

## DISEÑO DE UN INSTRUMENTO DE INVENCION DE PROBLEMAS PARA CARACTERIZAR EL TALENTO MATEMATICO

Johan Espinoza González<sup>1‡</sup>, Jose Luís Lupiáñez Gómez<sup>2\*</sup> e Isidoro Segovia Alex<sup>2\*</sup>

<sup>1‡</sup>Profesor titular, Universidad Nacional, Sede Región Brunca. Campus Pérez Zeledón

<sup>2\*</sup>Profesor titular, Universidad de Granada, España

*Recibido: 28/Jun/2017; Aceptado: 17/Oct/2018*

### Abstract

The design of an instrument of problem posing to characterize the mathematical talent by this type of activities is presented. This instrument consists of three questionnaires containing ten tasks of problem posing, which were applied in a pilot study to two groups of secondary students, one considered with mathematical talent and another of a normal public school. For the design of the instrument, a literature review was carried out related to the processes of problem posing, classification, and designing of problem posing tasks, as well as the characteristics of mathematical talent associated with this type of activities. The results of the study allowed adjustments to the instrument, in relation to the type of task proposed, the indications, the statement and the time stipulated to complete it. In the same way, it allowed to identify thirteen characteristics of talent, key for problem posing, and in each one of them three levels of comprehension that will allow to characterize the mathematical talent.

### Resumen

Se presenta el diseño de un instrumento de invención de problemas cuyo objetivo es caracterizar el talento matemático mediante este tipo de actividades. Dicho instrumento está conformado por tres cuestionarios que contienen en total diez tareas de invención de problemas, las cuales fueron aplicadas en un estudio piloto a dos grupos de estudiantes de secundaria, uno considerado con talento matemático y otro de un colegio público normal. Para el diseño del instrumento se realizó una revisión de literatura relacionada con los procesos de invención de problemas, la clasificación y diseño de tareas de invención de problemas, así como las características del talento matemático asociadas con este tipo de actividades. Los resultados del estudio permitieron realizar ajustes al instrumento, en relación con el tipo de tarea propuesta, las indicaciones, el enunciado y el tiempo estipulado para completarla. De igual forma permitió identificar trece características del talento claves para la invención de problemas y en cada una de ellas tres niveles de dominio que permitirán caracterizar el talento matemático.

**Key words:** mathematical talent; problem posing; problem solving; mathematics education.

**Palabras clave:** talento matemático; invención de problemas; resolución de problemas; educación matemática.

## I. INTRODUCCIÓN

El interés por la investigación relacionada con la inteligencia, la superdotación y el talento no son una novedad, ya que han sido estudiados desde el siglo XX; sin embargo, esto no es así para las relacionadas con el talento en matemática que tienen un desarrollo más reciente (Castro, 2008). Este mismo autor menciona que los estudios realizados en este campo se han centrado en tres grandes focos de investigación, donde caracterizar el talento matemático es uno de ellos.

De hecho, varias investigaciones han puesto de manifiesto las características de este tipo de estudiantes, generalmente, al resolver tareas de resolución de problemas; sin embargo, existen pocos estudios que centren su atención en estudiar la actuación de estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas (Espinoza, 2011).

Al respecto se pueden citar los estudios de Dominic & Freiman (2017); Ellerton (1986); Espinoza, Lupiáñez, & Segovia (2016); Keşan, Kaya, & Güvercin (2010) y Krutetskii, (1976), los cuales se fundamentan en el hecho de que cuando un estudiante realiza este tipo de actividades alcanza niveles avanzados de razonamiento matemático (Ayllón & Gomez, 2014), que les permite evidenciar sus conocimientos, habilidades, capacidades y experiencias matemáticas (Espinoza, 2011; Silver, 1994).

---

<sup>‡</sup>Autor para correspondencia: [jespinoza@una.cr](mailto:jespinoza@una.cr)

Por tanto, en este estudio se presenta el diseño de un instrumento de invención de problemas cuyo fin es caracterizar estudiantes con talento matemático, el cual es producto de una revisión de literatura relacionada con la clasificación y diseño de tareas de invención de problemas, así como de las características del talento matemático asociadas con este tipo de actividades. Luego, con base en esta información se elaboró una matriz que mostraba las características del talento matemático, así como variables de estudio que podrían generarse a partir de las producciones de los estudiantes en cada tarea

Por último, se realizó un estudio piloto al instrumento que fue aplicado a dos grupos de estudiantes, uno identificado con talento matemático mediante el test de Raven y otro de un colegio público normal. El objetivo del estudio piloto fue comprobar si ambos grupos eran capaces de inventar problemas a partir de las tareas propuestas, comprobar si el tiempo y el orden establecido de las tareas definidas era el adecuado e identificar algunas variables de estudio que permitan caracterizar los problemas inventados por los estudiantes. Además, se realizó una entrevista a los estudiantes con el objetivo de conocer su opinión con respecto a la actividad y profundizar un poco más sobre algunos elementos de interés.

A continuación se hace un breve resumen de la revisión de literatura realizada, el instrumento empleado y de los resultados de la implementación del estudio piloto. Por último se presentan las conclusiones y modificaciones realizadas al instrumento de acuerdo con los objetivos planteados en el estudio piloto.

## II. LA INVENCION DE PROBLEMAS

De acuerdo con Singer, Ellerton & Cai (2013), la actividad de inventar problemas no es nueva, sino que forma parte de la resolución de problemas desde hace ya varios años; sin embargo, es hasta en las últimas décadas cuando los investigadores en Educación Matemática le prestan más atención y la identifican como una línea de investigación (Espinoza, Lupiáñez & Segovia, 2016). Pero ¿en qué consiste este proceso?

La literatura consultada muestra que la invención de problemas ha sido definida de varias formas, pero todas ellas hacen referencia al mismo hecho, inventar problemas. Así, se le conoce como generación de problemas o reformulación de problemas dados (Silver, 1994), formulación de problemas (Kilpatrick, 1987), planteamiento de problemas (Brown & Walter, 1990) o creación de problemas (Malaspina, 2011).

Para Koichu & Kontorovich (2013), la invención de problemas es el proceso mediante el cual los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos con significado. Ayllón, Castro & Molina (2011), también hacen referencia a este hecho y lo conceptualiza como la acción de producir un enunciado que presente un planteamiento o historia a partir del cual se formulan una o más preguntas que son contestadas a partir de ciertos datos. Además, el problema inventado debe ser genuino, por lo que no debe ser tomado de otro medio, sino que es producto de los conocimientos que tiene el sujeto. Otra conceptualización se refiere al hecho de crear un problema nuevo, ya sea por variación de un uno dado o por elaboración (Malaspina, 2011).

Por último, Espinoza, Lupiáñez, & Segovia (2016) mencionan que es un proceso matemático complejo donde se construyen enunciados a partir de la interpretación personal o significado que le da un sujeto a una situación concreta o a un problema previamente dado, el cual puede ocurrir antes, durante o después del proceso de resolución. Esta concepción de invención de problemas es la que utilizaremos en este trabajo.

## III. CLASIFICACIÓN Y DISEÑO DE TAREAS DE INVENCION DE PROBLEMAS

De acuerdo con Silver y Cai (1996), existe una variedad notable de clasificaciones de tareas de invención de problemas, que dan lugar a una gran cantidad de recursos que se pueden emplear para promover el aprendizaje significativo de los escolares. Al respecto, Stoyanova (1998) identifica tres categorías de experiencia: situación libre, semi-estructurada y situación de planteamiento de problemas estructurada.

Otra clasificación se basa en si la actividad se lleva a cabo antes, durante o después del resolver un problema matemático (Silver, 1994). En el primer caso lo que se persigue no es la solución sino la creación de un problema a partir de una situación o experiencia. En el segundo se busca que el estudiante reformule el problema dado y en el tercer caso se le pide a los estudiantes que modifique el objetivo, meta o condición de un problema ya resuelto con el fin de generar nuevos problemas.

Stoyanova (1998) y Silver (1994) también identifican 5 categorías generales de invención de problemas que piden a los estudiantes inventar: a) un problema sin ninguna restricción, b) un problema con una respuesta dada, c) un problema que contenga cierta información, d) preguntas para una situación problemática dada y e) un problema que se ajuste a un cálculo dado.

Kojima, Miwa & Matsui (2009, citados en Ghasempour, Bakar & Reza, 2013), agregan una estrategia denominada “imitación”, que consiste en exponer a los estudiantes ante casos de problemas y luego ellos reproducen los casos siguiendo los procesos.

De igual forma, Chapman (2012) propone que los estudiantes respondan a actividades que impliquen escribir un problema: a) de su propia elección, b) similar a un problema dado, c) que tengan una pregunta abierta, d) relacionado con un concepto matemático específico, e) basado en un problema mal formulado y, f) derivado de una figura dada. Por su parte, Tsubota (1987; citado en Fernández & Barbarán, 2015), distingue seis tipos de tareas que podrían contener: a) un algoritmo, b) texto, c) una figura o una tabla, d) un tópico matemático, e) una respuesta, f) un problema matemático.

En cuanto al diseño de las tareas, se recomiendan que las situaciones planteadas sean parte natural de las actividades que lleva a cabo el alumno en clases de matemáticas, por lo que pueden generarse a partir de libros de texto al modificar las características y el enunciado de las tareas (Stoyanova & Ellerton, 1996). Además, se sugiere que los estudiantes inventan problemas usando su primer problema como referente, pues en el estudio de Silver & Cai (1996) se observó que a medida que reformulaban sus problemas iba creciendo su complejidad sintáctica y semántica. En este sentido, Singer & Voica (2013) afirman que la situación de invención de problemas más productiva, es aquella, en la que se plantea un problema, el estudiante la resuelve y luego la reformula con el fin de obtener uno más complejo.

Por último, Espinoza (2011) recomienda presentar situaciones de invención de problemas que incluyan imágenes, ya que en su estudio se encontró que los estudiantes inventaron problemas con mayor riqueza con este tipo de situaciones, que en aquellas donde la situación es presentada de forma textual. Además, sugiere que las tareas propuestas sean de interés y familiar para los estudiantes, incluyan suficiente información tanto explícita e implícitas que promueva realizar conexiones, motiven a los estudiantes a plasmar su creatividad, permitan el empleo de diferentes tipos de números, cantidades y representaciones numéricas y favorezcan e incentiven la creación de problemas difíciles.

Así, en términos generales, se pueden identificar las siguientes situaciones de invención de problemas:

- a) Inventar problemas sin ninguna restricción.
- b) Completar un problema agregando la pregunta que falta.
- c) Inventar problemas que encajen con una solución, enunciado, contexto, pregunta, operaciones aritméticas, datos, modelo, proceso de resolución, concepto o procedimiento matemático.
- d) Inventar problemas basados en imágenes, tablas y gráficos estadísticos, gráficas de funciones, figuras o relaciones geométricas, regiones sombreadas, datos contextualizados en situaciones reales, etc).
- e) Inventar problemas con base en problema dado o mal formulado.
- f) Reformular un problema durante el proceso de resolución o a partir de uno que ya han inventado.

#### **IV. CARACTERÍSTICAS DEL TALENTO MATEMÁTICO ASOCIADAS A LA INVENCION DE PROBLEMAS**

Luego de una revisión sobre la caracterización del talento matemático, se encontró que varios autores proporcionan una serie de rasgos que pueden observarse en niños aventajados en esta disciplina y que pueden servir de señales para proceder a la identificación y evaluación del posible talento matemático, mediante tareas de invención de problemas.

Al respecto se pueden citar las siguientes: captan la estructura interna de los problemas, examinan el contenido matemático de un problema analíticamente y sistemáticamente, recuerdan información matemática general y métodos de resolución (Krutetskii, 1976). Capacidad para formular y reformular el contenido con el fin de crear nuevos problemas (Singer & Voica, 2014). Analizan el problema y consideran alternativas, tienen energía, persistencia y concentración (Banfield, 2005). Disfrutan inventando problemas originales (House, 1987; citado en Keşan et al., 2010). Poseen flexibilidad en la manipulación de datos, agilidad mental para el flujo de ideas o pensamiento divergente, capacidad de generalización y formulación

espontánea de problemas (Greenes, 1981). Producen ideas originales, valiosas y extensas, localizan la clave del los problemas (Freiman, 2006).

## V. DESCRIPCION GENERAL DEL INSTRUMENTO DE INVENCION DE PROBLEMAS

Con base en la revisión de literatura relacionada con la clasificación y diseño de tareas de invención de problemas, así como del análisis de las características del talento matemático, se construyó un instrumento que está conformado por tres cuestionarios de invención de problemas, de modo que el primero posee cuatro tareas, mientras que los otros dos contienen tres tareas cada uno. Es importante mencionar que se constató, con base en los programa de estudio de Matemática para la educación media costarricense y los profesores a cargo, que los temas incluidos en el instrumento forman parte de dichos programas y que ya habían sido estudiados en clases.

El instrumento es presentado a los estudiantes en diez hojas y en cada una de éstas se muestra una tarea de invención de problemas. En la parte superior de la primera página se consigna la información general del estudiante como es el nombre, apellidos, género, edad, nombre del centro educativo y nivel que cursa.

También se incluyó en cada tarea las opciones fácil, regular o difícil, para que los estudiantes indicaran el nivel de dificultad que le asignaban a la tarea de inventar cada problema. También al finalizar la aplicación del estudio piloto se aplicó una pequeña entrevista semiestructurada a ambos grupos de estudiantes con el objetivo de profundizar en el análisis del mismo.

Por último, es importante mencionar que en el estudio piloto se les pidió a los estudiantes resolver los problemas que inventaron y justificar el razonamiento utilizado para obtener la respuesta. El instrumento se muestra en el apéndice de este documento. A continuación se describe con mayor detalle cada uno de los cuestionarios.

### *Cuestionario 1*

El primer cuestionario está conformado por tareas libres de invención de problemas, donde el estudiante formula problemas nuevos sin ninguna restricción y luego los reformula para obtener un problema más complejo.

En la tarea 1, se le pide a los estudiantes inventar un problema matemático que ellos mismos puedan resolver, pero que consideren difícil para sus compañeros. Con respecto a esta última condición, creemos importante que los estudiantes planteen problemas que consideren difíciles de resolver, ya que nos interesa observar en qué medida ponen en juego sus conocimientos, habilidades y creatividad para inventar problemas elaborados. Además, consideramos que esto podría promover que los estudiantes pongan su mayor esfuerzo y sienta un reto y compromiso hacia la actividad de inventar problemas originales.

En la tarea 2, los estudiantes reformulan el problema que inventaron en la tarea 1, con el fin de modificar algunos de sus elementos para obtener un problema más complejo. Por último, en la tarea 3, los estudiantes deben inventar un problema que se resuelva por medio del planteo de alguna ecuación y en la última tarea se les solicita reformular el problema planteado en la tarea anterior.

### *Cuestionario 2*

El segundo cuestionario incluye tres tareas semiestructuradas, en las cuales se pide inventar problemas difíciles de resolver a partir de una información textual o enunciado.

En la tarea 1, se les propone a los estudiantes inventar un problema matemático con base en una situación expuesta de forma escrita. La instrucción indica lo siguiente: “con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información”. Luego se presenta la siguiente situación con base en la cual deben inventar un problema matemático:

“Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Heredia. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros”.

Esta tarea fue empleada en el estudio de Espinoza (2011) y a partir de ella los estudiantes inventaron problemas de gran riqueza. Además, permitió establecer diferencias en las producciones de los estudiantes, de modo que los chicos con talento matemático inventaron problemas más ricos que sus compañeros de un colegio público normal.

En la segunda tarea se les propone a los estudiantes inventar la mayor cantidad de problemas que puedan a partir del siguiente enunciado:

“Juan, María y Pedro son artesanos que venden sus productos en el mercado. Juan vende sandalias a  $\text{¢}5000$ , María bolsos a  $\text{¢}9500$  y Pedro carteras a  $\text{¢}6000$ . La semana pasada Juan vendió 15 productos más que Pedro, mientras que Pedro vendió el doble de productos que María. María vendió 42 bolsos esa misma semana”

Con base en esta situación se podrían inventar problemas relacionados con la cantidad de productos que vende cada uno en un determinado tiempo, establecer relaciones de precios y ganancias entre los comerciantes. Además, se podrían plantear un problemas en el área de la Estadística al incluir el promedio, la moda, mediana para describir las ventas semanales, de Aritmética al establecer relaciones numéricas entre la información dada o plantear un problema de ecuaciones.

La última tarea de este cuestionario es similar a la anterior, ya que se le solicita a los estudiantes inventar 5 problemas matemáticos relacionados con el siguiente enunciado:

“Hay diez niñas y quince niños de pie en una fila”.

Ésta tarea es menos estructurada que la anterior, por lo que el estudiante puede emplear más su creatividad. Se considera que pueden formular problemas en las que se relacionen las posiciones, edades, estaturas, etc de los niños y las niñas, así como plantear problemas que involucre alguna ecuación. Así, los problemas inventados podrían estar relacionados con la teoría de números, métodos de conteo, probabilidades, estadística, etc.

### Cuestionario 3

En el último cuestionario los estudiantes formulan y reformulan problemas a partir de una imagen, figura geométrica y recorte de periódico.

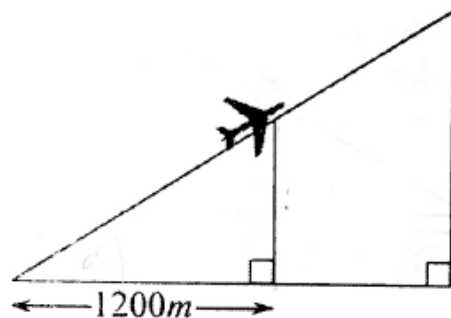
La indicación de la tarea 1 de este cuestionario es la siguiente: “De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información”. Luego se presenta la siguiente imagen:



Como se puede observar, la imagen muestra explícitamente una información numérica de tipo natural (80 metros) y un contexto que es familiar para los estudiantes (tres niños recorriendo una pista alrededor de una plaza que está junto a una cancha de fútbol). Dicho contexto permite que los estudiantes puedan establecer relaciones entre la pista y la cancha de fútbol, así como entre los niños que están corriendo en la pista. De esta forma, los problemas planteados podrían estar relacionados con distancias, tiempo, velocidad, área, perímetro, etc, y enmarcados en el área de la Aritmética, Física, Geometría, Trigonometría etc. Esta tarea también fue empleada en el estudio de Espinoza (2011) y resultó que se lograron establecer diferencias en las producciones de los estudiantes, de modo que los chicos con talento inventaron problemas más ricos que sus compañeros de un colegio público normal.

En la tarea 2 se presenta una imagen que muestra el momento en que un avión despegue de una pista y a partir de ella el estudiante inventa la mayor cantidad de problemas matemáticos que pueda.

La imagen presentada es la siguiente:



Siguiendo la recomendación de Stoyanova & Ellerton (1996), la imagen anterior fue extraída y modificada de un libro de texto. A partir de ella los estudiantes pueden inventar problemas relacionadas con la velocidad, altura, distancia recorrida y consumo de gasolina del avión. También podría agregar elementos nuevos como un carro en movimiento o un observador en la torre de control. Así, los problemas inventados podrían enmarcarse dentro de las áreas de la Geometría, Trigonometría, Ecuaciones, física, etc.

Por último, en la tarea 3, el estudiante debe inventar un problema matemático de acuerdo a un recorte de periódico y se le indica que puede agregar más datos o información. La imagen presentada es la siguiente:



Se considera que los problemas pueden estar relacionados con el precio de diferentes tipos de pijamas o descuentos sobre éstas. Podría cambiar la información agregando diferentes tipos de descuentos dependiendo de la hora o descuentos adicionales si se utiliza la tarjeta de la tienda. Además, podría incluir relaciones matemáticas entre las personas que van a la noche de pijamas. Así, los problemas planteados podrían ser aritméticos, con ecuaciones, sobre descuentos, etc.

## VI. PROCEDIMIENTO GENERAL DE APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

El instrumento fue aplicado por separado a dos grupos de estudiantes con características diferentes en cuanto a su competencia matemática. El primero conformado por cuatro estudiantes del Colegio Científico Costarricense de Pérez Zeledón, los cuales son considerados con talento matemático, y el segundo por siete estudiantes de un colegio público normal de Pérez Zeledón, Costa Rica. Para el estudio piloto se propuso que ambos grupos completarán el instrumento en 2 sesiones de 80 minutos, de manera que en la primera sesión completaron los dos primeros cuestionarios y en la segunda el cuestionario 3. Es importante mencionar que ninguno de los grupos recibió preparación o entrenamiento previo en invención de problemas matemáticos.

## VII. RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACION DEL ESTUDIO PILOTO

En el primer cuestionario se observó que los estudiantes tuvieron dificultades para completar las tareas propuestas, pues era la primera vez que se enfrentaban a actividades de este tipo. Esto se evidenció en

la inseguridad, distracción y confusión que mostraron durante la actividad, así como en la dificultad mostrada para inventar un problema.

En cuanto a la tarea 1 de este cuestionario, resultó que ningún estudiante logró inventar un enunciado en el tiempo estimado (10 minutos), de hecho, en la entrevista mencionaron que fue una de las tareas más difíciles de realizar, ya que no sabían como iniciar. Ante esto, se decidió ampliar el tiempo disponible para que la concluyeran; sin embargo, provocó que los estudiantes del grupo talento no pudieran realizar la tarea 2 de este cuestionario.

En el caso del grupo estándar, el profesor a cargo permitió continuar con la actividad aún pasados los 40 minutos establecidos, por lo que ellos sí completaron dicha tarea. En este grupo se observó que les resultó más fácil realizar esta tarea, ya que tenían una idea previa de donde tomar ideas. De hecho, catalogaron su dificultad como fácil o regular, mientras que la tarea 1a fue catalogada como difícil o regular de realizar.

En la tarea 3 resultó que ningún estudiante del grupo estándar inventó un enunciado que se resolviera con el tema de ecuaciones y mencionaron que no sabían cómo hacerlo, aún cuando el profesor a cargo había confirmado que el tema sí se había impartido en clases. Caso contrario sucedió con el grupo talento que sí la completaron y en la entrevista mencionaron que fue una de las tareas que más disfrutaron. En términos generales la catalogaron como regular o difícil de realizar.

Por último, dado que en este cuestionario los estudiantes tardaron más tiempo en completar las tareas 1, 2 y 3, se decidió que los estudiantes no resolvieran la tarea 4 para continuar con el estudio piloto del cuestionario 2.

En relación con el segundo cuestionario, se observó que los estudiantes estuvieron más a gusto con la actividad, lo cual se evidenció en su seguridad, relajación, concentración y actitud hacia la tarea. Además, ambos grupos catalogaron la dificultad de las tareas como fáciles o regulares de realizar. Esto puede deberse a que corresponden a tareas más estructuradas que las anteriores o que los estudiantes se habían familiarizando con la actividad.

Con respecto a las tareas de este cuestionario, en la primera los estudiantes inventaron problemas variados y de gran riqueza; mientras que en la segunda plantearon gran cantidad de preguntas y en algunos casos diversas, pero con un bajo nivel de riqueza, ya que eran fáciles de resolver y no establecían diferencias significativas entre ambos grupos. Esto quizás se deba a que es una tarea muy estructurada, que limita la creatividad de los estudiantes y no los motiva a inventar problemas complejos. Por último, los estudiantes no tuvieron tiempo para completar la tarea 3.

En cuanto al cuestionario 3, se observó que ambos grupos completaron las primeras dos tareas sin ningún inconveniente, lo cual se evidenció en las entrevistas y valoración de dichas tareas, pues afirmaron que fueron las que completaron con mayor facilidad. Además, en estas tareas se logró encontrar diferencias en las producciones de ambos grupos. Es importante mencionar que los estudiantes manifestaron que en este cuestionario les resultó más fácil inventar problemas con base en la tarea 2 que con la tarea 1.

Con respecto a la tarea 3, algunos estudiantes del grupo estándar no lograron inventar algún enunciado, mientras que los del grupo talento sí la completaron. Lamentablemente no fue posible indagar en el por qué no lo hicieron, ya que la entrevista se aplicó el mismo día en que se realizó este cuestionario y aun no se habían analizado las producciones de los estudiantes ante esta tarea.

Otro aspecto a resaltar en la tarea 3, es el hecho de que no se encontraron problemas diversos, sino que la mayoría se relacionaban con descuentos. Esto puede deberse a que la tarea presenta dicha información o porque los estudiantes se sienten cómodos y manejan el tema de porcentajes.

Por último, se observó que en cuanto avanzaban en la realización de las tareas los estudiantes se sentían más cómodos con la misma.

## VIII. CONCLUSIONES

A partir de los resultados de la implementación del estudio piloto y de los objetivos planteados al mismo, se concluye que los estudiantes fueron capaces de inventar problemas con base en las tareas propuestas, excepto en la tarea 3 del cuestionario 1 y del cuestionario 3. A pesar de que los estudiantes del grupo estándar no inventaron problemas que se resolvieron con alguna ecuación, se considera apropiado no eliminarla porque los estudiantes del grupo talento sí la completaron. Además, es una tarea que puede establecer diferencias en cuanto a la riqueza de los problemas planteados. Por tanto, se modificará la instrucción para que sea más comprensible para los estudiantes.

Con respecto a la tarea 3 del cuestionario 3, se cambiará la imagen por una que incluya precios y productos del supermercado, pues es una tarea más contextualizada en la que pueden comparar precios o listas de compras, aplicar descuentos, establecer relaciones entre los precios o capacidades de los productos, plantear ecuaciones, etc. La imagen propuesta es la siguiente:



También se cambiará la tarea 2 del cuestionario 2 por una que establezca más diferencias en las producciones de los estudiantes. Así se incluirá la siguiente tarea “Juan, Pedro y Arturo se fueron de paseo el fin de semana a la playa y para regresar a casa decidieron turnarse para conducir. Arturo condujo 80km más que Pedro, Pedro condujo el doble de kilómetros que Juan. Juan condujo 50 km”. Esta tarea ya fue empleada en otras investigaciones y de la cual se han obtenido resultados valiosos.

En relación al tiempo para completar las tareas, se considera necesario eliminar algunas de ellas para que los estudiantes dispongan de más tiempo, ya que se pretende que el instrumento sea completado en dos sesiones de 80 minutos. Por tanto, se decidió eliminar la tarea 4 del cuestionario 1, que es similar a la tarea 2 de este mismo cuestionario y la tarea 3 del cuestionario 2, porque los estudiantes no tuvieron tiempo para completarla.

En cuanto al orden en el que se presentaron las tareas, se concluye que se deben reordenar los cuestionarios con el fin de iniciar con tareas más estructuradas y que presenten una mayor cantidad de información explícita. Por lo tanto, el instrumento estará conformado primeramente por el cuestionario 2, luego por las tareas del cuestionario 3 y por último el cuestionario 1. Además, se le pedirá a los estudiantes resolver los problemas que inventan, excepto en la tarea 2 del cuestionario 2 y cuestionario 3, donde sólo deben resolver el que consideren más difícil.

En resumen, el instrumento estará conformado por tres cuestionarios. El primero contiene dos tareas semiestructuradas de invención de problemas, donde se le pide a los estudiantes inventar enunciados con base en información presentada de forma textual. El segundo contiene tres tareas que incluye dos imágenes y un recorte de periódico, mientras que el tercer cuestionario está compuesto por dos tareas abiertas de invención de problemas.

Por otra parte, luego de estudiar las características del talento matemático y analizar las producciones de los estudiantes, se logró identificar una serie de variables que fueron frecuentes, sobre todo en el grupo talento, y que están relacionadas con el talento matemático y los procesos de invención de problemas. Dichas variables las denominamos “características del talento matemático claves para la invención de problemas”. A continuación se describe brevemente cada una de ellas.

- 1) *Invención de un problema matemático a partir de la situación propuesta:* esta característica se relaciona con la capacidad que muestra el estudiante de inventar un problema matemático a partir de la situación propuesta.
- 2) *Resolución correcta del enunciado:* esta característica se relaciona con la capacidad del estudiante de resolver el problema que planteó.
- 3) *Coherencia en el enunciado:* estudia la formulación de problemas bien concebidos en el sentido de que sean coherentes de acuerdo con las siguientes características: el enunciado contiene todas sus partes (información, requerimientos, contexto, entorno matemático), relación entre los requerimientos y la información del problema, coherencia matemática de los conceptos empleados, buen uso de la semántica.



- 4) *Capta, manipula y relaciona información a partir de la situación propuesta*: se refiere a la capacidad que tienen los estudiantes de observar, manipular y establecer relaciones a partir de la información implícita o explícita que contiene la situación propuesta; así como profundizar en las relaciones que establecen los datos e imágenes.
- 5) *Comprensión de ideas complejas*: esta variable se refleja cuando el estudiante plasma en sus producciones este tipo de ideas y logra resolver el problema con éxito. Se considera que una idea es compleja cuando es comprendida, generalmente, por estudiantes que están en grados superiores de quien la está empleando
- 6) *Empleo de diversos campos del conocimiento*: se refiere a la diversidad de campos de conocimiento que incluye el estudiante en el problema matemático que inventa.
- 7) *Flexibilidad en el uso de datos numéricos*: esta característica se refiere a la diversidad de campos de conocimiento que emplea el estudiante al inventar un problema.
- 8) *Pensamiento divergente*: se refiere a la cantidad de proposiciones no semejantes presentes en el enunciado del problema. Se toma la conceptualización de proposición expuesta en Espinoza, Segovia & Lupiáñez (2015).
- 9) *Control metacognitivo*: la metacognición en la invención de problemas consiste en el conocimiento y control de la actividad cognitiva que ejerce el estudiante cuando se enfrenta a este tipo de tareas. Esta se evidencia a partir de los cambios que realiza el estudiante a la información o los requerimientos del problema que inventó.
- 10) *Principios de autocorrección en la resolubilidad del problema*: esta variable se relaciona con el control metacognitivo explicado en el caso anterior, pero se centra en las acciones que realiza el estudiante para verificar que el problema inventado es resoluble. Para ello comprueba y realiza los cambios necesarios para que el problema está bien concebido, tenga la información necesaria para ser resuelto, que los requerimientos no son ambiguos, que existe relación entre la información y los requerimientos y que no presente, en general, alguna incompatibilidad que impida resolverlo.
- 11) *Motivación*: se relaciona con la persistencia, concentración y actitud que muestra el estudiante para concluir la tarea. Esta característica es la única que será valorada por medio de la observación del investigador durante cada sesión de trabajo y no con base en la producción del estudiante.
- 12) *Creatividad*: se refiere a la capacidad del estudiante de inventar problemas variados y originales y puede ser estudiada a partir de cuatro indicadores que son los más empleados para determinar si una producción es creativa, a saber, fluidez, flexibilidad, originalidad y generalización.
- 13) *Formulación y reformulación de problemas de gran riqueza*: esta característica consiste en la capacidad que muestra el estudiante para formular y reformular un problema, de modo que su nueva producción sea de mayor riqueza.

Además, el análisis de las producciones en el estudio piloto permitió definir en cada característica tres indicadores de dominio (bajo, medio y alto), mientras que en las características 3, 4, 5, 9, 10 se agragó uno más llamado “nulo”, que valora la ausencia de dicha característica en el enunciado del problema. El objetivo de los indicadores es valorar con mayor profundidad y precisión el grado de presencia de dichas variables en las producciones de los estudiantes. La fundamentación y descripción de las características, así como de los indicadores de dominio serán presentados en un documento posterior, ya que se requiere de mayor espacio para hacerlo.

Por ultimo, se puede concluir que el instrumento propuesto, así como las características del talento matemático claves para la invención de problemas y los indicadores definidos en cada una de ellas, corresponden a un primer acercamiento al estudio de la caracterización del talento matemático mediante actividades de invención de problemas.

## IX. REFERENCIAS

- Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema difícil por alumnos de educación primaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 277–286). Ciudad real, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3731153.pdf>
- Ayllón, M. F. y Gomez, I. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela Abierta*, 17, 29–

40.

- Banfield, T. (2005). Ability grouping for mathematically gifted adolescent boys. *International Education Journal*, 6(2), 141–149.
- Brown, S. y Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. New Jersey, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113–140). Badajoz, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1191/>
- Chapman, O. (2012). Prospective Elementary School Teachers' Ways of Making Sense of Mathematical Problem Posing. *PNA*, 6(4), 135–146.
- Dominic, M. y Freiman, V. (2017). Differentiating Instruction Using a Virtual Environment: A Study of Mathematical Problem Posing Among Gifted and Talented Learners Introduction. *Global Education Review*, 4(1), 78–98.
- Ellerton, N. (1986). Children's made-up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261–271.
- Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio* (tesis de maestría). Universidad de Granada, España.
- Espinoza, J., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 14(39), 368–392.
- Espinoza, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2015). Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas, *Uniciencia*, 29(1), 58–81.
- Fernández, J. A. y Barbarán, J. J. (2015). *Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática*. Madrid, España: Editorial la Muralla.
- Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades : A Challenging Situations Approach. *The Mathematics Enthusiast*, 3(1), 51–75.
- Ghasempour, A. Z., Bakar, M. N. y Reza, G. (2013). Mathematical Problem Posing and Metacognition: A Theoretical Framework. *International Journal of Pedagogical Innovations*, 1(2), 63–68. Recuperado de <https://doi.org/10.12785/ijpi/010201>
- Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 28(6), 14–17.
- Keşan, C., Kaya, D. y Güvercin, S. (2010). The Effect of Problem Posing Approach to the Gifted Student ' s Mathematical Abilities. *International Online Journal of Educational Sciences* 2(3), 677–687.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem com from? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–148). New Jersey, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Koichu, B. y Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 71–86. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9>
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, Estados Unidos: Universidad de Chicago Press.
- Malaspina, U. (2011). El rincón de los problemas: Sobre creación de problemas. *Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, 28, 159–164.
- Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Silver, E. y Cai, J. (1996). An Analysis of Aritmatic Problem Posing by Middle School Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.
- Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1–7. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2>
- Singer, F. M., Pelcer, I. y Voica, C. (2011). Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity. In: Marta Pytlak, Tim Rowland, Ewa Swoboda (Eds) *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7)*, University of Rzeszów, Poland, 1133–1142.
- Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164–185). Edit Cowan

University: MASTEC.

Stoyanova, E. y Ellerton, N. (1996). A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. En P. Clarskson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Melbourne, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

## APÉNDICE

Apéndice A: Instrumento empleado en el estudio piloto.

Nombre del alumno \_\_\_\_\_

Género: Masculino  Femenino

Edad \_\_\_\_\_

Nombre del centro educativo \_\_\_\_\_

Nivel que cursa \_\_\_\_\_

### CUESTIONARIO #1

1. Inventa un problema matemático que pueda resolver, pero que considere que es difícil para tus compañeros.
2. Reformula el problema que inventaste anteriormente cambiando o agregando más información de modo que te parezca más difícil de resolver que el anterior
3. Inventa un problema matemático que consideres difícil de resolver y que se resuelva utilizando alguna o varias ecuaciones.
4. Reformula el problema que inventaste cambiando o agregando más información de modo que te parezca más difícil de resolver que el anterior.

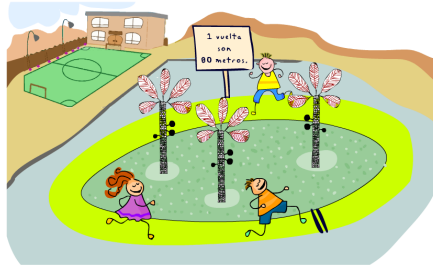
### CUESTIONARIO #2

1. Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.  
*“Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Heredia. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros”*
2. Inventa la mayor cantidad de preguntas que puedas que estén relacionados con el siguiente enunciado. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.  
*“Juan, María y Pedro son artesanos que venden sus productos en el mercado. Juan vende sandalias a ¢5000, María bolsos a ¢9500 y Pedro carteras a ¢6000. La semana pasada Juan vendió 15 productos más que Pedro, mientras que Pedro vendió el doble de productos que María. María vendió 42 bolsos esa misma semana”*
3. Inventa 5 problemas matemáticos que estén relacionados con el siguiente enunciado:  
*“Hay diez niñas y quince niños de pie en una fila”.*

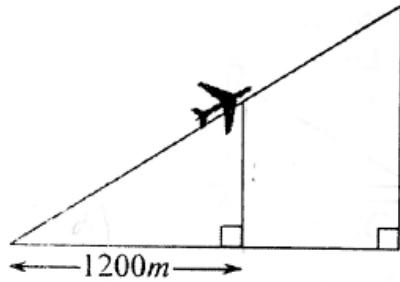
### CUESTIONARIO #3

1. De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

DISEÑO DE UN INSTRUMENTO DE INVENCÓN DE PROBLEMAS PARA CARACTERIZAR EL TALENTO MATEMÁTICO



2. En la siguiente figura se muestra el momento en el que un avión despega de una pista. Inventa la mayor cantidad de problemas matemáticos que puedas que estén relacionados con dicha figura



3. Inventa un problema matemático que esté relacionado con la información que se presenta en el siguiente recorte de periódico. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.



¿Cómo valora la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil  Regular  Difícil