

Mientras que:
$\sum I_{dia} = \$160{,}42$

Si:
$i`_e = i_{ia} / \sum I_{dia}$ (3)

Entonces:
$i`_e$ = \$50/\$160,42 = 0,3117 = 31,17%

Estos resultados se ilustran en los Cuadros 3 y 4; en este último, se ha supuesto el caso de un pago anticipado inmediatamente después del tercer pago parcial; en esta ocasión, el cliente o deudor pagaría por concepto de interés \$24,55 y el precio efectivamente pagado por la mercancía sería de \$374,50 = $S_i + P_p + i_{ia}$ = \$300 + \$49,95 + \$24,55. El cliente o deudor se evitará realizar pagos por cargos financieros por el monto de \$25,45; estos son los resultados sombreados en el Cuadro 4 a la altura de la tercera línea. Todos los cálculos hasta aquí realizados para efectos didácticos, se generan automáticamente del modelo propuesto al introducir los supuestos pertinentes.

Cuadro 3
Pagos parciales: Ejemplo de serie de pagos mensuales durante 10 meses

Datos		x_i	d_i	$\sum d_i$	I_{di}	$\sum I_{dia}$	$i`_{ni}$	i_i	$\sum i_{ia}$	P_e
P	**349,95**	0	10	10	29,17	29,17	0,0260	9,09	9,09	**359,04**
p_a	**49,95**	1	9	19	26,25	55,42	0,0234	8,18	17,27	**358,13**
S_i	**300,00**	2	8	27	23,33	78,75	0,0208	7,27	24,55	**357,22**
p_p	**35,00**	3	7	34	20,42	99,17	0,0182	6,36	30,91	**356,31**
Cf	**50,00**	4	6	40	17,50	116,67	0,0156	5,45	36,36	**355,40**
m_i	**10**	5	5	45	14,58	131,25	0,0130	4,55	40,91	**354,50**
$i`$	**0,026**	6	4	49	11,67	142,92	0,0104	3,64	44,55	**353,59**
n	**12**	7	3	52	8,75	151,67	0,0078	2,73	47,27	**352,68**
t	**0,0833**	8	2	54	5,83	157,50	0,0052	1,82	49,09	**351,77**
$i`_e$	**0,3117**	9	1	55	2,92	160,42	0,0026	0,91	50,00	**350,86**
Fórmula simplificada		10	0	**55**	0,00	**160,42**	0,0000	0,00	**50,00**	**349,95**
399,95			**55**		**160,42**		**0,1429**	**50,00**		**399,95**

Fuente: Aires, 1985:57

Con la fórmula propuesta, se puede encontrar el valor de cualquier variable no dada, procediendo primero a determinar aquellos valores que la transacción implique implícitamente. Normalmente, este tipo de ejercicio es propio de la academia, con el fin de que los estudiantes conozcan el enfoque y el método del modelo y el uso práctico de la herramienta financiera.

Lo importante aquí es haber probado que no es necesario recurrir a las denominadas tablas para la estimación del *pago periódico de una anualidad,* cuando la serie de pagos es a un plazo y valor presente conocidos. Para efectos de este ejercicio conviene continuar con otro ejemplo de Aires (1985:90): “Un televisor puede ser comprado con \$449,50 al contado o \$49,5 de cuota inicial y \$27,50 mensuales durante 18 meses. (a) ¿Qué tasa nominal de interés se está cargando? (b) ¿Qué tasa efectiva de interés se está cargando?

Cuadro 4
Pagos parciales: Ejemplo de serie de pagos mensuales durante 10 meses

Datos		x_i	d_i	$\sum d_i$	I_{di}	$\sum I_{dia}$	$i`_{ni}$	i_i	$\sum i_{ia}$	P_e
P	349,95	0	10	10	29,17	29,17	0,0260	9,09	9,09	**359,04**
p_a	49,95	1	9	19	26,25	55,42	0,0234	8,18	17,27	**358,13**
S_i	300,00	**2**	**8**	**27**	**23,33**	**78,75**	**0,0208**	**7,27**	**24,55**	**357,22**
p_p	35,00	3	7	34	20,42	99,17	0,0182	6,36	30,91	**356,31**
Cf	50,00	4	6	40	17,50	116,67	0,0156	5,45	36,36	**355,40**
m_i	10	5	5	45	14,58	131,25	0,0130	4,55	40,91	**354,50**
$i`$	0,026	6	4	49	11,67	142,92	0,0104	3,64	44,55	**353,59**
n	12	7	3	52	8,75	151,67	0,0078	2,73	47,27	**352,68**
t	0,0833	8	2	54	5,83	157,50	0,0052	1,82	49,09	**351,77**
$i`_e$	0,3117	9	1	55	2,92	160,42	0,0026	0,91	50,00	**350,86**
Fórmula simplificada		10	0	**55**	0,00	**160,42**	0,0000	0,00	**50,00**	**349,95**
374,50			55		160,42		0,1429	50,00		399,95

Fuente: Aires, 1985:57

Aires (1985) deduce mediante el uso de los valores de la tabla en cuestión que la tasa efectiva por período es entre 2% y 2½%, mientras que la tasa nominal se encontraría entre 24% y 30%; estas son el resultado de multiplicar cada extremo de las tasas efectivas por el número de pagos por ser realizados: 2% * 12 = 24% y 2½% * 12 = 30% respectivamente. No conforme con el resultado, Aires recurre al mecanismo de interpolación necesario cuando se desea una mayor aproximación a un cálculo y encuentra que la tasa nominal convertible mensualmente más cercana es de 28,20% mientras que la tasa efectiva es de 32,15%.

Cuadro 5
Pagos parciales: Ejemplo de serie de pagos *mensuales* durante 18 meses

Datos y variables		x_i	d_i	$\sum d_i$	I_{di}	$\sum I_{dia}$	$i`_{ni}$	i	$\sum i_{ia}$	P_e
P	449,50	**0**	**18**	18	41,25	41,25	0,0222	10,00	10,00	**459,50**
p_a	49,50	**1**	**17**	35	38,96	80,21	0,0210	9,44	19,44	**458,94**
p_p	27,50	**2**	**16**	51	36,67	116,88	0,0198	8,89	28,33	**458,39**
Cf	95,00	**3**	**15**	66	34,38	151,25	0,0185	8,33	36,67	**457,83**
S_i	400,00	**4**	**14**	80	32,08	183,33	0,0173	7,78	44,44	**457,28**
m_i	18	**5**	**13**	93	29,79	213,13	0,0161	7,22	51,67	**456,72**
$i`$	0,0202	**6**	**12**	105	27,50	240,63	0,0148	6,67	58,33	**456,17**
n	12	**7**	**11**	116	25,21	265,83	0,0136	6,11	64,44	**455,61**

Datos y variables		x_i	d_i	$\sum d_i$	I_{di}	$\sum I_{dia}$	$\grave{i}_{ni}$	i	$\sum i_{ia}$	P_e
t	**0,0833**	**8**	**10**	126	22,92	288,75	0,0124	5,56	70,00	**455,06**
$\grave{i}_e$	**0,2424**	**9**	**9**	135	20,63	309,38	0,0111	5,00	75,00	**454,50**
		10	**8**	143	18,33	327,71	0,0099	4,44	79,44	**453,94**
		11	**7**	150	16,04	343,75	0,0087	3,89	83,33	**453,39**
		12	**6**	156	13,75	357,50	0,0074	3,33	86,67	**452,83**
		13	**5**	161	11,46	368,96	0,0062	2,78	89,44	**452,28**
		14	**4**	165	9,17	378,13	0,0049	2,22	91,67	**451,72**
		15	**3**	168	6,88	385,00	0,0037	1,67	93,33	**451,17**
		16	**2**	170	4,58	389,58	0,0025	1,11	94,44	**450,61**
		17	**1**	171	2,29	391,88	0,0012	0,56	95,00	**450,06**
Fórmula simplificada		**18**	**0**	171	0,00	391,88	0,0000	0,00	95,00	**449,50**
544,50			**171**		**391,88**		**0,2113**	**95,00**		**544,50**

Fuente: Aires, 1985:57

Los resultados de Aires (1985) contrastan con los generados por el modelo propuesto en este estudio, proveyendo tasas más parecidas a las tasas más bajas derivadas por ese autor. Nótese en el Cuadro 5 que la tasa efectiva por período sería de 0,0202 o 2,02%, por lo que la tasa efectiva anual será de 0,2424 o 24,24%. Mientras tanto, la tasa nominal de interés obtenida es de 0,2113 o 21,13%.

Referencias Bibliográficas

Aires, F. (1985). *Matemáticas financieras. Teoría y 500 problemas resueltos.* McGraw-Hill, México.

Highland, E. y Rosenbaum S. (1987). *Matemáticas Financieras.* Editorial Prentice Hall Hispanoarnericana S. A, México.

Anexo

Nomenclaturas y fórmulas para el cálculo de las variables del modelo

P	= Precio de la mercancía
p_p	= Pago parcial
S_i	= Saldo insoluto
p_a	= Pago adelantado o inicial
m_i	= Número de pagos parciales (Plazo)
x_i	= Número de pagos parciales efectivos
$i`$	= Tasa de interés efectiva por período
n	= Número de períodos de pago en un año
$t = 1/n$	= Período efectivo de pago parcial
I_{di}	= $P_p * t * d_i$ = Masa de interés en d_i
d_j	= $(m_i - x_i)$ = Plazo insoluto
$i`_e$	= Tasa de interés efectiva
i_i	= Masa de interés según t = $((p_p * i`) - p_a) / (\sum I_{dia} * Id_i)$ = si no se conoce $i`_e$. Si ésta es conocida; $p_p * i` * d_i$
$\sum i_{ia}$	= Masa de interés acumulado según t = $((p_p * i`) - p_a) / (\sum I_{dia} * \sum I_{di})$ = si no se conoce $i`_e$. Si ésta es conocida; $p_p * i` * \sum d_j$
$i`_{ni}$	= Tasa de interés nominal d_i
P_e	= Precio efectivo de la mercancía
$\sum d_j$	= Sumatoria de valores del número de pagos insolutos
Cf	= Cargo fijo = i
$\sum I_{dia}$	= Sumatoria de I_{di} acumulada